XV.

SUI FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

«Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», serie III, vol. VI, n. 8, anno 1887 (*).

PARTE PRIMA.

INTRODUZIONE

1. Nell'analisi la derivazione e l'integrazione si considerano come le due operazioni infinitesimali fondamentali; esse si definiscono in modo indipendente l'una dall'altra e si dimostra che l'una operazione è inversa all'altra. Il mezzo che mi son proposto per studiare le equazioni differenziali lineari parte dalla considerazione di due analoghe operazioni fondamentali infinitesimali le quali rispettivamente dànno il passaggio dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale lineare ai coefficienti della stessa ed inversamente dai coefficienti della equazione differenziale agli integrali fondamentali.

2. Eccomi ad esporre in succinto come si ottengono tali operazioni.

Se sopra una variabile qualunque u si eseguiscono successivamente due sostituzioni lineari i cui coefficienti sono rispettivamente $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$, ciò equivale ad eseguire una sola sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2\\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix}$ che si usa chiamare il prodotto delle due. Si scrive

$$\begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2\\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}.$$

È noto che, se

$$\begin{pmatrix}\alpha_3, \beta_3\\ \gamma_3, \delta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$$

si avrà in generale

$$\begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2\\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix} \mp \begin{pmatrix}\alpha_3, \beta_3\\ \gamma_3, \delta_3\end{pmatrix}^{(1)}.$$

(*) Presentata dai Soci E. BETTI ed E. FERGOLA.

(1) Ora ed in seguito il segno $\mp$ starà a significare *differente*.

Prescindiamo dalla variabile u sopra cui debbono eseguirsi le sostituzioni e consideriamo soltanto le relazioni fra i coefficienti delle sostituzioni. Supporremo le sostituzioni a determinante uguale ad 1.

3. Dalla operazione fondamentale considerata del prodotto di due sostituzioni possono farsi dipendere come casi particolari la somma, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione ordinarie.

Infatti, come è noto, avremo

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ \alpha, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \beta, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \alpha + \beta, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, 0 \\ 0, \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta, 0 \\ 0, \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta, 0 \\ 0, \frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ \alpha, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \beta, 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \alpha - \beta, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, 0 \\ 0, \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta, 0 \\ 0, \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta}, 0 \\ 0, \frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

4. Supponiamo ora di avere una sostituzione i cui elementi siano funzioni di una variabile: chiameremo la sostituzione *funzione* di quella variabile, e se gli elementi saranno funzioni continue si chiamerà pure *continua* la sostituzione. Mediante tale considerazione si passa subito ad ottenere una operazione infinitesimale colle sostituzioni.

Infatti, se $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ è una sostituzione continua di x, avremo che le due sostituzioni

$$\text{(I)} \qquad \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_x^{-1},$$

e

$$\text{(II)} \qquad \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_x^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_{x+\Delta x},$$

quando Δx tenderà a zero, tenderanno indefinitamente verso la identità in modo che, *sotto certe condizioni*, le sostituzioni (I) e (II) potranno rispettivamente scriversi, col trascurare infinitesimi d'ordine superiore al primo,

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 \Delta x, & \beta_1 \Delta x \\ \gamma_1 \Delta x, & 1 + \delta_1 \Delta x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 \Delta x, & \beta_2 \Delta x \\ \gamma_2 \Delta x, & 1 + \delta_2 \Delta x \end{pmatrix},$$

essendo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix}$$

due sostituzioni funzioni di x.

Queste operazioni fondamentali infinitesimali le chiamerò rispettivamente *derivazione a sinistra* e *a destra* della sostituzione primitiva $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$.

Analogamente partendo da una sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \alpha + \delta = 0,$$

(a determinante eguale o no ad uno) funzione di x definita in un intervallo $(p \cdots q)$, considererò questo intervallo diviso in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$. Formerò i due prodotti:

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_n h_n, & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n & , 1 + \delta_n h_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 h_2, & \beta_2 h_2 \\ \gamma_2 h_2 & , 1 + \delta_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1 & , 1 + \delta_1 h_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1 & , 1 + \delta_1 h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 h_2, & \beta_2 h_2 \\ \gamma_2 h_2 & , 1 + \delta_2 h_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n h_n, & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n & , 1 + \delta_n h_n \end{pmatrix}.$$

in cui $\begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \gamma_i, \delta_i \end{pmatrix}$ rappresenta il valore della sostituzione per un valore di x compreso nell'intervallo h_i. Considererò quindi i limiti, se esistono, di questi due prodotti quando $h_1, h_2, \cdots, h_n$ vanno indefinitamente impiccolendo e chiamerò rispettivamente i due limiti *integrale destro* e *integrale sinistro* della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ nell'intervallo $(p \cdots q)$.

Dimostrerò che le due operazioni della derivazione e della integrazione delle sostituzioni possono ritenersi come operazioni inverse.

Esse fanno parte di quella *classe di operazioni infinitesimali* a cui alludevo fin da principio; perché, come dimostrerò, dànno appunto *il passaggio dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale del second'ordine ai coefficienti della stessa e inversamente dai coefficienti agli integrali fondamentali*.

Per ottenere la generalizzazione delle stesse operazioni al caso di una equazione differenziale d'ordine n, basterà considerare una sostituzione

$$S = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

di ordine n ed estendere, come è facile, a questa le due operazioni fondamentali di derivazione e di integrazione.

In altri termini *il calcolo differenziale ed integrale relativo alle sostituzione ci fornisce la teoria generale delle equazioni differenziali lineari*.

5. Se si tien presente quanto dicemmo nell'art. 3 si vede che la derivazione e la integrazione ordinaria, come pure la derivazione logaritmica e la sua operazione inversa, possono ritenersi casi particolari della derivazione e della integrazione di sostituzioni.

6. Nella prima parte di questo lavoro mi occupo dello studio delle due operazioni fondamentali, a cui ho accennato precedentemente, sulle sostituzioni funzioni di variabili reali.

Nel § 1 studio le derivate delle sostituzioni del secondo ordine, le condizioni per la loro esistenza, le loro proprietà e le regole per la derivazione dei prodotti di sostituzioni.

Il § 2 è relativo alla integrazione delle sostituzioni e alle relazioni che passano fra la derivazione e la integrazione.

Nel § 3 mi occupo delle sostituzioni funzioni di più variabili e dei loro differenziali del primo e del secondo ordine e trovo le condizioni affinché una espressione differenziale data per sostituzioni sia un differenziale esatto d'una sostituzione.

Il § 4 si riferisce alla integrazione delle espressioni differenziali, e nel § 5 si trova un cenno circa alle variazioni delle sostituzioni.

Nel § 6, dopo definita la integrazione multipla, viene dato un teorema che trasforma l'integrale curvilineo di una sostituzione in un integrale doppio; da questa trasformazione risulta la condizione di monodromia di una sostituzione funzione di due variabili ottenuta integrando un differenziale esatto.

Nel § 7 viene eseguito un breve studio sopra una sostituzione di due variabili che gode di proprietà analoghe al parametro differenziale secondo di una funzione.

Questi primi sette paragrafi (per rendere più semplice la esposizione della presente teoria) sono relativi alle sostituzioni del secondo ordine, la generalizzazione ad una sostituzione di ordine n viene eseguita nel § 8.

Nelle parti che faranno seguito alla presente verranno considerate le sostituzioni funzioni di variabili complesse. Per esse vale un teorema analogo a quello di CAUCHY relativo ai residui.

Si considereranno poi le sostituzioni algebriche, cioè quelle sostituzioni monodrome sopra una superficie di RIEMANN e che non posseggono che poli, ed i loro integrali. Si ottiene in tal modo una classe di sostituzioni che chiamo *sostituzioni abeliane* e che per le loro proprietà possono dividersi in varie categorie. Queste sostituzioni hanno la proprietà di essere definite sopra una superficie di RIEMANN sezionata mediante i tagli normali, in modo che i due valori della sostituzione alle due rive di ciascun taglio si ottengono l'uno dall'altro moltiplicando a destra, o a sinistra, o da ambo le parti uno dei due valori per sostituzioni costanti lungo ciascun taglio o ciascuna porzione di taglio compresa fra nodi consecutivi.

Faranno seguito alcune analogie fra i teoremi delle funzioni algebriche e degli integrali abeliani e le proprietà delle sostituzioni algebriche e abeliane le quali resultano da uno studio sul teorema di ABEL.

Verranno poi considerate alcune classi speciali di sostituzioni abeliane.

Finalmente un'ultima parte riguarderà l'applicazione dei resultati trovati alla teoria delle equazioni differenziali lineari e mostrerà appunto il nesso di questa teoria con quella della derivazione e della integrazione delle sostituzioni.

PRELIMINARI

§ 1. – Formule preliminari della teoria delle sostituzioni. – Notazioni.

1. Ricorderò le formole seguenti:

Si ha

$$S = \begin{pmatrix} a_1\,, b_1 \\ c_1\,, d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2\,, b_2 \\ c_2\,, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & , & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & , & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

e in generale, se

$$S = \left\{ \begin{matrix} b_{11}\,, b_{12}\,, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}\,, b_{22}\,, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\,, b_{n2}\,, \cdots, b_{nn} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{matrix} \right\},$$

si ha

$$S = \left\{ \begin{matrix} c_{11}\,, c_{12}\,, \cdots, c_{1n} \\ c_{21}\,, c_{22}\,, \cdots, c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\,, c_{n2}\,, \cdots, c_{nn} \end{matrix} \right\}$$

con

$$c_{hk} = \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{hi}\, a_{ik}\,.$$

2. Se

$$S = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix},\ ad - bc = 1\,,$$

si ha

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & , -b \\ -c & , \ a \end{pmatrix},$$

e in generale, se

$$S = \left\{ \begin{matrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{matrix} \right\},\quad D = \begin{vmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$S^{-1} = \left\{ \begin{matrix} A_{11}\,, A_{21}\,, \cdots, A_{n1} \\ A_{12}\,, A_{22}\,, \cdots, A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}\,, A_{2n}\,, \cdots, A_{nn} \end{matrix} \right\}$$

essendo A_{rs} l'elemento reciproco ad a_{rs} nel determinante D.

3. Se si hanno due sostituzioni τ e σ, si chiama

$$s = \tau^{-1}\sigma\tau$$

la *trasformata di* σ *mediante* τ, mentre

$$s' = \tau\sigma\tau^{-1}$$

la chiameremo la *trasformata inversa di* σ *mediante* τ.

Ponendo

$$\sigma = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} \quad , \quad \tau = \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix}$$

e supponendo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ e $ad - bc$ qualunque, avremo

$$\text{(I)} \qquad s = \begin{pmatrix} \alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma d \,, & \beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \beta\delta d \\ -\alpha\gamma a + \alpha^2 c - \gamma^2 b + \alpha\gamma d \,, & -\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta d \end{pmatrix},$$

$$\text{(I}'\text{)} \qquad s' = \begin{pmatrix} \delta\alpha a + \delta\beta c - \gamma\alpha b - \beta\gamma d \,, & -\beta\alpha a - \beta^2 c + \alpha^2 b + \beta\alpha d \\ \delta\gamma a + \delta^2 c - \gamma^2 b - \delta\gamma d \,, & -\gamma\beta a - \delta\beta c + \alpha\gamma b + \alpha\delta d \end{pmatrix}.$$

In generale, se

$$\tau = \begin{pmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} b_{11}\,, b_{12}\,, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}\,, b_{22}\,, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\,, b_{n2}\,, \cdots, b_{nn} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix} = 1\,,$$

avremo

$$\text{(II)} \quad s = \tau^{-1}\sigma\tau = \begin{pmatrix} c_{11}\,, c_{12}\,, \cdots, c_{1n} \\ c_{21}\,, c_{22}\,, \cdots, c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\,, c_{n2}\,, \cdots, c_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(II}'\text{)} \quad s' = \tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}\,, d_{12}\,, \cdots, d_{1n} \\ d_{21}\,, d_{22}\,, \cdots, d_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n1}\,, d_{n2}\,, \cdots, d_{nn} \end{pmatrix}$$

con

$$c_{is} = \sum_{1}^{n}{}_{t} \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a_{ts}\, \mathrm{A}_{li}\, b_{lt} \quad , \quad d_{is} = \sum_{1}^{n}{}_{t} \sum_{1}^{n}{}_{l}\, \mathrm{A}_{st}\, a_{il}\, b_{lt}\,,$$

essendo A_{li} l'elemento reciproco ad a_{li} nel determinante D.

Facciamo la somma dei termini in diagonale nelle (I) (I′); avremo

$$\begin{aligned} &(\alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma d) + (-\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta d) \\ &= (\delta\alpha a + \delta\beta c - \gamma\alpha b - \beta\gamma d) + (-\gamma\beta a - \delta\beta c + \gamma\alpha b + \alpha\delta d) \\ &= (a + d)(\alpha\delta - \beta\gamma) = a + d\,. \end{aligned}$$

Analogamente formando la somma dei termini in diagonale nelle (II) e (II′) avremo

$$\sum_{1}^{u}{}_{i} c_{ii} = \sum_{1}^{n}{}_{i} d_{ii} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{t} \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a_{ti}\, \mathrm{A}_{li}\, b_{lt} = \sum{}_{t} \sum{}_{l}\, b_{lt} \sum{}_{i}\, a_{ti}\, \mathrm{A}_{li} = \sum_{1}^{n}{}_{t}\, b_{tt}\,.$$

Quindi si ottiene il teorema:

La trasformata di una sostituzione qualunque ha la somma dei termini lungo la diagonale eguale alla somma dei termini lungo la diagonale nella sostituzione primitiva.

