433.

SUR LES SURFACES TÉTRAÉDRALES.

[*Notes to the work* De la Gournerie, "*Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*," 8vo. Paris, 1867.]

Premier Mémoire. Notes pp. 190—193.

ÉQUATIONS DE CERTAINES

1°. L'équation

$$\begin{array}{ll}
0 = + b^2c^2 f^2x^8 & + c^2a^2g^2y^8 \\
\quad \cdots & - 2c^2bf(af - bg)\, x^6y^2 \\
+ 2c^2ag\ (af - bg)\, y^6 x^2 & \quad \cdots \\
- 2b^2ah\,(ch - af)\, z^6 x^2 & + 2a^2bh\,(bg - ch)\, z^6y^2 \\
+ 2f^2gh\,(bg - ch)\, w^6x^2 & + 2g^2hf\,(ch - af)\, w^6y^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
+ a^2\,(b^2g^2 + c^2h^2 - 4bgch)\, y^4z^4 & + b^2\,(c^2h^2 + a^2 f^2 \\
+ f^2\,(b^2g^2 + c^2h^2 - 4bgch)\, w^4x^4 & + g^2\,(c^2h^2 + a^2 f^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\quad \cdots & + 2bf\,(afbg + c^2h^2 - 2ch\chi)\, x^4z^2w^2 \\
- 2ag\,(afbg + c^2h^2 - 2ch\chi)\, y^4w^2z^2 & \quad \cdots
\end{array}$$

$$+ 2ah\,(chaf + b^2g^2 - 2bg\chi)\, z^4y^2w^2 - 2bh\,(bgch + a^2 f^2 - 2af\chi)\, z^4w^2x^2$$

$$- 2gh\,(bcgh + a^2f^2 - 2af\chi)\, w^4y^2z^2 - 2hf\,(cahf + b^2g^2 - 2bg\chi)\, w^4z^2x^2$$

$$+ 2\Omega x^2y^2z^2w^2$$

www.rcin.org.pl

SURFACES DU HUITIÈME ORDRE.

$$
\begin{array}{ll}
+ a^2b^2h^2z^8 & + f^2g^2h^2w^8 \\
+ 2b^2cf\,(ch - af)\,x^6z^2 & - 2bcf^2\,(bg - ch)\,x^6w^2 \\
- 2a^2cg\,(bg - ch)\,y^6z^2 & - 2cag^2\,(ch - af)\,y^6w^2 \\
\ldots & - 2abh^2\,(af - bg)\,z^6w^2 \\
+ 2h^2fg\,(af - bg)\,w^6z^2 & \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
- 4chaf)\,z^4x^4 & + c^2\,(a^2f^2 + b^2g^2 - 4afbg)\,x^4y^4 \\
- 4chaf)\,w^4y^4 & + h^2\,(a^2f^2 + b^2g^2 - 4afbg)\,w^4z^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
- 2cf\,(chaf + b^2g^2 - 2bg\chi)\,x^4w^2y^2 & + 2bc\,(bcgh + a^2f^2 - 2af\chi)\,x^4y^2z^2 \\
+ 2cg\,(bgch + a^2f^2 - 2af\chi)\,y^4x^2w^2 & + 2ca\,(cahf + b^2g^2 - 2bg\chi)\,y^4z^2x^2 \\
\ldots & + 2ab\,(abfg + c^2h^2 - 2ch\chi)\,z^4x^2y^2 \\
- 2fg\,(abfg + c^2h^2 - 2ch\chi)\,w^4x^2y^2 & \ldots
\end{array}
$$

(où, pour abréger, on a écrit $\chi = af + bg + ch$, et Ω est une quantité quelconque) est celle d'une surface du huitième ordre qui a pour courbes doubles les quatre coniques

$$\begin{array}{ll} x = 0, & +cy^2 - bz^2 + fw^2 = 0\,; \\ y = 0, & -cx^2 + az^2 + gw^2 = 0\,; \\ z = 0, & +bx^2 - ay^2 + hw^2 = 0\,; \\ w = 0, & -fx^2 - gy^2 - hz^2 = 0. \end{array}$$

En déterminant Ω, savoir, en écrivant $\lambda + \mu + \nu = 0$, $af\lambda^2 + bg\mu^2 + ch\nu^2 = 0$ (ce qui donne deux systèmes de valeurs de $\lambda : \mu : \nu$), et puis

$$6\Omega = 4\Sigma \frac{\mu - \lambda}{\nu} (af + bg)^2\, ch - 2\Sigma \frac{\mu^2 bg - \lambda^2 af}{\nu^2} (af + bg)^2 - 4\,(af - bg)(bg - ch)(ch - af),$$

la surface devient une surface réglée, savoir, la *quadrispinale* de M. de la Gournerie ; et, en particulier, en supposant $\dfrac{1}{af} + \dfrac{1}{bg} + \dfrac{1}{ch} = 0$, on obtient

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{af} : \frac{1}{bg} : \frac{1}{ch},$$

et de là

$$6\Omega = (-2 - 4 =) - 6\,(af - bg)(bg - ch)(ch - af),$$

et la surface sera développable.

