

430.

NOTE SUR QUELQUES FORMULES DE M. E. DE JONQUIÈRES,
RELATIVES AUX COURBES QUI SATISFONT À DES CON-
DITIONS DONNÉES.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LXIII. (Juillet—
Décembre, 1866), pp. 666—670.]

LES formules dont il s'agit sont publiées dans les *Comptes Rendus*, séances du 3 et du 17 septembre 1866. En faisant une simple transformation algébrique pour y introduire la classe $M (= m^2 - m)$ de la courbe donnée U^m , et en changeant un peu la forme, les théorèmes de M. de Jonquières peuvent s'énoncer comme il suit :

1°. Le nombre des contacts des courbes C^r qui ont un contact de l'ordre n avec une courbe fixe U^m , et qui passent en outre par $\frac{1}{2}r(r+3) - n$ points donnés, est

$$= \frac{1}{2} (n+1) [nM + (2r-2n)m].$$

OBSERVATION. Énoncé de cette manière, le théorème s'applique même au cas $n=0$. En effet, pour $n=0$, le nombre donné par le théorème est $=mr$, qui est le nombre des contacts de l'ordre 0 (intersections simples) de la courbe donnée U^m avec une courbe déterminée de l'ordre r .

2°. Le nombre des contacts de l'ordre n' ($=$ ou $< n$) des courbes C^r qui ont deux contacts des ordres n et n' respectivement avec une courbe fixe U^m , et qui passent en outre par $\frac{1}{2}r(r+3) - n - n'$ points donnés est

$$= \frac{1}{2} (n+1) (n'+1) \{ [nM + (2r-2n)m] [n'M + (2r-2n')m] \\ - 2(n^2 + nn' + n'^2 + n + n')M \\ + [-4r(n+n'+1) + 4(n^2 + nn' + n'^2 + n + n')]m \}.$$

OBSERVATION. Énoncé de cette manière, le théorème s'applique même aux cas $n' = 0$, et $n' = n$. En effet, pour $n' = 0$, le nombre donné par le théorème est $= (rm - n - 1) \cdot \frac{1}{2} (n + 1) [nM + (2r - 2n)m]$, ce qui est égal au nombre des courbes C^r qui ont avec la courbe donnée U^m un contact de l'ordre n , multiplié par $rm - n - 1$, nombre des contacts de l'ordre 0 (intersections simples) de chacune de ces courbes avec la courbe U^m . Et pour $n' = n$, le nombre des contacts est le double du nombre des courbes C^r .

Je remarque que les deux théorèmes peuvent se démontrer de la manière dont je me suis servi en cherchant le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions données; car, en remplaçant la courbe m par l'ensemble de deux courbes m et m' , on trouve que pour le théorème 1° le nombre cherché est

$$= \alpha M + \beta m,$$

où les coefficients (α, β) ne dépendent que de (r, n) ; et puis, en supposant que ce théorème soit connu, on trouve que pour le théorème 2° le nombre cherché est

$$= \frac{1}{4} (n + 1) (n' + 1) [nM + (2r - 2n)m] [n'M + (2r - 2n')m] + \alpha M + \beta m,$$

où de même les coefficients (α, β) ne dépendent que de (r, n) .

Or voici comment on peut déterminer les coefficients dans les deux théorèmes:

Pour le théorème 1°, on démontre que pour U^m une droite, le nombre cherché est $= (n + 1)(r - n)$; et que pour U^m une conique, le nombre cherché se déduit de là en écrivant $2r$ au lieu de r ; c'est-à-dire, que pour la conique, le nombre est $= (n + 1)(2r - n)$. On a donc

$$\beta = (n + 1)(r - n), = \frac{1}{2} (n + 1)(2r - 2n),$$

$$2\alpha + 2\beta = (n + 1)(2r - n),$$

et de là

$$\alpha = \frac{1}{2} (n + 1)n;$$

ce qui achève la démonstration.