5. Ricorderò la *proprietà associativa* del prodotto di sostituzioni che può esprimersi nel modo seguente.

Se si ha il prodotto delle sostituzioni

$$U = S_1 S_2 \cdots S_{i-2} S_{i-1} S_i S_{i+1} \cdots S_n,$$

posto $S_{i-1} S_i = T$, si avrà

$$U = S_1 S_2 \cdots S_{i-2} T S_{i+1} \cdots S_n.$$

6. Accennerò che nel corso del lavoro ho adoperato qualche volta il simbolo

$$\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$$

per denotare la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2 \\ c_1 \pm c_2, d_1 \pm d_2 \end{pmatrix}.$$

7. Quando nel parlare di una sostituzione sarà necessario di aver riguardo al valore del determinante della sostituzione, scriveremo dopo la sostituzione il valore del suo determinante col simbolo (det. D). Analogamente il simbolo (som. A) dopo una sostituzione indicherà che la somma dei termini in diagonale è A.

8. Siano

$$\text{(III)} \qquad A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)}, a_{12}^{(i)}, \cdots, a_{1n_i}^{(i)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n_i 1}^{(i)}, a_{n_i 2}^{(i)}, \cdots, a_{n_i n_i}^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2 \cdots p)$$

p sostituzioni di ordini n_i. Rappresenteremo con

$$\text{(IV)} \qquad \begin{pmatrix} A_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, A_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, A_p \end{pmatrix} = S$$

la sostituzione

$$\text{(V)} \qquad S = \begin{pmatrix} b_{11}, \cdots, b_{1N} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{N1}, \cdots, b_{NN} \end{pmatrix}$$

di ordine $N = \sum_1^p {}_i n_i$ la quale si ottiene scrivendo nella (IV) al posto di $A_1, A_2, \cdots, A_p$ i secondi membri delle (III) e completando le linee e le colonne con tanti zeri. In altri termini, se avremo contemporaneamente

$$\text{(VI)} \qquad \sum_1^q {}_i n_i > r \geqq \sum_1^{q+1} {}_i n_i \ , \quad \sum_1^q {}_i n_i > s \geqq \sum_1^{q+1} {}_i n_i,$$

prenderemo

$$b_{rs} = a_{kl}^{q+1}\,,\ k = r - \sum_{1}^{q}{}_i\, n_i\,,\ l = s - \sum_{1}^{q}{}_i\, n_i\,;$$

se le r e s non soddisferanno contemporaneamente alle relazioni (VI), prenderemo

$$b_{rs} = 0\,.$$

Per rappresentare la sostituzione (V), oltre al simbolo (IV) adotteremo ancora gli altri

$$\overline{\underline{\left\{ A_1\, A_2 \cdots A_p \right\}}}\ ,\quad \overline{\underline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_i\, A_i \right\}}}\,.$$

9. Se in una sostituzione qualunque

$$S = \begin{pmatrix} 1 + a\,, & b \\ c & , 1 + d \end{pmatrix}$$

$a\,, b\,, c\,, d$, sono minori di m, la sostituzione si dirà *minore* di m.

Se due sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1\,, b_1 \\ c_1\,, d_1 \end{pmatrix}$ sono tali che $a - a_1\,, b - b_1\,, c - c_1\,, d - d_1$, sono minori di m si dirà che le due sostituzioni *differiscono meno di* m.

1. *Se la sostituzione* S (det. Δ) *minore di* m *differisce dalla sostituzione* S' *per meno di* ε, *avremo che* $S^{-1} S'$ *e* $S' S^{-1}$ *saranno minori di* $\dfrac{\varepsilon(1 + 2m)}{\Delta}$ e reciprocamente *se* $S' S^{-1}$ *è minore di* ε *e* S' *è minore di* m, S *e* S' *differiranno fra loro meno di* $\varepsilon(1 + 2m)$.

2. *Se si trasforma una sostituzione* τ *inferiore ad* ε *mediante una sostituzione* σ (det. Δ) *inferiore ad* m, *la trasformata sarà inferiore a* $\dfrac{\varepsilon(1 + 2m)^2}{\Delta}$.

3. *Se* $S = \begin{pmatrix} 1 + a\,, & b \\ c & , 1 + d \end{pmatrix}$ *(det.* Δ*) e* $S' = \begin{pmatrix} 1 + a'\,, & b' \\ c' & , 1 + d' \end{pmatrix}$ *(det.* Δ*) sono rispettivamente minori di* m *e* m' *e se* $S'' = \begin{pmatrix} 1 + a + a'\,, & b + b' \\ c + c' & , 1 + d + d' \end{pmatrix}$ *(det.* Δ''*), avremo che* SS' *differirà da* S'' *meno di* $2mm'$; e che $SS'S''^{-1}$ *sarà minore di*

$$\frac{2mm'\,[1 + 2(m + m')]^2}{\Delta''}\,.$$

10. Se una sostituzione $\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}$ è funzione di x in un intervallo $(p \cdots q)$, la massima oscillazione dei suoi elementi si chiamerà l'*oscillazione della sostituzione nell'intervallo*.

§ 2. – Sulla riduzione delle sostituzioni alla forma normale.

1. Avremo spesso bisogno nel corso del lavoro di porre le sostituzioni sotto una forma speciale che chiameremo la *forma normale*.

Ci varremo a tal fine di un teorema di K. Weierstrass da questi dato nella Memoria *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* [2].

(2) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 18 Mai 1868.

Il teorema a cui si allude è il seguente:

Se per mezzo delle sostituzioni

$$x_i = \sum_{1}^{n}{}_\gamma h_{i\gamma} u_\gamma \quad , \quad y_i = \sum_{1}^{n}{}_\gamma k_{i\gamma} v_\gamma ,$$

ove le $h_{i\gamma}$, $k_{i\gamma}$ *sono costanti e le* x_i, y_i, u_γ, v_γ *sono variabili, le due forme bilineari*

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{A}_{\alpha,\beta} x_\alpha y_\beta ,$$

$$\mathrm{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{B}_{\alpha,\beta} x_\alpha y_\beta$$

si trasformano in due altre

$$\mathrm{P}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n) = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{A}'_{\alpha,\beta} u_\alpha v_\beta ,$$

$$\mathrm{Q}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n) = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{B}'_{\alpha,\beta} u_\alpha v_\beta$$

e se i due determinanti

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} h_{11}, \cdots, h_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}, \cdots, h_{nn} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} k_{11}, \cdots, k_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}, \cdots, k_{nn} \end{vmatrix}$$

non sono nulli, avremo che i DIVISORI ELEMENTARI *dei determinanti delle due forme*

$$p\mathrm{P} + q\mathrm{Q} \, , \, p\mathrm{P}' + q\mathrm{Q}'$$

coincideranno fra loro.

RECIPROCAMENTE *se le due coppie di forme bilineari*

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) \, , \, \mathrm{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

e

$$\mathrm{P}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n) \, , \, \mathrm{Q}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

sono tali che i determinanti delle due forme

$$p\mathrm{P} + q\mathrm{Q} \, , \, p\mathrm{P}' + q\mathrm{Q}'$$

hanno i medesimi divisori elementari, si potranno trovare $2n^2$ *costanti* $(h_{11} \cdots h_{nn})$, $(k_{11} \cdots k_{nn})$ *per le quali*

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} h_{11}, \cdots, h_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}, \cdots, h_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} k_{11}, \cdots, k_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}, \cdots, k_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

in modo che le sostituzioni

$$x_l = \sum_{1}^{n}{}_\gamma h_{l\gamma} u_\gamma \quad , \quad y_l = \sum_{1}^{n}{}_\gamma k_{l\gamma} v_\gamma$$

trasformino contemporaneamente P in P′ e Q in Q′.

Il WEIERSTRASS dà il significato seguente ai *divisori elementari* del determinante della forma $pP + qQ$, che indica col simbolo $[P, Q]$.

Questo determinante è una funzione omogenea di grado n in p e q; esso potrà quindi considerarsi (se si esclude il caso in cui tutti i coefficienti delle forme P e Q siano nulli) come il prodotto di n fattori lineari, e omogenei di p e q. Sia $ap + bq$ uno di questi fattori ed l l'esponente della più alta potenza di questo fattore che divide $[P, Q]$; $l^{(\varkappa)}$ l'esponente della più alta potenza dello stesso fattore che divide *tutti* i determinanti minori di $[P, Q]$ di ordine $n - \varkappa$. Avremo

$$l > l^{(1)} > l^{(2)} \cdots > l^{(r-1)} > 0$$

supposto $l^{(r)} = 0$. Posto

$$l - l^{(1)} = e \, , l^{(1)} - l^{(2)} = e^{(1)} \, , \cdots , l^{(r-1)} = e^{(r-1)}$$

avremo

$$(ap + bq)^l = (ap + bq)^e \, (ap + bq)^{e^{(1)}} , \cdots , (ap + bq)^{e^{(r-1)}} .$$

Ciascuno dei fattori $(ap + bq)^{e^{(\varkappa)}}$ che comparisce nell'ultimo prodotto viene chiamato da WEIERSTRASS un *divisore elementare*.

2. Si considerino ora le sostituzioni

$$S_1 = \begin{vmatrix} A_{11} , A_{12} , \cdots , A_{1n} \\ A_{21} , A_{22} , \cdots , A_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} , A_{n2} , \cdots , A_{nn} \end{vmatrix} , \qquad S'_1 = \begin{vmatrix} A'_{11} , A'_{12} , \cdots , A'_{1n} \\ A'_{21} , A'_{22} , \cdots , A'_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{n1} , A'_{n2} , \cdots , A'_{nn} \end{vmatrix} ,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} B_{11} , B_{12} , \cdots , B_{1n} \\ B_{21} , B_{22} , \cdots , B_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n1} , B_{n2} , \cdots , B_{nn} \end{vmatrix} , \qquad S'_2 = \begin{vmatrix} B'_{11} , B'_{12} , \cdots , B'_{1n} \\ B'_{21} , B'_{22} , \cdots , B'_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B'_{n1} , B'_{n2} , \cdots , B'_{nn} \end{vmatrix} ,$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} h_{11} , h_{21} , \cdots , h_{n1} \\ h_{12} , h_{22} , \cdots , h_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{1n} , h_{2n} , \cdots , h_{nn} \end{vmatrix} , \qquad T_1 = \begin{vmatrix} k_{11} , k_{12} , \cdots , k_{1n} \\ k_{21} , k_{22} , \cdots , k_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1} , k_{n2} , \cdots , k_{nn} \end{vmatrix} ,$$

essendo queste ultime due a determinante diverso da zero. Il teorema di WEIERSTRASS può enunciarsi nel modo seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia

$$T_2 \, S_1 \, T_1 = S'_1 \, ,$$

$$T_2 \, S_2 \, T_1 = S'_2 \, ,$$

è che le due sostituzioni

$$S_1 - \omega S_2 = \begin{Bmatrix} A_{11} - \omega B_{11}, \cdots, A_{1n} - \omega B_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} - \omega B_{n1}, \cdots, A_{nn} - \omega B_{nn} \end{Bmatrix},$$

$$S'_1 - \omega S'_2 = \begin{Bmatrix} A'_{11} - \omega B'_{11}, \cdots, A'_{1n} - \omega B'_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{n1} - \omega B'_{n1}, \cdots, A'_{nn} - \omega B'_{nn} \end{Bmatrix}$$

abbiano i determinanti con i medesimi divisori elementari.

3. Ciò premesso prendiamo per S_2 e S'_2 l'identità, cioè

$$S_2 = S'_2 = \begin{Bmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{Bmatrix};$$

avremo

$$T_1 T_2 = \begin{Bmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{Bmatrix},$$

quindi

$$T_2 = T_1^{-1}.$$

Potremo sempre ridurre la sostituzione T_1 ad avere il determinante eguale ad 1, ed avremo che fra S_1 e S'_1 passerà la relazione

$$T_1^{-1} S_1 T_1 = S'_1,$$

cioè l'una sarà la trasformata dell'altra per mezzo della sostituzione T_1. Dal teorema dell'Art. 2, si deduce quindi:

La condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia

$$T_1^{-1} S_1 T_1 = S'_1$$

essendo Det. $T_1 = 1$, *è che i determinanti*

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} - \omega, A_{12} & , \cdots, A_{1n} \\ A_{21} & , A_{22} - \omega, \cdots, A_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} & , A_{n2} & , \cdots, A_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} A'_{11} - \omega, A'_{12} & , \cdots, A'_{1n} \\ A'_{21} & , A'_{22} - \omega, \cdots, A'_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{n1} & , A'_{n2} & , \cdots, A'_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

abbiano i medesimi divisori elementari.

Chiameremo il determinante D relativo alla sostituzione S il determinante *caratteristico della sostituzione* e *divisori elementari della sostituzione* quelli relativi al suo determinante caratteristico.