2°. L'équation

$$\begin{array}{llll} 0 = +\,a^2y^4z^4 & +\,b^2z^4x^4 & +\,c^2x^4y^4 \;+\; f^2x^4w^4 \;+\; g^2y^4w^4 \;+\; h^2z^4w^4 & \\ \quad\;\; \ldots & +\,2bfx^4z^2w^2 & -\,2cfx^4y^2w^2 + 2bcx^4y^2z^2 & \\ -\,2agy^4z^2w^2 & \quad\;\; \ldots & +\,2cgy^4x^2w^2 + 2cax^2y^4z^2 & \\ +\,2ahz^4y^2w^2 & -\,2bhz^4x^2w^2 & \quad\;\; \ldots \quad\;\; + 2abx^2y^2z^4 & \\ -\,2ghw^4y^2z^2 & -\,2hfw^4z^2x^2 & -\,2fgw^4x^2y^2 \quad \ldots & \\ +\,2\Omega x^2y^2z^2w^2 & & & \end{array}$$

(où Ω est une quantité quelconque) est celle d'une surface du huitième ordre ayant pour courbes doubles les quatre courbes du quatrième ordre

$$\begin{array}{ll} x = 0, & hz^2w^2 - gw^2y^2 + ay^2z^2 = 0\,; \\ y = 0, & -hz^2w^2 + fw^2x^2 + bz^2x^2 = 0\,; \\ z = 0, & +gy^2w^2 - fw^2x^2 + cx^2y^2 = 0\,; \\ w = 0, & -ay^2z^2 - bz^2x^2 - cx^2y^2 = 0. \end{array}$$

En écrivant

$$\lambda + \mu + \nu = 0, \quad \frac{af}{\lambda^2} + \frac{bg}{\mu^2} + \frac{ch}{\nu^2} = 0$$

www.rcin.org.pl

(ce qui donne quatre systèmes de valeurs de $\lambda : \mu : \nu$), et puis

$$\Omega = af\frac{\nu-\mu}{\lambda} + bg\,\frac{\lambda-\nu}{\mu} + ch\,\frac{\mu-\lambda}{\nu}:$$

la surface devient une surface réglée, savoir, la *quadricuspidale* de M. de la Gournerie; et, en supposant

$$(af)^{\frac{1}{3}} + (bg)^{\frac{1}{3}} + (ch)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

et

$$\lambda : \mu : \nu = (af)^{\frac{1}{3}} : (bg)^{\frac{1}{3}} : (ch)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne

$$\Omega = \left[(af)^{\frac{1}{3}} - (bg)^{\frac{1}{3}}\right]\left[(bg)^{\frac{1}{3}} - (ch)^{\frac{1}{3}}\right]\left[(ch)^{\frac{1}{3}} - (af)^{\frac{1}{3}}\right]:$$

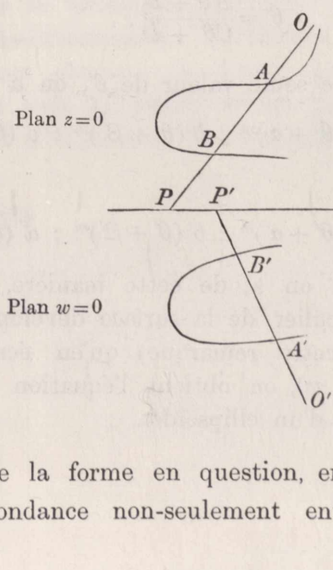
la surface devient développable.

Cambridge, 18 *Octobre* 1866.

Deuxième Mémoire. Notes pp. 279—283.

NOTE I. SUR LA DÉCOMPOSITION DU LIEU DES GÉNÉRATRICES EN SURFACES TÉTRAÉDRALES DISTINCTES.