Pour le théorème 2°, on démontre que pour U^m une droite, le nombre cherché est $= (n + 1)(n' + 1)(r - n - n')(r - n - n' - 1)$, et que pour U^m une conique, le nombre cherché se déduit de là en écrivant $2r$ au lieu de r ; c'est-à-dire, pour la conique, le nombre est

$$= (n + 1)(n' + 1)(2r - n - n')(2r - n - n' - 1).$$

On a donc

$$(n + 1)(n' + 1)(r - n - n')(r - n - n' - 1) = (n + 1)(n' + 1)(r - n)(r - n') + \beta,$$

$$(n + 1)(n' + 1)(2r - n - n')(2r - n - n' - 1) = (n + 1)(n' + 1)(2r - n)(2r - n') + 2\alpha + 2\beta;$$

cela donne pour α et β les valeurs

$$\alpha = \frac{1}{4} (n + 1)(n' + 1) [-2(n^2 + nn' + n'^2 + n + n')],$$

$$\beta = \frac{1}{4} (n + 1)(n' + 1) [-4r(n + n' + 1) + 4(n^2 + nn' + n'^2 + n + n')];$$

et la démonstration est ainsi achevée.

Je remarque que sous les formes ici données les deux théorèmes s'appliquent à une courbe U^m avec des points doubles, mais sans point de rebroussement.

Le théorème dont je me suis servi pour la détermination des coefficients peut s'énoncer sous la forme plus générale que voici, savoir :

En dénotant par $\phi(r, n, n', \dots)$ le nombre des courbes C^r qui ont avec une droite donnée des contacts des ordres n, n', \dots , et qui passent en outre par $\frac{1}{2}r(r+3) - n - n' \dots$ points donnés, alors si, au lieu de la droite donnée, on a une conique donnée, le nombre des courbes C^r sera $= \phi(2r, n, n', \dots)$.

En effet, l'équation de la courbe cherchée C^r contient des coefficients indéterminés, lesquels, par les conditions de passer par les points donnés, se réduisent linéairement à $n + n' \dots + 1$ coefficients; en dénotant par (A, B, \dots) ces coefficients, l'équation de la courbe contiendra linéairement (A, B, \dots) et sera ainsi de la forme $(A, B, \dots)\chi(x, y, z)^r = 0$. L'équation de la droite donnée est satisfaite en prenant pour (x, y, z) des fonctions linéaires déterminées d'un paramètre variable θ ; donc, en coupant la courbe C^r par la droite donnée, on obtient une équation $(A, B, \dots)\chi(\theta, 1)^r = 0$, et en exprimant que cette équation ait n racines égales, n' racines égales, etc., on obtient entre (A, B, C, \dots) des équations, lesquelles, en éliminant tous les coefficients, excepté deux quelconques (A, B) , conduisent à une équation finale $(A, B)^p = 0$, et le degré p de cette équation est ce qu'il s'agissait de trouver, le nombre des courbes C^r . Si au lieu d'une droite donnée on a une conique donnée, il n'y a rien à changer, sinon que les coordonnées (x, y, z) doivent être remplacées par des fonctions quadratiques de θ ; on a ainsi une équation $(A, B, \dots)\chi(\theta, 1)^{2r} = 0$, qui conduit à une équation finale $(A, B)^{p'} = 0$, où p' est la même fonction de $(2r, n, n', \dots)$ qu'est p de (r, n, n', \dots) ; et le nombre des courbes C^r est $= p'$. Le théorème est donc démontré. Et, précisément de la même manière, on démontre le théorème encore plus général :

En dénotant par $\phi(r, n, n', \dots)$ le nombre des courbes C^r qui ont avec une droite donnée des contacts des ordres n, n', \dots , et qui passent en outre par $\frac{1}{2}r(r+3) - n - n' \dots$ points donnés, alors si, au lieu de la droite donnée, on a une courbe unicursale donnée de l'ordre m , le nombre des courbes C^r est $= \phi(mr, n, n', \dots)$.

On aurait pu se servir directement de cela pour démontrer les théorèmes 1° et 2°. Par exemple, pour le théorème 1°, la considération de la courbe unicursale U^m donne

$$\alpha M + \beta m = \alpha(2m - 2) + \beta m = (n + 1)(mr - n);$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{2}(n + 1)n, \quad \beta = \frac{1}{2}(n + 1)(2r - 2n),$$

comme auparavant.