4. Prendasi ora una sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

e si considerino le radici $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ dell'equazione di grado n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, a_{12} & , \cdots, a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, \cdots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Se esse saranno tutte diverse fra loro, avremo che

$$D' = \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , \omega_2 - \omega, \cdots, & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & , 0 & , \cdots, \omega_n - \omega \end{vmatrix}$$

avrà i medesimi divisori elementari di D; quindi potremo scrivere

$$(1) \qquad S = T_1^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} T_1 \qquad (\mathrm{Det}\, T_1 = 1).$$

Si supponga invece che alcune delle radici siano eguali fra loro. Si abbiano l_i radici eguali ad ω_i e i fattori elementari corrispondenti siano

$$(\omega - \omega_i)^{e_i^{(1)}}, (\omega - \omega_i)^{e_i^{(2)}}, \cdots, (\omega - \omega_i)^{e_i^{(r_i)}}; \qquad (i = 1, 2 \cdots p)$$

$$e_i^{(1)} \geqq e_i^{(2)} \geqq e_i^{(3)} \geqq \cdots \geqq e_i^{(r_i)}.$$

Si formino le sostituzioni di ordine $e_i^{(\varkappa)}$

$$E_i^{(\varkappa)} = \begin{pmatrix} \omega_i - \omega, & 0 & , & 0 & , & 0 & , \cdots, & 0 \\ 1 & , \omega_i - \omega, & 0 & , & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , & 1 & , \omega_i - \omega, & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , \omega_i - \omega, \cdots, & \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , \cdots & , \cdots, 1, \omega_i - \omega \end{pmatrix},$$

$$S_i^{(\varkappa)} = \begin{Bmatrix} \omega_i, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & \omega_i, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \omega_i, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \omega_i \end{Bmatrix},$$

e quindi (vedi § prec. Art. 8)

$$E = \overline{\underline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i}{}_\varkappa E_i^{(\varkappa)} \right\}}},$$

$$V = \overline{\underline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i}{}_\varkappa S_i^{(\varkappa)} \right\}}}.$$

È facile riconoscere che V ha i medesimi divisori elementari di S, quindi potremo scrivere

$$\text{(2)} \qquad S = T_1^{-1} \overline{\underline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i}{}_\varkappa S_i^{(\varkappa)} \right\}}} T_1 \qquad (\text{Det. } T_1 = 1).$$

La formola (1) rientra nella precedente, basterà supporre in essa

$$e_i^{(\varkappa)} = 1 \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad , \quad \varkappa = 1 .$$

La sostituzione S posta sotto la forma (2) si dirà sotto la *forma normale*.

Una applicazione della riduzione di una sostituzione alla forma normale verrà fatta nel § 8 di questa prima parte, ma le applicazioni principali verranno fatte nella seconda parte del presente lavoro.

SOSTITUZIONI FUNZIONI DI VARIABILI REALI

§ 1. – Derivazione di una sostituzione.

1. Abbiasi una *sostituzione funzione di una variabile reale* x che supporremo sempre a determinante eguale ad 1. Ammettiamo inoltre che gli elementi della sostituzione siano finiti: diremo in questo caso che *la sostituzione è finita*. Se poi gli elementi per un dato valore della variabile saranno continui, diremo che la *sostituzione è continua* per quel valore della variabile.

Sia $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ una sostituzione finita e continua di x nel punto x_0. Si formino i due prodotti di sostituzioni

$$S_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0+\Delta x} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0}^{-1},$$

$$S'_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0+\Delta x}$$

con Δx positivo o negativo.

I due prodotti coll'impiccolire indefinito di Δx tenderanno verso l'identità. Si ponga

$$S_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{pmatrix} 1+\lambda, & \mu \\ \nu & , 1+\rho \end{pmatrix},$$

$$S'_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1, & \mu_1 \\ \nu_1 & , 1+\rho_1 \end{pmatrix}$$

e si considerino le due sostituzioni

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda}{\Delta x}, & \dfrac{\mu}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu}{\Delta x}, & \dfrac{\rho}{\Delta x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\Delta x}, & \dfrac{\mu_1}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu_1}{\Delta x}, & \dfrac{\rho_1}{\Delta x} \end{Bmatrix}.$$

Cerchiamo le condizioni affinché coll'impiccolire indefinito di Δx, queste due sostituzioni tendano verso due sostituzioni limiti

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Vale perciò il seguente teorema:

TEOREMA I. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché esistano i due limiti richiesti è che le funzioni* A, B, C, D, *ammettano nel punto* x_0 *una derivata determinata e finita.*

Abbiamo infatti

$$S_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{Bmatrix} A_{x_0} + \Delta A, & B_{x_0} + \Delta B \\ C_{x_0} + \Delta C, & D_{x_0} + \Delta C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{x_0}, & B_{x_0} \\ C_{x_0}, & D_{x_0} \end{Bmatrix}^{-1},$$

$$S'_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{Bmatrix} A_{x_0}, & B_{x_0} \\ C_{x_0}, & D_{x_0} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A_{x_0} + \Delta A, & B_{x_0} + \Delta B \\ C_{x_0} + \Delta C, & D_{x_0} + \Delta D \end{Bmatrix},$$

ove

$$\Delta A = A_{x_0+\Delta x} - A_{x_0},$$

$$\Delta B = B_{x_0+\Delta x} - B_{x_0},$$

$$\Delta C = C_{x_0+\Delta x} - C_{x_0},$$

$$\Delta D = D_{x_0+\Delta x} - D_{x_0},$$

da cui si deduce

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda, & \mu \\ \nu & , 1+\rho \end{pmatrix} = S_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{Bmatrix} 1 + (D_{x_0}\Delta A - C_{x_0}\Delta B), & (A_{x_0}\Delta B - B_{x_0}\Delta A) \\ (D_{x_0}\Delta C - C_{x_0}\Delta D) & , 1 + (A_{x_0}\Delta D - B_{x_0}\Delta C) \end{Bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda_1, & \mu_1 \\ \nu_1 & , 1+\rho_1 \end{pmatrix} = S_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{Bmatrix} 1 + (D_{x_0}\Delta A - B_{x_0}\Delta C), & (D_{x_0}\Delta B - B_{x_0}\Delta D) \\ (A_{x_0}\Delta C - C_{x_0}\Delta A) & , 1 + (A_{x_0}\Delta D - C_{x_0}\Delta B) \end{Bmatrix},$$

e

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda}{\Delta x}, & \dfrac{\mu}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu}{\Delta x}, & \dfrac{\rho}{\Delta x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{x_0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x} - C_{x_0}\dfrac{\Delta B}{\Delta x}, & A_{x_0}\dfrac{\Delta B}{\Delta x} - B_{x_0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x} \\ D_{x_0}\dfrac{\Delta C}{\Delta x} - C_{x_0}\dfrac{\Delta D}{\Delta x}, & A_{x_0}\dfrac{\Delta D}{\Delta x} - B_{x_0}\dfrac{\Delta C}{\Delta x} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \dfrac{\Delta A}{\Delta x}, & \dfrac{\Delta B}{\Delta x} \\ \dfrac{\Delta C}{\Delta x}, & \dfrac{\Delta D}{\Delta x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{x_0}, & B_{x_0} \\ C_{x_0}, & D_{x_0} \end{Bmatrix}^{-1};$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\Delta x}, \dfrac{\mu_1}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu_1}{\Delta x}, \dfrac{\rho_1}{\Delta x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{x_0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x} - B_{x_0}\dfrac{\Delta C}{\Delta x}, D_{x_0}\dfrac{\Delta B}{\Delta x} - B_{x_0}\dfrac{\Delta D}{\Delta x} \\ A_{x_0}\dfrac{\Delta C}{\Delta x} - C_{x_0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x}, A_{x_0}\dfrac{\Delta D}{\Delta x} - C_{x_0}\dfrac{\Delta B}{\Delta x} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} A_{x_0}, B_{x_0} \\ C_{x_0}, D_{x_0} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\Delta A}{\Delta x}, \dfrac{\Delta B}{\Delta x} \\ \dfrac{\Delta C}{\Delta x}, \dfrac{\Delta D}{\Delta x} \end{Bmatrix}.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché esistano i limiti delle due sostituzioni

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda}{\Delta x}, \dfrac{\mu}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu}{\Delta x}, \dfrac{\rho}{\Delta x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\Delta x}, \dfrac{\mu_1}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu_1}{\Delta x}, \dfrac{\rho_1}{\Delta x} \end{Bmatrix}$$

è quindi che esistano i limiti di

$$\frac{\Delta A}{\Delta x}, \frac{\Delta B}{\Delta x}, \frac{\Delta C}{\Delta x}, \frac{\Delta D}{\Delta x},$$

il che dimostra il teorema.

Noi supporremo sempre che gli elementi della sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ oltre esser finiti e continui ammettano anche le derivate prime determinate e finite. In questa ipotesi le due sostituzioni limiti

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}$$

saranno date rispettivamente da

$$\begin{Bmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A', B' \\ C', D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} DA' - CB', AB' - BA' \\ DC' - CD', AD' - BC' \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A', B' \\ C', D' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} DA' - BC', DB' - BD' \\ AC' - CA', AD' - CB' \end{Bmatrix},$$

ove gli apici sostituiscono i segni di derivazione.

Consideriamo i prodotti

$$S_{x_0+dx, x_0} = \begin{Bmatrix} A + dA, B + dB \\ C + dC, D + dD \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1},$$

$$S'_{x_0, x+dx_0} = \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A + dA, B + dB \\ C + dC, D + dD \end{Bmatrix}.$$

Si otterrà

$$S_{x_0+dx_0, x_0} = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - CdB, & AdB - BdA \\ DdC - CdD & , 1 + AdD - BdC \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \alpha dx, & \beta dx \\ \gamma dx & , 1 + \delta dx \end{Bmatrix},$$

$$S'_{x_0+dx_0, x_0} = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - BdC, & DdB - BdD \\ AdC - CdA & , 1 + AdD - CdB \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \alpha_1 dx, & \beta_1 dx \\ \gamma_1 dx & , 1 + \delta_1 dx \end{Bmatrix}.$$

2. Introdurremo le seguenti denominazioni:

Chiameremo *derivata sinistra nel punto* x della sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ la sostituzione limite $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ e chiameremo *derivata destra* di $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ la sostituzione limite $\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}$.

La sostituzione infinitesima $S_{x_0+dx,\, x_0}$ si chiamerà il *differenziale sinistro* di $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ nel punto x_0 e $S'_{x_0,\, x_0+dx}$ si chiamerà il *differenziale destro*.

Adopreremo i simboli seguenti:

$$(1)\ \text{(differenziale sinistro)}\ d\begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - CdB, & AdB - BdA \\ DdC - CdD, & 1 + AdD - BdC \end{Bmatrix},$$

$$(2)\ \text{(differenziale destro)}\ \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix} d = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - BdC, & DdB - BdD \\ AdC - CdA, & 1 + AdD - CdB \end{Bmatrix},$$

$$(3)\ \text{(derivata sinistra)}\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA' - CB', & AB' - BA' \\ DC' - CD', & AD' - BC' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(4)\ \text{(derivata destra)}\ \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} DA' - BC', & DB' - BD' \\ AC' - CA', & AD' - CB' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix},$$

$$d\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} dx,$$

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}\frac{d}{dx}\cdot dx.$$

Avremo poi subito le formole

$$\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}\frac{d}{dx}\right\} = \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix}.$$

3. Come è facile il prevedere, ad ogni teorema relativo alle *derivate sinistre* ne corrisponde uno *correlativo* per le *derivate destre* che si ottiene dal primo scambiando dappertutto nell'enunciato la parola *destra* colla parola *sinistra*, e *trasformata* colla *trasformata inversa*.

Il più delle volte quindi non enunceremo che uno solo dei due teoremi *correlativi*, avvertendo fin d'ora che non si avrà nessuna difficoltà a stabilire l'altro.

4. Cominciamo dallo stabilire subito il *teorema fondamentale* sulla derivazione delle sostituzioni, il quale, come vedremo in seguito, ci dà il legame della presente teoria con quella delle equazioni differenziali lineari.

TEOREMA II. – *La derivata a sinistra di una sostituzione* (det. 1) *non cambia se si moltiplica* A DESTRA *la sostituzione per una sostituzione costante* (det. 1).

TEOREMA CORRELATIVO. – *La derivata a destra di una sostituzione* (det. 1) *non cambia se si moltiplica* A SINISTRA *la sostituzione per una sostituzione costante* (det. 1).

Infatti se $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ è una sostituzione costante e $\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}$ è una sostituzione funzione della x, avremo

$$\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta\\ c\alpha + d\gamma, c\beta + d\delta\end{pmatrix}$$

e derivando a sinistra

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}a'\alpha + b'\gamma, a'\beta + b'\delta\\ c'\alpha + d'\gamma, c'\beta + d'\delta\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}.$$

Analogamente

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d\\ \gamma a + \delta c, \gamma b + \delta d\end{pmatrix}$$

e derivando a destra

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\right\}\frac{d}{dx} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha a' + \beta c', \alpha b' + \beta d'\\ \gamma a' + \delta c', \gamma b' + \delta b'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}.$$

5. Teorema III. - *Il differenziale* (destro o sinistro) *di una sostituzione* (det. 1) *ha il determinante eguale ad 1 a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al differenziale della variabile indipendente.*

Infatti avendosi

$$d\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + DdA - CdB, & AdB - BdA\\ DdC - CdD & , 1 + AdD - BdC\end{pmatrix},$$

il determinante delle sostituzioni sarà, trascurando infinitesimi d'ordine superiore al dx,

$$1 + DdA - CdB + AdD - BdC = 1 + d(AD - BC) = 1.$$

Teorema IV. - *Ogni sostituzione*

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$$

non può esser derivata (destra o sinistra) *d'un'altra sostituzione* (det. 1) a *meno che non sia* $\alpha + \delta = 0$.

Posto

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

oppure

$$\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

avremo

$$\alpha = da' - cb' \quad , \quad \delta = ad' - bc',$$

oppure

$$\alpha = da' - bc' \quad , \quad \delta = ad' - cb',$$

quindi in ambedue i casi

$$\alpha + \delta = da' + ad' - bc' - cb' = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a, b \\ c, d \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostreremo in seguito (§ 2) che se $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ è continua, la condizione posta $\alpha + \delta = 0$ è anche sufficiente perché la sostituzione sia la derivata di una sostituzione (det. 1).