Il me semble qu'une de vos conclusions a besoin d'être modifiée. Ainsi la surface tétraédrale dérivée de deux courbes triangulaires à exposant $\frac{1}{m}$ (m étant un entier positif), laquelle, selon un de vos théorèmes, serait de l'ordre $2m^2$, paraît se décomposer en m surfaces chacune de l'ordre $2m$. Il y a pour cela une raison *à priori*; en effet,



pour deux triangulaires de la forme en question, en employant votre construction, on peut établir une correspondance non-seulement entre les deux systèmes de points

$A, B, \ldots$, et $A', B', \ldots$, mais aussi entre chaque point A et un seul point correspondant A', car l'équation de la première courbe étant de la forme

$$fx^{\frac{1}{m}} + gy^{\frac{1}{m}} + hz^{\frac{1}{m}} = 0,$$

on satisfait à cette équation en écrivant

$$x : y : z = a(\theta + \alpha)^m : b(\theta + \beta)^m : c(\theta + \gamma)^m,$$

où θ est un paramètre variable. De même, l'équation de la seconde courbe étant

$$f'x^{\frac{1}{m}} + g'y^{\frac{1}{m}} + k'w^{\frac{1}{m}} = 0,$$

on satisfait à cette équation en écrivant

$$x : y : w = a'(\theta' + \alpha')^m : b'(\theta' + \beta')^m : d'(\theta' + \delta')^m,$$

où θ' est aussi un paramètre variable.

Pour la droite OP, on a

$$\frac{x}{y} = \frac{a(\theta + \alpha)^m}{b(\theta + \beta)^m},$$

et pour la droite $O'P'$

$$\frac{x}{y} = \frac{a'(\theta' + \alpha')^m}{b'(\theta' + \beta')^m};$$

donc, la condition pour la correspondance des droites est

$$\frac{a(\theta + \alpha)^m}{b(\theta + \beta)^m} = \lambda \frac{a'(\theta' + \alpha')^m}{b'(\theta' + \beta')^m},$$

ce qui donne m valeurs différentes pour θ' en termes de θ. Mais chacune de ces valeurs est de la forme

$$\theta' = \frac{A\theta + B}{C\theta + D},$$

et, en ne faisant attention qu'à une seule valeur de θ', on a le point

$$x : y : z = a(\theta + \alpha)^m : b(\theta + \beta)^m : c(\theta + \gamma)^m,$$

qui correspond à un point unique

$$x : y : w = a'(\theta' + \alpha')^m : b'(\theta' + \beta')^m : d'(\theta' + \delta')^m.$$

Pour le cas de l'exposant $\frac{1}{3}$, on a, de cette manière, une surface de l'ordre 6. J'ai vérifié cela dans le cas particulier de la surface développable. Il est très-singulier (c'est M. Salmon qui m'a fait cette remarque) qu'en écrivant dans cette équation (x^2, y^2, z^2, w^2) au lieu de (x, y, z, w), on obtient l'équation d'une surface du douzième ordre, lieu des centres de courbure d'un ellipsoïde.

Cambridge, 15 *Février* 1866.

www.rcin.org.pl

NOTE II. À L'OCCASION DE L'ORDRE DES SURFACES TÉTRAÉDRALES.

Je crois que j'ai négligé de vous faire connaître un théorème assez général au sujet de l'ordre de ces surfaces. En considérant dans l'espace deux courbes (planes ou à double courbure) des ordres m et m' respectivement, et en supposant qu'il y ait entre les points de ces deux courbes une correspondance (α, α'), (c'est-à-dire qu'à un point donné de la courbe m correspondent α' points sur la courbe m', et à un point donné de la courbe m' correspondent α points sur la courbe m), alors la surface réglée que l'on obtient en unissant par des droites les points correspondants des courbes m et m' sera de l'ordre $m\alpha' + m'\alpha$.

Cambridge, 18 *Octobre*, 1866.

NOTE III. SUR LA SURFACE COMPLÉMENTAIRE.

Je puis reconnaître, par mes propres formules, que, des pq^2 surfaces de l'ordre $2p^2q$, il n'y en a que pq qui passent par la troisième directrice. En effet, le rapport anharmonique k est donné en termes des paramètres de la troisième directrice, au moyen d'une équation qui contient la quantité irrationnelle $k^{\frac{p}{q}}$. En rationalisant cette équation, on obtient pour k une équation de l'ordre pq; à chaque racine k_1 correspondent q surfaces, savoir celles qui appartiennent aux q valeurs de $k_1^{\frac{p}{q}}$; mais l'équation irrationnelle n'est satisfaite que par une seule valeur de $k_1^{\frac{p}{q}}$, à savoir la valeur de $k_1^{\frac{p}{q}}$ donnée par l'équation irrationnelle, en y substituant pour k, en tant que k y entre rationnellement, la valeur $k = k_1$. Donc, à chaque racine k_1 correspond une seule surface qui passe par la troisième directrice. La question à laquelle donne lieu cette circonstance paraît très-intéressante. La surface déterminée par les trois directrices est composée de pq surfaces chacune de l'ordre $2p^2q$, et d'une surface résiduale de l'ordre $2p^3(q^3 - q^2)$. Quelles sont la nature et les propriétés de cette surface résiduale? Je serais bien aise de savoir si vous avez fait des recherches à ce sujet.

Cambridge, 29 *Mars* 1866.

www.rcin.org.pl