TEOREMA V. – *La derivata a destra e la derivata a sinistra di una sostituzione*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \text{(det. 1)}$$

hanno lo stesso determinante, che è eguale a

$$\begin{vmatrix} a', b' \\ c', d' \end{vmatrix}.$$

Abbiamo trovato che

$$\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$$

quindi

$$\text{Det.}\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \text{Det.}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \text{Det.}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \cdot \text{Det.}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{vmatrix} a', b' \\ c', d' \end{vmatrix}.$$

Ma

$$\text{Det.}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = 1,$$

quindi

$$\text{Det.}\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} = \text{Det.}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{vmatrix} a', b' \\ c', d' \end{vmatrix}.$$

TEOREMA VI. – *La derivata a destra è la trasformata della derivata a sinistra mediante la sostituzione primitiva.*

Infatti dalla relazione

$$\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\}$$

si deduce

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}.$$

TEOREMA VII. – *Si hanno le relazioni*

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = -\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \frac{d}{dx} = -\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\}.$$

Abbiamo

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d'a - b'c, & d'b - b'd \\ a'c - c'a, & a'd - c'b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} da' - bc', & db' - bd' \\ ac' - ca', & ad' - cb' \end{pmatrix},$$

quindi

$$\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}^{-1}\right\} + \left\{\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\right\} = \begin{pmatrix}0\,, 0\\ 0\,, 0\end{pmatrix}$$

donde il teorema enunciato.

6. Passiamo ora allo studio delle derivate dei prodotti di sostituzioni. Valgono perciò i seguenti teoremi.

Teorema VIII. – *Se* $\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}$ (det. 1) *è costante e* $\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}$ (det. 1) *è funzione di* x, *si ha*

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\right\}\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\right\}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix},$$

cioè la derivata a destra del secondo prodotto considerato è la trasformata della derivata della sostituzione variabile mediante la sostituzione costante, e la derivata a sinistra del primo prodotto considerato è la trasformata inversa della derivata della sostituzione variabile mediante quella costante.

Infatti

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\right\} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\alpha a + \beta c\,, \alpha b + \beta d\\ \gamma a + \delta c\,, \gamma b + \delta d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a' + \beta c'\,, \alpha b' + \beta d'\\ \gamma a' + \delta c'\,, \gamma b' + \delta d'\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'\,, b'\\ c'\,, d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1}.$$

Teorema IX. – *Se* $\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}$ (det. 1) e $\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}$ (det. 1) *sono due sostituzioni funzioni di* x, *si ha*

$$d\left\{\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\right\} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}dx \cdot \left\{\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta\\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\,, b\\ c\,, d\end{pmatrix}^{-1}\right\}dx. \tag{7}$$

Questo teorema si dimostra immediatamente osservando che il differenziale del primo membro si otterrà facendo il prodotto dei differenziali che si hanno supponendo successivamente costante l'una e variabile l'altra sostituzione.

La formula precedente è una delle fondamentali della presente teoria e per le applicazioni che ne faremo è opportuno presentarla sotto varie altre forme.

Premetteremo alcuni lemmi:

1° Lemma. – *A meno di infinitesimi d'ordine superiore a* dx, *si avrà*:

$$\begin{pmatrix}1 + \alpha_1 dx\,, & \beta_1 dx\\ \gamma_1 dx & , 1 + \delta_1 dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 + \alpha_2 dx\,, & \beta_2 dx\\ \gamma_2 dx & , 1 + \delta_2 dx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + \alpha_2 dx\,, & \beta_2 dx\\ \gamma_2 dx & , 1 + \delta_2 dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 + \alpha_1 dx\,, & \beta_1 dx\\ \gamma_1 dx & , 1 + \delta_1 dx\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 + \alpha_1 dx + \alpha_2 dx\,, & \beta_1 dx + \beta_2 dx\\ \gamma_1 dx + \gamma_2 dx & , 1 + \delta_1 dx + \delta_2 dx\end{pmatrix}.$$

2° Lemma. – *Se* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ *ha il det.* 1, *e se*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1, B_1 \\ C_1, D_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2, B_2 \\ C_2, D_2 \end{pmatrix},$$

avremo

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & , & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & , & \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & , & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & , & D_1 + D_2 \end{pmatrix},$$

ovvero, per una notazione stabilita precedentemente,

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}.$$

3° Lemma. – *Dato* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1), *e posto*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix},$$

si ha

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \alpha, & \beta \\ \gamma & , 1 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + A, & B \\ C & , 1 + D \end{pmatrix}.$$

Per i primi due lemmi non vi è bisogno di dimostrazione; il terzo è una immediata conseguenza del secondo, supponendo $\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$.

Ciò premesso, risulta subito che la formola del teorema IX potrà scriversi

$$(8) \qquad d\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \left\{ d \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ d \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1};$$

e poiché pel teorema VI

$$d \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} d \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1},$$

avremo anche

$$(9) \qquad d\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} d \cdot d \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}.$$

Passando dai differenziali alle derivate, si otterranno le seguenti formule equivalenti al teorema IX:

$$(10) \qquad \frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(11) \qquad \frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1},$$

vale a dire se

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \pi \end{pmatrix},$$

$$(12) \qquad \frac{d}{dx}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l+\lambda, m+\mu \\ n+\nu, p+\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}.$$

TEOREMA X. – *Se* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1) *e* $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ (det. 1) *sono funzioni di* x, *si ha*:

$$(13) \qquad d\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left[\left\{ d\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot d\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix},$$

ovvero

$$(14) \qquad \frac{d}{dx}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} - \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix},$$

vale a dire

$$(15) \qquad \frac{d}{dx}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda - l, \mu - m \\ \nu - n, \pi - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$$

se

$$(16) \qquad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \pi \end{pmatrix}.$$

Infatti per la formula (11) avremo

$$\frac{d}{dx}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix};$$

ma, pel teorema VII, si ha

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \frac{d}{dx} = -\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\},$$

da cui la (14). Applicando il primo lemma, si ha

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} d = \left\{ d\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\}^{-1},$$

quindi la formula (13) resta dimostrata.

Se $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ si suppone costante, si ottiene come conseguenza la formula

$$(17) \qquad -\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix},$$

la quale si sarebbe potuta ottenere anche direttamente con grande facilità.

TEOREMA XI. – *Abbiasi un prodotto di sostituzioni*

$$S_1 S_2 \cdots S_n = U$$

tutte a determinante eguale ad 1.

Si ponga

$$S_1 S_2 \cdots S_{n-1} = T_{n-1},$$
$$S_1 S_2 \cdots S_{n-2} = T_{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_1 S_2 \cdots S_i \;\;= T_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_1 = T_1.$$

Avremo

$$(18) \qquad d\,[S_1 S_2 \cdots S_n]$$
$$= dS_1 \cdot T_1 (dS_2) T_1^{-1} \cdot T_2 (dS_2) T_2^{-1} \cdots T_{i-1} (dS_i) T_{i-1}^{-1} \cdots T_{n-1} (dS_n) T_{n-1}^{-1},$$

ovvero

$$(19) \qquad \frac{d}{dx}(S_1 S_2 \cdots S_n) = \frac{dS_1}{dx} + T_1 \left(\frac{dS_2}{dx}\right) T_1^{-1}$$
$$+ T_2 \left(\frac{dS_3}{dx}\right) T_2^{-1} + \cdots + T_{i-1} \left(\frac{dS_i}{dx}\right) T_{i-1}^{-1} + \cdots + T_{n-1} \left(\frac{dS_n}{dx}\right) T_{n-1}^{-1}.$$

Questo teorema si dimostra immediatamente osservando che esso è stato dimostrato per $n = 2$, e tenendo conto del teorema IX, si ha che, se esso è verificato per $n = m$, risulta vero per $n = m + 1$.

7° Lemma. – *Se pel prodotto di due sostituzioni* $\begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1), *si ha*

$$\begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

è necessario che sia

$$\begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti dovendosi avere

$$am + cn = 0 \quad , \quad ap + cq = 0,$$
$$bm + dn = 0 \quad , \quad bp + dq = 0,$$
$$\begin{vmatrix} a, c \\ b, d \end{vmatrix} = 1,$$

è necessario che sia

$$m = n = p = q = 0.$$

Teorema XII. – *Se per* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1), *si ha*

$$d \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

avremo che $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ *sarà costante.*

Infatti dovrebbe essere

$$\begin{pmatrix} d', b' \\ c', d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

quindi per il lemma precedente

$$a' = b' = c' = d' = 0.$$

TEOREMA XIII. – *Se due sostituzioni* $\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$ (det. 1) *e* $\begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$ (det. 1) *hanno la stessa derivata sinistra, esse non possono differire che per una sostituzione moltiplicativa costante a destra.*

Sia

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

avremo pel teorema X

$$\frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha - \alpha, \beta - \beta \\ \gamma - \gamma, \delta - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

onde pel teorema XII

$$\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix},$$

essendo $\begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix}$ costante. Quindi

$$\begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix}.$$

TEOREMA XIV (teorema correlativo del prec.). – *Se due sostituzioni* (det. 1) *hanno la stessa derivata destra, esse non possono differire che per una sostituzione moltiplicativa costante a sinistra.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente.

8. Supponiamo che la sostituzione $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1) funzione di x, abbia la forma

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ c, 1 \end{pmatrix};$$

applicando le formole (3) e (4), avremo

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ c, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ c', 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ c, 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ c', 0 \end{pmatrix}.$$

Se la sostituzione ha invece la forma

$$\left\{ \begin{matrix} a, & 0 \\ 0, & \frac{1}{a} \end{matrix} \right\},$$

avremo

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a\,, & 0 \\ 0\,, & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a'}{a}\,, & 0 \\ 0\,, & -\frac{a'}{a} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a\,, & 0 \\ 0\,, & \frac{1}{a} \end{vmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{a'}{a}\,, & 0 \\ 0\,, & -\frac{a'}{a} \end{vmatrix}.$$

Quindi, come era facilmente prevedibile, la derivazione ordinaria e la derivazione logaritmica risultano essere casi particolari della derivazione di una sostituzione.

9. Applichiamo alcune delle formule precedenti per calcolare la derivata di alcune sostituzioni e ottenere delle formule di cui avremo in seguito bisogno.

Se $\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}$ è costante, avremo

$$d\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,, & 0 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,, & 0 \\ 0\,, & 0 \end{pmatrix}.$$

Se λ è costante

$$d\begin{pmatrix} e^{\lambda x}\,, & 0 \\ 0\,, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda dx\,, & 0 \\ 0 & , 1-\lambda dx \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} e^{\lambda x}\,, & 0 \\ 0\,, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,, & 0 \\ 0\,, & -\lambda \end{pmatrix};$$

quindi, se $\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}$ (det. 1) è costante, avremo

(20) $$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} e^{\lambda x}\,, & 0 \\ 0\,, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \lambda\,, & 0 \\ 0\,, & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Per il teorema VIII, avremo poi

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda x}\,, & 0 \\ 0\,, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\,, & 0 \\ 0\,, & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha\delta+\beta\gamma)\,, & -2\lambda\alpha\beta \\ -2\lambda\gamma\delta & , -\lambda(\alpha\delta+\beta\gamma) \end{pmatrix}.$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\alpha\delta+\beta\gamma) &= a \\ -2\lambda\alpha\beta &= b \\ 2\lambda\gamma\delta &= c \\ -\lambda(\alpha\delta+\beta\gamma) &= d \end{aligned}\right\} a+d=0,$$

si avrà

$$ad-bc = -\lambda^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 = -\lambda^2,$$

$$\lambda = \sqrt{bc-ad};$$

e, supponendo $ad - bc \neq 0$, avremo

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \beta &= -\frac{1}{\alpha}\frac{b}{2\lambda} \\ \gamma &= \alpha\frac{c}{a+\lambda} \\ \delta &= \frac{1}{\alpha}\frac{a+\lambda}{2\lambda}, \end{aligned}\right.$$

onde se $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ (det. 1) è costante

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\begin{pmatrix} \alpha & , -\frac{1}{\alpha}\frac{b}{2\lambda} \\ \alpha\frac{c}{a+\lambda} & , \frac{1}{\alpha}\frac{a+\lambda}{2\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d\end{pmatrix} \\ &a + d = 0 \\ &\lambda = \sqrt{bc - ad} \end{aligned}\right.$$

purché il determinante della sostituzione costante $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d\end{pmatrix}$ sia diverso da zero.

Osserviamo ora che si ha, supponendo c costante,

$$(22) \qquad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} 1, 0 \\ cx, 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ c, 0\end{pmatrix}.$$

Quindi per i teoremi II e VIII se $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (det. 1) e $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ (det. 1) sono costanti, avremo

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, 0 \\ x, 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 1, 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\delta\beta, -\beta^2 \\ \delta^2, -\delta\beta\end{pmatrix}.$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta &= a \\ -\beta^2 &= b \\ \delta^2 &= c \\ -\delta\beta &= d \end{aligned}\right\}, \quad a + d = 0 \quad , \quad ad - bc = 0,$$

si avrà

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \beta &= \sqrt{-b} \\ \gamma &= \frac{\alpha\sqrt{c} - 1}{\sqrt{-b}} \\ \delta &= \sqrt{c} \end{aligned}\right.$$

onde, essendo $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ costante,

$$
(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[\begin{Bmatrix} \alpha & , \sqrt{-b} \\ \dfrac{\alpha\sqrt{c}-1}{\sqrt{-b}} & , \sqrt{c} \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} 1, 0 \\ x, 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \\
&\qquad a+d=0 \qquad\qquad b \neq 0. \\
&\qquad ad-bc=0
\end{aligned}\right.
$$

Le formole (21), (22) e (23) ci dànno la forma delle *sostituzioni più generali la cui derivata sinistra è una sostituzione costante senza che tutti gli elementi sian nulli*. Nel caso in cui gli elementi della derivata sono nulli, sappiamo già che la sostituzione che deve derivarsi è costante.

10. Se la sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ è funzione di y, e questa variabile è funzione di x, posto

$$\frac{d}{dy}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

avremo evidentemente che

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y', \beta y' \\ \gamma y', \delta y' \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule precedenti ci dànno immediatamente la forma delle sostituzioni più generali la cui derivata è

$$\begin{pmatrix} a\varphi'(x), b\varphi'(x) \\ c\varphi'(x), d\varphi'(x) \end{pmatrix}, \quad \text{(som. 0)}.$$

Si avrà

$$
(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[\begin{Bmatrix} a & , -\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{b}{2\lambda} \\ a\dfrac{c}{a+\lambda} & , \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{a+\lambda}{2\lambda} \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda\varphi(x)}, & 0 \\ 0 & , e^{-\lambda\varphi(x)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a\varphi'(x), b\varphi'(x) \\ c\varphi'(x), d\varphi'(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad a+d=0 \\
&\qquad \lambda=\sqrt{bc-ad}\neq 0
\end{aligned}\right.
$$

$$
(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[\begin{Bmatrix} \alpha & , \sqrt{-b} \\ \dfrac{\alpha\sqrt{c}-1}{\sqrt{-b}} & , \sqrt{c} \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ \varphi(x), 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a\varphi'(x), b\varphi'(x) \\ c\varphi'(x), d\varphi'(x) \end{pmatrix} \\
&\qquad a+d=0 \\
&\qquad ad-bc=0
\end{aligned}\right.
$$

in cui α è costante e $\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}$ (det. 1) è costante.

§ 2. – Integrazione di una sostituzione.

1. Abbiasi una sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha , \beta\\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ funzione di un argomento reale x variabile in un intervallo $(p \cdots q)$, $p < q$. Dividiamo questo intervallo in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ (a cominciare dal limite inferiore p dell'intervallo) e denotiamo con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qualunque compresi fra il limite superiore e l'inferiore di queste quantità nell'intervallo h_i.

Formiamo i prodotti delle sostituzioni

$$A_n = \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+\alpha_i h_i , & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_n h_n , & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n & , 1+\delta_n h_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 h_1 , & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1 & , 1+\delta_1 h_1 \end{pmatrix},$$

$$A'_n = \prod_n^1{}_i \begin{pmatrix} 1+\alpha_i h_i , & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 h_1 , & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1 & , 1+\delta_1 h_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1+\alpha_n h_n , & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n & , 1+\delta_n h_n \end{pmatrix}.$$

Se, facendo impiccolire indefinitamente tutti gli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$, A_n e A'_n tendono verso due sostituzioni limiti S e S', queste si chiameranno rispettivamente *l'integrale sinistro* e *l'integrale destro di* $\begin{pmatrix}\alpha , \beta\\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ *nell'intervallo* $(p \cdots q)$ e si adotteranno i simboli

$$\text{(Integrale sinistro)} \quad S = \int_p^q \begin{pmatrix} 1+\alpha dx , & \beta dx \\ \gamma dx & , 1+\delta dx \end{pmatrix} = \int_p^q \begin{pmatrix}\alpha , \beta\\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx ,$$

$$\text{(Integrale destro)} \quad S' = \begin{pmatrix} 1+\alpha dx , & \beta dx \\ \gamma dx & , 1+\delta dx \end{pmatrix} \int_p^q = \begin{pmatrix}\alpha , \beta\\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx \int_p^q .$$

2. La determinazione della condizione d'integrabilità di una sostituzione è molto analoga a quella della condizione di integrabilità di una funzione. Si potrebbe quindi enunciare il resultato lasciandone la dimostrazione; ma per non rendere da questo lato incompleto il presente studio dedicheremo questo articolo ad accennare la dimostrazione in questione.

Premetteremo alcuni Lemmi.

1° Lemma. – *Se si ha il prodotto delle sostituzioni*

$$\begin{pmatrix} 1+A , & B \\ C & , 1+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_n , & b_n \\ c_n & , 1+d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a_{n-1} , & b_{n-1} \\ c_{n-1} & , 1+d_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1+a_1 , & b_1 \\ c_1 & , 1+d_1 \end{pmatrix}$$

e se $\begin{pmatrix} 1+a_i , & b_i \\ c_i & , 1+d_i \end{pmatrix}$ *è inferiore ad* m_i, *il prodotto sarà inferiore a*

$$\frac{\prod_1^n{}_i (1+2m_i) - 1}{2}.$$

Infatti la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1+A_1 , & B_1 \\ C_1 & , 1+D_1 \end{pmatrix} = \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+m_i , & m_i \\ m_i & , 1+m_i \end{pmatrix}$$

avrà ciascun elemento A_1, B_1, C_1, D_1 superiore in valore assoluto all'elemento corrispondente A, B, C, D. Ora

$$\begin{pmatrix} 1+m_i, & m_i \\ m_i & , 1+m_i \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+2m_i, & 0 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} 1+A_1, & B_1 \\ C_1 & , 1+D_1 \end{pmatrix} = \prod_1^n{}_i \left[\begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+2m_i, & 0 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \left\{ \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+2m_i, & 0 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \prod_1^n{}_i (1+2m_i), & 0 \\ 0 & , 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & , 1 \\ -1/2 & , 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i) - 1\right) & , & \frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i) - 1\right) \\ \frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i) - 1\right) & , & 1 + \frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i) - 1\right) \end{Bmatrix}.$$

2° Lemma. – *Se si hanno i due prodotti di sostituzioni*

$$U = S_n S_{n-1} \cdots S_2 S_1 = \prod_1^n{}_i S_i,$$

$$U' = S'_n S'_{n-1} \cdots S'_2 S'_1 = \prod_1^n{}_i S'_i,$$

avremo

$$UU'^{-1} = \prod_n^1{}_i T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1},$$

posto

$$T_i = \prod_{i+1}^n{}_s S_s \quad , \quad T_n = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha infatti

$$\prod_1^n{}_i S_i \left(\prod_1^n{}_i S'_i\right)^{-1} = \prod_2^n{}_i S_i \cdot S_1 S_1'^{-1} \cdot \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1} = T_1 (S_1 S_1'^{-1}) T_1^{-1} \prod_2^n{}_i S_i \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1},$$

e analogamente

$$\prod_2^n{}_i S_i \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1} = \prod_3^n{}_i S_i \cdot S_2 S_2'^{-1} \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1} = T_2 (S_2 S_2'^{-1}) T_2^{-1} \cdot \prod_3^n{}_i S_i \left(\prod_3^n{}_i S'_i\right)^{-1},$$

e così seguitando si ha

$$\prod_1^n S_i \left(\prod_1^n{}_i S'_i\right)^{-1} = \prod_n^1{}_i T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1}.$$

3° Lemma. – *Se le sostituzioni* S_i *sono inferiori a* m_i *e i loro determinanti sono superiori a* Δ_i, *mentre ciascuna* $S_i S_i'^{-1}$ *è minore di* ε_i, *la sostituzione*

$$UU'^{-1} = \left(\prod_1^n{}_i S_i\right) \left(\prod_1^n{}_i S'_i\right)^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\frac{\prod_i^n{}_1 \left\{ 1 + 2\varepsilon_i \prod_{s\ 1+i}^n \left[\frac{(1+2m_s)^2}{\Delta_s}\right]\right\} - 1}{2}.$$

Per il lemma precedente, avremo

$$UU'^{-1} = \prod_i{}_n^1 T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1}.$$

Ora

$$S_i S_i'^{-1} \text{ è inferiore a } \varepsilon_i,$$

$$T_i \text{ è inferiore a } \frac{\prod_{s\ 1+i}^n (1+2m_s) - 1}{2},$$

$$\text{e det. } T_i > \prod_{s\ 1+i}^n \Delta_s,$$

quindi

$$T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1} \text{ sarà inferiore a } \varepsilon_i \frac{\prod_{s\ 1+i}^n (1+2m_s)^2}{\prod_{s\ 1+i}^n \Delta_s},$$

e finalmente

$$\prod_i{}_1^n T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\frac{\prod_i{}_1^n \left\{ 1 + 2\varepsilon_i \prod_{s\ 1+i}^n \left(\frac{(1+2m_s)^2}{\Delta_s}\right)\right\} - 1}{2}.$$

In particolare se $m_s < 1/2$, *avremo* $\Delta_s > 1 - 2m_s$ *e quindi* UU'^{-1} *sarà inferiore a*

$$\frac{\prod_i{}_1^n \left\{ 1 + 2\varepsilon_i \prod_{s\ 1+i}^n \frac{(1+2m_s)^2}{(1-2m_s)}\right\} - 1}{2}.$$

4° Lemma. - *Se* $S_i = \begin{pmatrix} 1+\alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i & , 1+\delta_i \end{pmatrix}$ *è inferiore ad* $m_i < 1/2n$ *e*

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 + \sum_i{}_1^n \alpha_i & , & \sum_i{}_1^n \beta_i \\ \sum_i{}_1^n \gamma_i & , & 1 + \sum_i{}_1^n \delta_i \end{pmatrix}, \quad U = \prod_i{}_1^n S_i,$$

avremo che UT_0^{-1} *sarà inferiore a* $\frac{\prod_i{}_1^n \left\{ 1 + 4mm_i \left(\frac{1+2m}{1-2m}\right)^2 \right\} - 1}{2}$ *posto* $m = \sum_i{}_1^n m_i$.

Infatti, posto

$$T_i = \begin{Bmatrix} 1 + \sum_{i+1}^{n} {}_s \alpha_s & , & \sum_{i+1}^{n} {}_s \beta_s \\ \sum_{i+1}^{n} {}_z \gamma_s & , & 1 + \sum_{i+1}^{n} {}_s \delta_s \end{Bmatrix}, \quad T_n = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix},$$

avremo

$$UT_0^{-1} = \prod_1^n {}_i (T_i S_i T_{i-1}^{-1}).$$

Ora

$$T_i \text{ è inferiore a } \sum_{i+1}^{n} {}_s m_s,$$

$$S_i \text{ è inferiore a } m_i,$$

$$\text{det. } T_{i-1} \text{ è maggiore di } 1 - 2 \sum_i^n {}_s m_s,$$

quindi

$T_i S_i T_{i-1}^{-1}$ sarà inferiore a

$$2 m_i \sum_{i+1}^{n} m_s \left[\frac{1 + 2 \sum_i^n m_s}{1 - 2 \sum_i^n m_s} \right]^2 < 2 m_i m \left(\frac{1 + 2m}{1 - 2m} \right)^2$$

e per conseguenza UT_0^{-1} sarà inferiore a

$$\frac{\prod_1^n {}_i \left\{ 1 + 4 m_i m \left(\frac{1 + 2m}{1 - 2m} \right)^2 \right\} - 1}{2}.$$

5° Lemma. – *Se si ha il prodotto*

$$P = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$$

con $a_1 a_2 \cdots a_n$ *positive e*

$$a_1 < a < \frac{1}{2}, \quad \sum_1^n {}_i a_i \leqq l,$$

avremo

$$1 < P < e^{l(1+a)},$$

e se

$$l(1 + a) < 1,$$

avremo

$$1 < P < 1 + 2l(1 + a).$$

Prendendo i logaritmi si avrà

$$\log (1 + a_i) < a_i + a_i^2,$$

$$\sum_1^n {}_i \log (1 + a_i) < l + \sum_1^n {}_i a_i^2 < l(1 + a)$$

onde

$$1 < \mathrm{P} < e^{l(1+a)} = 1 + \frac{l(1+a)}{1} + \frac{l^2(1+a)^2}{1\cdot 2} + \frac{l^3(1+a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

e se $l(1+a) < 1$, avremo

$$1 < \mathrm{P} < 1 + l(1+a)\left(1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right) < 1 + 2\,l(1+a).$$

Ciò premesso passiamo a studiare la condizione di integrabilità di una sostituzione

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix},$$

di cui supporremo tutti gli elementi inferiori ad un dato valore m.

Dividiamo l'intervallo d'integrazione $(p\cdots q)$ negli n intervalli $h_1, h_2 \cdots h_n$ che potremo supporre tutti inferiori ad $h < 1/4m$. Poniamo $q - p = l > 0$.

Dal primo lemma risulta subito che tutti i possibili prodotti

$$\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}.$$

si conserveranno inferiori ad un certo valore M.

Infatti ciascuna sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}$$

sarà inferiore ad $mh_i < mh < 1/4$ e quindi

$$\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}$$

sarà inferiore a

$$\text{(A)} \qquad \frac{\prod_1^n{}_i (1 + 2\,mh_i) - 1}{2} < \frac{1}{2}\left(e^{2\,ml(1+2\,mh)} - 1\right) = \mathrm{M}.$$

Consideriamo ora due suddivisioni diverse $h_1, h_2 \cdots h_n$ $(h_i < h < 1/4)$ e $h'_1, h'_2 \cdots h'_n$ $(h'_i < h' < 1/4m)$ e formiamo una terza suddivisione $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_r$, tale che i punti di divisione ad essa corrispondenti siano quelli della prima e della seconda suddivisione.

Se nell'intervallo h_i sono racchiusi gli intervalli $\rho_{s+1}, \rho_{s+2} \cdots \rho_{s+t}$, e se denotiamo con $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i, \bar{\delta}_i$, valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ compresi fra il limite superiore ed inferiore di queste quantità in ρ_i, prendiamo a considerare le tre sostituzioni

$$\mathrm{S}_i = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}_i = \begin{Bmatrix} 1 + \sum_1^t{}_g \bar{\alpha}_{g+s}\,\rho_{g+s} & , & \sum_1^t{}_g \bar{\beta}_{g+s}\,\rho_{g+s} \\ \sum_1^t{}_g \bar{\gamma}_{g+s}\,\rho_{g+s} & , & 1 + \sum_1^t{}_g \bar{\delta}_{g+s}\,\rho_{g+s} \end{Bmatrix},$$

$$\mathrm{U}_i = \prod_1^t{}_g \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_{g+s}\,\rho_{g+s} & , & \bar{\beta}_{g+s}\,\rho_{g+s} \\ \bar{\gamma}_{g+s}\,\rho_{g+s} & , & 1 + \bar{\delta}_{g+s}\,\rho_{g+s} \end{Bmatrix}.$$

Per il lemma 4° avremo che $U_i T_i^{-1}$ è inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{\prod_1^t{}_g\left(1+4\,m^2\,\rho_{g+s}\,h_i\left(\frac{1+2\,mh_i}{1-2\,mh_i}\right)^2\right)-1\right\},$$

onde per il lemma 5° (supponendo $mh < 1/8$) $U_i T_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{-1+e^{4\,m^2\,h^2\left(\frac{1+2\,mh_i}{1-2\,mh_i}\right)^2\left[1+4\,m^2\,\rho h_i\left(\frac{1+2\,mh_i}{1-2\,mh_i}\right)^2\right]}\right\}$$

essendo ρ la maggiore di tutte le $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_r$.

Si vede ora che per $mh < 1/8$ l'esponente che comparisce nella espressione precedente risulta minore di 1, quindi avremo che $U_i T_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$4\,m^2\,h_i^2\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2\left\{1+4\,m^2\,\rho h_i\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2\right\}.$$

Se D_i è l'oscillazione della sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ nell'intervallo h_i, avremo che T_i e S_i differiranno fra loro meno di $D_i\,h_i$, onde $T_i S_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$D_i\,h_i\left(\frac{1+2\,mh_i}{1-2\,mh_i}\right) < D_i\,h_i\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2$$

e perciò

$$U_i T_i^{-1} T_i S_i^{-1} = U_i S_i^{-1}$$

sarà inferiore a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(D_i\,h_i+4\,m^2\,h_i^2)\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2+16\,m^4\,h_i^3\,\rho\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^4\\ &+4\,m^2\,h_i^3\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^4\left\{1+4\,m^2\,\rho h_i\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2\right\}D_i = D_i\,h_i\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2+\varepsilon_i\end{aligned}\right.$$

e avremo evidentemente

$$\lim \Sigma_i\,\varepsilon_i = 0$$

quando le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tenderanno a zero.

Per il lemma 3° avremo

$$\left(\prod_1^n{}_i U_i\right)\left(\prod_1^n{}_i S_i\right)^{-1}$$

inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{\prod_1^n{}_i\left[1+\left\{2\,D_i\,h_i\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2+2\,\varepsilon_i\right\}\prod_1^n{}_s\left(\frac{(1+2\,mh_s)^2}{1-2\,mh_s}\right)\right]-1\right\}.$$

Ora

$$\prod_1^n{}_s\frac{(1+2\,mh_s)^2}{1-2\,mh_s} < \prod_1^n{}_s\left(\frac{1+2\,mh_s}{1-2\,mh_s}\right)^2 < \left\{\prod_1^n{}_s\left(1+\frac{4\,mh_s}{1-2\,mh}\right)\right\}^2$$

e se $mh < 1/16$

$$(2)\qquad \prod_1^n{}_s\frac{(1+2\,mh_s)^2}{1-2\,mh} < e^{\frac{8\,ml}{1-2\,mh}\left(1+\frac{4\,mh}{1-2\,mh}\right)} < e^{\frac{2^{10}}{7^2}\,ml} = e^{C\,ml} = P,$$

onde

$$\left(\prod_1^n{}_i U_i\right)\left(\prod_1^n{}_i S_i\right)^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\frac{1}{2}(e^Q - 1)$$

ove

$$Q = \left(2\,\Sigma_i D_i h_i \left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2 + 2\,\Sigma_i \varepsilon_i\right) P \left\{1 + 2\,P\left(Dh\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right) + \varepsilon\right)\right\}$$

essendo ε la maggiore delle ε_i e D la maggiore delle D_i e supponendo che $\Sigma_i D_i h_i$ coll'impiccolire delle h_i divenga inferiore ad 1/4. Potremo porre

$$Q = 2\,P\Sigma_i D_i h_i + \Sigma_i \eta_i$$

ed evidentemente $\Sigma_i \eta_i$ tenderà a zero coll'impiccolire indefinitamente delle h_i. Ne segue che

$$\prod_1^n{}_i S_i \quad \text{e} \quad \prod_1^n{}_i U_i = \prod_1^r{}_g \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_g \rho_g\,, & \bar{\beta}_g \rho_g \\ \bar{\gamma}_g \rho_g & , 1 + \bar{\delta}_g \rho_g \end{Bmatrix}$$

differiranno fra loro meno di

$$\left(\frac{1+2\,M}{2}\right)(e^{2\,P\Sigma_i D_i h_i + \Sigma_i \eta_i} - 1)\,.$$

Analogamente si vede che

$$\prod_1^{n'}{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha'_i h'_i\,, & \beta'_i h'_i \\ \gamma'_i h'_i & , 1 + \delta'_i h'_i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \prod_1^r{}_g \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_g \rho_g\,, & \bar{\beta}_g \rho_g \\ \bar{\gamma}_g \rho_g & , 1 + \bar{\delta}_g \rho_g \end{Bmatrix}$$

(se mh' sarà inferiore a 1/16) differiranno fra loro meno di

$$\left(\frac{1+2\,M}{2}\right)(e^{2\,P\Sigma_i D'_i h'_i + \Sigma_i \eta'_i} - 1)$$

ove D′ è l'oscillazione di $\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix}$ entro h'_i e $\Sigma_i \eta'_i$ tende a zero colle h'_i. Dunque

$$\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{pmatrix}\,, \quad \prod_1^{n'}{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha'_i h'_i\,, & \beta'_i h'_i \\ \gamma'_i h_i & , 1 + \delta'_i h'_i \end{pmatrix}$$

differiranno fra loro meno di

$$\left(\frac{1+2\,M}{2}\right)(e^{2\,P\Sigma_i D_i h_i + \Sigma_i \eta_i} - 2 + e^{2\,P\Sigma_i D_i h'_i + \Sigma_i \eta'_i})\,,$$

Se supponiamo

$$\lim \Sigma_i D_i h_i = 0\,,$$

si potrà concludere, con identico ragionamento di quello che si segue pel caso della integrazione di una funzione, che esisterà un limite determinato e finito per

$$\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{pmatrix}.$$

Analogamente si vedrebbe che esiste pure il limite del prodotto

$$\prod_n^1{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{pmatrix}$$

quando le h_i tendono a zero, se si verifica la condizione

$$\lim \Sigma_i \mathrm{D}_i h_i = 0.$$

Possiamo quindi enunciare quanto segue.

Teorema I. – *Se* D_i *denota la oscillazione della sostituzione finita*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

nell'intervallo h_i *e se*

$$\lim \sum_1^n{}_i h_i \mathrm{D}_i = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_i h_i = q - p$$

per l'impiccolire indefinito di tutte le h_i, *esisteranno e saranno finiti l'integrale destro e l'integrale sinistro della sostituzione* $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *nell'intervallo totale* $(p \cdots q)$ *ed in una porzione qualunque di questo intervallo.*

Come conseguenza si deduce:

Nel caso in cui $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *sia sempre finita e continua o abbia un numero finito di punti di discontinuità essa sarà sempre integrabile tanto a destra quanto a sinistra.*

Perciò quando si tratterà di una sostituzione da integrarsi la supporremo sempre *finita e continua*, a meno che non si avverta esplicitamente il contrario.

3. Teorema II. – *Se* $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *è tale che* $\alpha + \delta = 0$ *le sostituzioni*

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} dx \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} dx \int_p^q$$

qualunque sia l'intervallo $(p \cdots q)$ *saranno a determinante eguale all'unità.*

Avremo infatti

$$\text{Det.} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{pmatrix} = 1 + (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i) h_i^2$$

supponendo di prendere i valori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \delta_i$ nello stesso punto dell'intervallo h_i.

Ora, poiché supponiamo $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ finita e continua

$$\lim \prod_1^n{}_i [1 + (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i) h_i^2] = 1$$

supponendo di fare impiccolire indefinitamente le h_i.

4. La proprietà associativa del prodotto di sostituzioni ci conduce immediatamente al teorema.

TEOREMA III. – *Se r è un punto intermedio fra p e q,*

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \int_r^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \cdot \int_p^r \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx .$$

Analogamente a quanto si fa per la integrazione delle funzioni, si può estendere il concetto di integrazione di una sostituzione ad un intervallo negativo. Se $q > p$, supposto diviso l'intervallo $(p \cdots q)$ a cominciare da p negli intervalli $h_1 , h_2 \cdots h_n$ si intenderà per $\int_q^p \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx$ il

$$\lim \prod_n^1{}_i \begin{pmatrix} 1 - \alpha_i h_i , & - \beta_i h_i \\ - \gamma_i h_i & , 1 - \delta_i h_i \end{pmatrix}$$

per le $h_1 , h_2 \cdots h_n$ tendenti a zero. Se $\alpha_i , \beta_i , \gamma_i , \delta_i$ corrispondono allo stesso valore di x e se $\alpha_i + \delta_i = 0$, e $\Delta_i = \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$, avremo

$$\prod_n^1{}_i \begin{pmatrix} 1 - \alpha_i h_i , & - \beta_i h_i \\ - \gamma^i h^i & , 1 - \delta_i h_i \end{pmatrix} = \left[\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \alpha_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} , & \dfrac{\beta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} \\ \dfrac{\gamma_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} , & \dfrac{1 + \delta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} \end{pmatrix} \right]^{-1} .$$

Ora

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1 + \alpha_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} , & \dfrac{\beta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} \\ \dfrac{\gamma_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} , & \dfrac{1 + \delta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} \end{pmatrix}$$

differisce da $\begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i , & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{pmatrix}$ per infinitesimi d'ordine superiore ad h_i, quindi per il Lemma 3° dell'Art. 2°, avremo

$$\lim \prod_n^1{}_i \begin{pmatrix} 1 - \alpha_i h_i , & - \beta_i h_i \\ - \gamma_i h_i & , 1 - \delta_i h_i \end{pmatrix} = \left\{ \lim \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i , & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{pmatrix} \right\}^{-1} .$$

In tal modo si ottiene la formula

$$(3) \qquad \int_q^p \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \right\}^{-1} = \begin{pmatrix} - \alpha , - \beta \\ - \gamma , - \delta \end{pmatrix} dx \int_p^q$$

e la formula del teorema precedente viene così a valere anche se r non è intermedio fra p e q.

5. Sia $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ $(\alpha + \delta = 0)$ una sostituzione finita e continua nell'intervallo $(p \cdots q)$ e sia x un punto intermedio fra p e q. Se consideriamo le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix} = \int_x^p \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx \quad , \quad \begin{pmatrix}a' , b' \\ c' , d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx \int_x^p$$

esse potranno considerarsi come sostituzioni funzioni di x.

Per esse vale il teorema seguente:

Teorema IV. – *Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione* (som. $= 0$) *sono sostituzioni continue* (det. 1) *del loro limite superiore; la derivata sinistra dell'integrale sinistro e la derivata destra dell'integrale destro rispetto al limite superiore sono eguali alla sostituzione che si integra.*

1° Che gli integrali destro e sinistro abbiano il det. eguale ad 1 risulta dal teorema secondo.

2° Per dimostrare che gli integrali sono continui, supponiamo che la sostituzione da integrarsi sia $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ (i cui elementi supporremo inferiori a m).

Posto

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix} = \int_p^x \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix},$$

avremo

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_{x+\Delta x} \begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_x^{-1} = \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx .$$

Ora per la formula (A) dell'art. 2°, avremo che

$$\int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx$$

sarà inferiore a $1/2\ (e^{2\, m \cdot \Delta x\, (1 + 2\, m \cdot \Delta x)} - 1)$.

Ciò dimostra la continuità di $\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}$.

Analogamente si vedrebbe verificata la stessa proprietà per l'integrale destro.

È evidente che per dimostrare la continuità degli integrali non è necessario supporre la continuità nella sostituzione da integrarsi.

3° Dalla formula (1) dell'Art. 2°, posto

$$S_i = \begin{pmatrix}1 + \alpha_x \cdot \Delta x , & \beta_x \cdot \Delta x \\ \gamma_x \cdot \Delta x & , 1 + \delta_x \cdot \Delta x\end{pmatrix} \quad , \quad U_i = \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx$$

e chiamando D l'oscillazione di $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ nell'intervallo Δx, si deduce che $U_i S_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$(D \cdot \Delta x + 4 m^2 \cdot \Delta x^2)\left(\frac{1 + 2 m \cdot \Delta x}{1 - 2 m \cdot \Delta x}\right)^2 + 4 m^2 \cdot \Delta x^3 \left(\frac{1 + 2 m \cdot \Delta x}{1 - 2 m \Delta x}\right)^2 D = \varepsilon$$

supponendo $m \cdot \Delta x > 1/4$. Quindi U_i e S_i differiranno fra loro meno di

$$(1 + 2 m \Delta x)\, \varepsilon = \eta .$$

Potremo dunque porre (essendo $\theta_1 , \theta_2 , \theta_3 , \theta_4$ numeri compresi fra $+1$ e -1)

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_{x+\Delta x} \begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_x^{-1} = \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}1 + \alpha_x \cdot \Delta x + \eta\theta_1 , & \beta_x \cdot \Delta x + \eta\theta_2 \\ \gamma_x \cdot \Delta x + \eta\theta_3 & , 1 + \delta_x \Delta x + \eta\theta_4\end{pmatrix}.$$

Ora per Δx tendente a zero

$$\lim \frac{\eta}{\Delta x} = 0,$$

quindi

$$\lim \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\alpha_x \cdot \Delta x + \eta\theta_1}{\Delta x} & , & \dfrac{\beta_x \cdot \Delta x + \eta\theta_2}{\Delta x} \\ \dfrac{\gamma_x \cdot \Delta x + \eta\theta_3}{\Delta x} & , & \dfrac{\delta_x \cdot \Delta x + \eta\theta_4}{\Delta x} \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix}\alpha_x , \beta_x \\ \gamma_x , \delta_x\end{pmatrix}$$

come dovevasi dimostrare.

Analogamente si opererebbe per la derivata destra dell'integrale destro.

TEOREMA V. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché una sostituzione continua* $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ *sia derivata di una sostituzione* (det. 1) *è che sia* $\alpha + \delta = 0$.

(Vedasi il teorema IV del § 1).

TEOREMA VI. – *Abbiasi* $\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}$ (det. 1) *e*

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix},$$

si avrà

$$\int_p^q \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_q \begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_p^{-1}$$

supponendo $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ *continua*.

Infatti, posto

$$\int_p^{x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}A , B \\ C , D\end{pmatrix},$$

avremo

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}A , B \\ C , D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}$$

quindi, per il teorema XIII del § precedente, sarà

$$\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x S \tag{4}$$

essendo S una sostituzione costante. Segue che

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_q \cdot S;$$

ma per $x = p$ la (4) diviene

$$\begin{pmatrix} 1 , 0 \\ 0 , 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_p \cdot S,$$

quindi

$$S = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_p^{-1},$$

onde

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_p^{-1}.$$

6. TEOREMA VII. - *Se* $\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}$ *è costante e* $\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$ (som. $= 0$) *è funzione di x, si avrà*

$$\int_p^q \left\{ \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} \right\} dx = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix},$$

vale a dire l'integrale della trasformata di una sostituzione è eguale alla trasformata dell'integrale, se la sostituzione trasformatrice è costante.

Infatti, pel teorema VIII del § 1, posto

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix},$$

si avrà

$$\frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix},$$

quindi

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} \right\}_q \left\{ \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} \right\}_p^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}_p^{-1} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix},$$

come si doveva dimostrare.

Teorema VIII. – *Abbiansi le due sostituzioni variabili*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} (\text{som.} = 0) \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} (\det. = 1).$$

Avremo

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_q^{-1} \left[\int_p^q \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} + \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} dx \right] \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_p ,$$

vale a dire, se

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi, \chi \\ \rho, \theta \end{pmatrix},$$

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_q^{-1} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a+\pi, b+\chi \\ c+\rho, d+\theta \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_p .$$

Poniamo

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_x^{-1} \left\{ \int_p^x \begin{pmatrix} a+\pi, b+\chi \\ c+\rho, d+\theta \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_p .$$

Pel teorema X, § 1, avremo

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} a+\pi, b+\chi \\ c+\rho, d+\theta \end{pmatrix} - \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}.$$

Se facciamo poi $x = p$, si avrà

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix};$$

il teorema è quindi dimostrato.

7. La regola che daremo in questo articolo presenta analogia con quella della *integrazione per parti*.

Abbiasi da calcolare

$$\int_p^x \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} dx = \int_p^x \begin{pmatrix} \alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1 \\ \gamma+\gamma_1, \delta+\delta_1 \end{pmatrix} dx .$$

Basterà eseguire

$$\int_p^x \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix},$$

poi

$$\int_p^x \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$$

e avremo

$$\int_p^x \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 , b_1 \\ c_1 , d_1 \end{pmatrix}.$$

Per dimostrare la regola precedente osserviamo che si ha (Teorema IX, § 1)

$$d \left\{ \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 , b_1 \\ c_1 , d_1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ d \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \left\{ d \begin{pmatrix} a_1 , b_1 \\ c_1 , d_1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} \alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1 \end{pmatrix} dx .$$

8. Fino ad ora abbiamo considerato gli integrali come funzioni dei loro limiti superiori.

Riguardiamo invece

$$\int_x^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \int_x^q \quad , \quad (\alpha + \delta = 0)$$

come funzioni del loro limite inferiore x.

Si otterrà il teorema seguente:

TEOREMA IX. – *Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione* (som. = 0) *sono funzioni continue del loro limite inferiore; la derivata destra dell'integrale sinistro e la derivata sinistra dell'integrale destro rispetto al limite inferiore sono eguali alla sostituzione che si ottiene cambiando di segno tutti gli elementi della sostituzione integrata.*

1° La continuità si dimostra del tutto similmente alla analoga proprietà contenuta nel teorema IV.

2° Sia $\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}$ la sostituzione da integrarsi. Si ponga

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x = \int_x^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx .$$

Avremo

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} = \int_{x+\Delta x}^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx ,$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx$$

e

$$\int_{x+\Delta x}^x \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x^{-1} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} .$$

Ora si vede facilmente che

$$\int_{x+\Delta x}^{x} \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\cdot\Delta x + \eta_1, & -\beta\cdot\Delta x + \eta_2 \\ -\gamma\cdot\Delta x + \eta_3, & 1 - \delta\cdot\Delta x + \eta_4\end{pmatrix},$$

con

$$\lim \frac{\eta_i}{\Delta x} = 0 \quad \text{per} \quad \Delta x = 0,$$

quindi

$$\begin{pmatrix}-\alpha, -\beta \\ -\gamma, -\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix} \frac{d}{dx}.$$

Analogamente si ha

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \int_x^q\right\} = \begin{pmatrix}-\alpha, -\beta \\ -\gamma, -\delta\end{pmatrix};$$

come dovevasi dimostrare

Del resto il teorema poteva dedursi direttamente dalla formula (3).

9. Abbiasi una sostituzione continua $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (som. o). Tutte le sostituzioni che hanno per derivata sinistra $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ potranno porsi sotto la forma

$$S = \int_p^x \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}$$

essendo $\begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}$ *una sostituzione costante arbitraria* (det. 1). La sostituzione S la chiameremo *l'integrale indefinito sinistro* o semplicemente *l'integrale sinistro di* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$.

Analogamente tutte le sostituzioni la cui derivata destra è $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ potranno porsi so to la forma

$$S_1 = \begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix} \cdot \left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \int_p^x\right\}$$

e S_1 si chiamerà *l'integrale indefinito destro* o *l'integrale destro di* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$.

10. Teorema X. – *Se si ha* $y = \varphi(x)$, $(\alpha + \delta = 0)$, *avremo*

$$\int_{y}^{y_1} \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dy = \int_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix}\alpha\varphi'(x), & \beta\varphi'(x) \\ \gamma\varphi'(x), & \delta\varphi'(x)\end{pmatrix} dx,$$

in cui

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1).$$

Infatti, se $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. = 1) ha per derivata a sinistra, rispetto ad y, $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$, avremo (Art. 9°, § 1°)

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\varphi'(x), & \beta\varphi'(x) \\ \gamma\varphi'(x), & \delta\varphi'(x) \end{pmatrix}$$

il che dimostra il teorema.

TEOREMA XI. - *Se tutti gli elementi della sostituzione*

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \quad (\alpha + \delta = 0)$$

diventano infiniti per $x = x_1$ soltanto, e di ordine inferiore ad un numero minore di 1, si avrà che

$$\lim_{x = x_1} \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx$$

esisterà e sarà finito.

Supponiamo infatti che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, divengano per $x = x_1$ infiniti di ordine non superiore a $1 - \varepsilon$. Posto

$$\alpha = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\alpha_1,$$
$$\beta = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\beta_1,$$
$$\gamma = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\gamma_1,$$
$$\delta = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\delta_1,$$

avremo che $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ saranno sempre finiti per tutti i valori di x, anche per $x = x_1$.

Essi saranno inoltre continui e si avrà

$$\alpha_1 + \delta_1 = 0.$$

Avremo

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\alpha_1, & (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\beta_1 \\ (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\gamma_1, & (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\delta_1 \end{pmatrix} dx.$$

Poniamo

$$x - x_1 = (\varepsilon z)^{1/\varepsilon},$$

si avrà

$$z = \frac{1}{\varepsilon}(x - x_1)^{\varepsilon},$$

$$\frac{dx}{dz} = (x - x_1)^{1-\varepsilon},$$

$$z_0 = \frac{1}{\varepsilon}(x_0 - x_1)^{\varepsilon};$$

quindi pel teorema precedente

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \int_{z_0}^{z} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} dz.$$

Ma al limite

$$\lim_{z=0} \int_{z_0}^{z} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} dz = \int_{z_0}^{0} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} dz$$

sostituzione determinata e finita. Ne segue che esisterà il limite determinato e finito di

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \qquad \text{per} \quad x = x_1$$

come si voleva dimostrare

Questo limite si chiamerà *l'integrale fra* x_0 e x_1 *di* $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ e si scriverà col simbolo

$$\int_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx.$$

11. Diamo finalmente un teorema di cui vedremo in seguito le conseguenze (Parte 2ª).

TEOREMA XII. – *Se si hanno le due sostituzioni*

$$\begin{Bmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{Bmatrix} (\text{som.} = 0) \quad , \quad \begin{Bmatrix} \bar\alpha, \bar\beta \\ \bar\gamma, \bar\delta \end{Bmatrix} (\text{som.} = 0),$$

le quali differiscono fra loro meno di ε; *e se* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, *sono inferiori ad* m, *avremo che*

$$\int_{p}^{q} \begin{Bmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{Bmatrix} dx \quad \text{e} \quad \int_{p}^{q} \begin{Bmatrix} \bar\alpha, \bar\beta \\ \bar\gamma, \bar\delta \end{Bmatrix} dx$$

differiranno fra loro meno di

$$\frac{1}{2} e^{ml} \{ e^{2\varepsilon l P} - 1 \}$$

con $P = e^{Cml}$ *e* C *è un numero indipendente dalle sostituzioni date.*

Diviso $(p \cdots q)$, $(q - p = l)$, negli intervalli $h_1, h_2 \cdots h_n$, avremo che

$$\begin{Bmatrix} 1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 + \bar\alpha_i h_i, & \bar\beta_i h_i \\ \bar\gamma_i h_i & 1 + \bar\delta_i h_i \end{Bmatrix}^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\varepsilon h_i \left(\frac{1 + 2mh_i}{1 - 2mh_i} \right)$$

onde per il Lemma 3°, avremo che

$$(5) \qquad \prod_{1}^{n}{}_{i} \begin{Bmatrix} 1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{Bmatrix} \cdot \left[\prod_{1}^{n}{}_{i} \begin{Bmatrix} 1 + \bar\alpha_i h_i, & \bar\beta_i h_i \\ \bar\gamma_i h_i & , 1 + \bar\delta_i h_i \end{Bmatrix} \right]^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\prod_1^n {}_i \left\{ 1 + 2\,\varepsilon h_i \left(\frac{1+2\,mh_i}{1-2\,mh_i}\right) \prod_1^n {}_i \left(\frac{(1+2\,mh_i)^2}{1-2\,mh_i}\right)\right\} - 1\right]$$

supposte le h_i sufficientemente piccole.

Ma per la formula (2) Art. 2°

$$\prod_1^n {}_i \frac{(1+2\,mh_i)^2}{1-2\,mh_i} < \mathrm{P} = e_i^{\mathrm{C}ml}$$

quindi μ sarà inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{ e^{2\varepsilon l\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)\mathrm{P}\alpha} - 1 \right\},$$

ove

$$\alpha = 1 + 2\,\varepsilon h \left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)\mathrm{P},$$

essendo h la maggiore delle h_i. Ne segue, poiché ciascuno dei due prodotti (5) è inferiore a $(e^{2\,ml\,(1+2\,mh)} - 1)/2$, che

$$\prod_1^n {}_i \begin{Bmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \prod_1^n {}_i \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_i h_i\,, & \bar{\beta}_i h_i \\ \bar{\gamma}_i h_i & , 1 + \bar{\delta}_i h_i \end{Bmatrix}$$

differiranno meno di

$$\frac{1}{2}\, e^{2\,ml\,(1+2\,mh)} \left\{ e^{2\varepsilon l\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)\mathrm{P}\alpha} - 1 \right\}.$$

Al limite coll'impiccolire indefinito delle h_i risulta che

$$\int_p^q \begin{Bmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{Bmatrix} dx \quad \text{e} \quad \int_p^q \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}\,, \bar{\beta} \\ \bar{\gamma}\,, \bar{\delta} \end{Bmatrix} dx$$

differiranno fra loro meno di

$$\frac{1}{2}\, e^{2\,ml} \left\{ e^{2\,\varepsilon l\mathrm{P}} - 1 \right\}.$$

§ 3. – Sulle sostituzioni a più variabili. – Differenziali totali. – Derivate successive di una sostituzione.

1. Abbiasi una sostituzione i cui elementi sono funzioni di più variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$, diremo che *la sostituzione è funzione di quelle variabili*. Se gli elementi sono continui separatamente rispetto a ciascuna variabile, chiameremo *la sostituzione continua separatamente* rispetto alle diverse variabili. Finalmente, se tutti gli elementi possiederanno la continuità assoluta rispetto alle n variabili, esprimeremo questa proprietà dicendo che *la sostituzione è continua assolutamente*.

Non enuncio le proprietà delle sostituzioni continue separatamente rispetto alle variabili e continue assolutamente per la loro analogia colle proprietà simili delle funzioni.

2. Sia $\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$ (det. 1) una sostituzione funzione di $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e supponiamo che gli elementi ammettano le derivate parziali determinate e finite rispetto a tutte le variabili.

Dati alle variabili gli accrescimenti infinitesimi $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$, consideriamo la sostituzione

$$\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}_{x_1+dx_1, x_2+dx_2, \cdots, x_n+dx_n} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}^{-1}_{x_1, x_2 \cdots x_n}.$$

Trascurando infinitesimi d'ordine superiore a $dx_1, \cdots, dx_n$, avremo che il prodotto precedente potrà scriversi sotto una delle forme seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \begin{pmatrix} 1 + D dA - C dB , & A dB - B dA \\ D dC - C dD , & 1 + A dD - B dC \end{pmatrix}$$

$$\text{(II)} \quad = \begin{Bmatrix} 1 + \sum_1^n {}_i \left(D \frac{dA}{dx_i} - C \frac{dB}{dx_i}\right) dx_i , & \sum_1^n {}_i \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dA}{dx_i}\right) dx_i \\ \sum_1^n {}_i \left(D \frac{dC}{dx_i} - C \frac{dD}{dx_i}\right) dx_i , & 1 + \sum_1^n {}_i \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dC}{dx_i}\right) dx_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{(III)} \quad = \prod_1^n {}_i \begin{Bmatrix} 1 + \left(D \frac{dA}{dx_i} - C \frac{dB}{dx_i}\right) dx_i , & \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dA}{dx_i}\right) dx_i \\ \left(D \frac{dC}{dx_i} - C \frac{dD}{dx_i}\right) dx_i , & 1 + \left(A \frac{dD}{dx_i} - B \frac{dC}{dx_i}\right) dx_i \end{Bmatrix}.$$

L'ultima di queste eguaglianze è vera soltanto a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Le tre precedenti sostituzioni le denoteremo col simbolo

$$d \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$$

e le chiameremo il *differenziale totale sinistro di* $\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$.

La sostituzione

$$\text{(IV)} \quad \begin{Bmatrix} \left(D \frac{dA}{dx_i} - C \frac{dB}{dx_i}\right) , & \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dA}{dx_i}\right) \\ \left(D \frac{dC}{dx_i} - C \frac{dD}{dx_i}\right) , & \left(A \frac{dD}{dx_i} - B \frac{dC}{dx_i}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dA}{dx_i} , & \frac{dB}{dx_i} \\ \frac{dC}{dx_i} , & \frac{dD}{dx_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A , B \\ C , D \end{Bmatrix}^{-1}$$

la chiameremo la *derivata parziale sinistra di* $\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$ *rispetto ad* x_i *e la denoteremo col simbolo*

$$\frac{d}{dx_i} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}.$$

Finalmente la sostituzione

$$\text{(V)}\qquad \left\{\begin{matrix} 1+\left(D\dfrac{dA}{dx_i}-C\dfrac{dB}{dx_i}\right)dx_i & , & \left(A\dfrac{dB}{dx_i}-B\dfrac{dA}{dx_i}\right)dx_i \\ \left(D\dfrac{dC}{dx_i}-C\dfrac{dB}{dx_i}\right)dx_i & , & 1+\left(A\dfrac{dD}{dx_i}-B\dfrac{dC}{dx_i}\right)dx_i \end{matrix}\right\}$$

si chiamerà il *differenziale parziale sinistro rispetto ad* x_i e si indicherà col simbolo

$$\text{(VI)}\qquad d_{x_i}\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}=\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}dx_i\,.$$

Avremo la formula fondamentale

$$\text{(VII)}\qquad d\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}=\prod_{1}^{n}{}_i\,\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}dx_i\,.$$

Analoghe definizioni e formule pure analoghe si avrebbero per i *differenziali destri*.

3. Supponiamo ora che gli elementi della sostituzione

$$\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}\ (\text{det. } 1)$$

oltre alle derivate prime posseggano ancora le derivate seconde. Si formi il differenziale primo sinistro della sostituzione, avremo

$$d\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+DdA-CdB\,, & AdB-BdA \\ DdC-CdD & ,\ 1+AdD-BdC\end{pmatrix}.$$

Formiamo ora il differenziale sinistro di questo differenziale primo. Se si trascureranno infinitesimi d'ordine superiore al secondo, otterremo

$$\begin{pmatrix} 1+d(DdA-CdB)\,, & d(AdB-BdA) \\ d(DdC-CdD) & ,\ 1+d(AdD-BdC)\end{pmatrix}.$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti se si fosse determinato (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al secondo) il differenziale destro del differenziale primo sinistro; avremo quindi *un solo differenziale secondo sinistro*, come pure si potrebbe analogamente ottenere *un solo differenziale secondo destro*.

Si scriverà

$$d^2\begin{pmatrix} A\,,\,B \\ C\,,\,D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+d(DdA-CdB)\,, & d(AdB-BdA) \\ d(DdC-CdD) & ,\ 1+d(AdD-BdC)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1+Dd^2A-Cd^2B+dDdA-dCdB\,, & Ad^2B-Bd^2A \\ Dd^2C-Cd^2D & ,\ 1+Ad^2D-Bd^2C+dAdD-dBdC\end{pmatrix}.$$

Ora

$$AD-BC=1.$$

Differenziando si ottiene

$$\mathrm{A}d\mathrm{D} + \mathrm{D}d\mathrm{A} - \mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B} = 0\,;$$

$$2\,(d\mathrm{A}\,d\mathrm{D} - d\mathrm{B}\,d\mathrm{C}) = \mathrm{B}d^2\mathrm{C} + \mathrm{C}d^2\mathrm{B} - \mathrm{A}d^2\mathrm{D} - \mathrm{D}d^2\mathrm{A}\,;$$

$$d\mathrm{A}\,d\mathrm{D} - d\mathrm{B}\,d\mathrm{C} + \mathrm{D}d^2\mathrm{A} - \mathrm{C}d^2\mathrm{B} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{B}d^2\mathrm{C} - \mathrm{A}d^2\mathrm{D} - \mathrm{C}d^2\mathrm{B} + \mathrm{D}d^2\mathrm{A})\,;$$

$$d\mathrm{A}\,d\mathrm{D} - d\mathrm{B}\,d\mathrm{C} + \mathrm{A}d^2\mathrm{D} - \mathrm{B}d^2\mathrm{C} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{C}d^2\mathrm{B} - \mathrm{D}d^2\mathrm{A} + \mathrm{A}d^2\mathrm{D} - \mathrm{B}d^2\mathrm{C})\,;$$

quindi avremo ancora

$$d^2\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}\,(\mathrm{B}d^2\mathrm{C} - \mathrm{A}d^2\mathrm{D} - \mathrm{C}d^2\mathrm{B} + \mathrm{D}d^2\mathrm{A})\,, & (\mathrm{A}d^2\mathrm{B} - \mathrm{B}d^2\mathrm{A}) \\ (\mathrm{D}d^2\mathrm{C} - \mathrm{C}d^2\mathrm{D}) & ,\ 1 + \frac{1}{2}\,(\mathrm{C}d^2\mathrm{B} - \mathrm{D}d^2\mathrm{A} - \mathrm{B}d^2\mathrm{C} + \mathrm{A}d^2\mathrm{D})\end{matrix}\right\}.$$

4. Supponiamo $\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix}$ funzione della sola variabile x, avremo

$$d^2\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\mathrm{DA}'' - \mathrm{CB}'' + \mathrm{D}'\mathrm{A}' - \mathrm{C}'\mathrm{B}')\,dx^2\,, & (\mathrm{AB}'' - \mathrm{BA}'')\,dx^2 \\ (\mathrm{DC}'' - \mathrm{CD}'')\,dx^2 & ,\ 1 + (\mathrm{AD}'' - \mathrm{BC}'' + \mathrm{A}'\mathrm{D}' - \mathrm{B}'\mathrm{C}')\,dx^2\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}\,(\mathrm{BC}'' - \mathrm{AD}'' - \mathrm{CB}'' + \mathrm{DA}'')\,dx^2\,, & (\mathrm{AB}'' - \mathrm{BA}'')\,dx^2 \\ (\mathrm{DC}'' - \mathrm{CD}'')\,dx^2 & ,\ 1 + \frac{1}{2}\,(\mathrm{CB}'' - \mathrm{DA}'' - \mathrm{BC}'' + \mathrm{AD}'')\,dx^2\end{matrix}\right\}.$$

Porremo

$$\frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\,(\mathrm{BC}'' - \mathrm{AD}'' - \mathrm{CB}'' + \mathrm{DA}'')\,, & (\mathrm{AB}'' - \mathrm{BA}'') \\ (\mathrm{DC}'' - \mathrm{CD}'') & ,\ \frac{1}{2}\,(\mathrm{CB}'' - \mathrm{DA}'' - \mathrm{BC}'' + \mathrm{AD}'')\end{matrix}\right\}$$

e chiameremo questa sostituzione la *derivata seconda a sinistra* di $\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix}$ rispetto ad x.

5. Supponiamo ora $\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix}$ funzione di n variabili $x_1\,, x_2 \cdots x_n$. Poniamo

$$\frac{d^2}{dx_c^2}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\,,\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\,,\ \mathrm{D}\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\left(\mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{C}}{dx_c^2} - \mathrm{C}\frac{d^2\mathrm{B}}{dx_c^2} + \mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{A}}{dx_c^2} - \mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{D}}{dx_c^2}\right)\,, & \left(\mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{B}}{dx_c^2} - \mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{A}}{dx_c^2}\right) \\ \left(\mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{C}}{dx_c^2} - \mathrm{C}\frac{d^2\mathrm{D}}{dx_c^2}\right) & ,\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{C}\frac{d^2\mathrm{B}}{dx_c^2} - \mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{C}}{dx_c^2} + \mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{D}}{dx_c^2} - \mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{A}}{dx_c^2}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{matrix} \mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{A}}{dx_c^2} - \mathrm{C}\frac{d^2\mathrm{B}}{dx_c^2} + \frac{d\mathrm{D}}{dx_c}\frac{d\mathrm{A}}{dx_c} - \frac{d\mathrm{C}}{dx_c}\frac{d\mathrm{B}}{dx_c}\,, & \mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{B}}{dx_c^2} - \mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{A}}{dx_c^2} \\ \mathrm{D}\frac{d^2\mathrm{C}}{dx_c^2} - \mathrm{C}\frac{d^2\mathrm{D}}{dx_c^2} & ,\ \mathrm{A}\frac{d^2\mathrm{D}}{dx_c^2} - \mathrm{B}\frac{d^2\mathrm{C}}{dx_c^2} + \frac{d\mathrm{A}}{dx_c}\frac{d\mathrm{D}}{dx_c} - \frac{d\mathrm{B}}{dx_c}\frac{d\mathrm{C}}{dx_c}\end{matrix}\right\};$$

$$\frac{d^2}{d\,(x_r\,x_s)} = \frac{d^2}{d\,(x_s\,x_r)}$$

$$= \left(\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(B\frac{d^2 C}{dx_r\,dx_s} - C\frac{d^2 B}{dx_r\,dx_s} + D\frac{d^2 A}{dx_r\,dx_s} - A\frac{d^2 D}{dx_r\,dx_s}\right), & \left(A\frac{d^2 B}{dx_r\,dx_s} - B\frac{d^2 A}{dx_r\,dx_s}\right) \\ \left(D\frac{d^2 C}{dx_r\,dx_s} - C\frac{d^2 D}{dx_r\,dx_s}\right) & , \frac{1}{2}\left(C\frac{d^2 B}{dx_r\,dx_s} - B\frac{d^2 C}{dx_r\,dx_s} + A\frac{d^2 D}{dx_r\,dx_s} - D\frac{d^2 A}{dx_r\,dx_s}\right) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ll} D\frac{d^2 A}{dx_r\,dx_s} - C\frac{d^2 B}{dx_r\,dx_s} + \frac{1}{2}\left(\frac{dD}{dx_r}\frac{dA}{dx_s} + \frac{dD}{dx_s}\frac{dA}{dx_r} - \frac{dC}{dx_r}\frac{dB}{dx_s} - \frac{dC}{dx_s}\frac{dB}{dx_r}\right), & A\frac{d^2 B}{dx_s\,dx_r} - B\frac{d^2 A}{dx_r\,dx_s} \\ D\frac{d^2 C}{dx_r\,dx_s} - C\frac{d^2 D}{dx_r\,dx_s}, & A\frac{d^2 D}{dx_r\,dx_s} - B\frac{d^2 C}{dx_r\,dx_s} + \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dx_r}\frac{dD}{dx_s} - \frac{dB}{dx_r}\frac{dC}{dx_s} + \frac{dA}{dx_s}\frac{dD}{dx_r} - \frac{dB}{dx_s}\frac{dC}{dx_r}\right) \end{array}\right).$$

Adottiamo inoltre i simboli

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx_i^2 \quad \text{e} \quad 2\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx_i\,dx_s$$

per denotare le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha dx_i^2, & \beta dx_i^2 \\ \delta dx_i^2 & , 1 + \delta dx_i^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 + 2\,\alpha dx_i\,dx_s, & 2\,\beta dx_i\,dx_s \\ 2\,\gamma dx_i\,dx_s & , 1 + 2\,\delta dx_i\,dx_s \end{pmatrix}.$$

Potremo scrivere

$$(1) \qquad d^2\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \prod_{1}^{n}{}_c \frac{d^2}{dx_c^2}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_c^2 \cdot \prod_{i,s} 2\,\frac{d^2}{d\,(x_i\,x_s)}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_i\,dx_s\,.$$

La formula (1) ci dà l'espressione generale del differenziale secondo della sostituzione $\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix}$.

Ora

$$(2) \qquad \frac{d^2}{dx_i^2}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_i^2 = d_{x_i}^2\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix},$$

cioè *il primo membro non è altro che il differenziale secondo della sostituzione quando si suppone variabile la sola* x_i *e le rimanenti* x_s *si suppongano costanti.*

Consideriamo invece

$$\frac{d^2}{d\,(x_i\,x_s)}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_i\,dx_s\,;$$

è facile vedere che *essa non è eguale in generale al differenziale che si ottiene differenziando successivamente la sostituzione rispetto alle due variabili* x_i e x_s.

Infatti si avrà

$$d_{x_s} \cdot d_{x_i}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ll} 1 + \frac{d}{dx_s}\left(D\frac{dA}{dx_i} - C\frac{dB}{dx_i}\right) dx_i\,dx_s, & \frac{d}{dx_s}\left(A\frac{dB}{dx_i} - B\frac{dA}{dx_i}\right) dx_i\,dx_s \\ \frac{d}{dx_s}\left(D\frac{dC}{dx_i} - C\frac{dD}{dx_i}\right) dx_i\,dx_s & , 1 + \frac{d}{dx_s}\left(A\frac{dD}{dx_i} - B\frac{dC}{dx_i}\right) dx_i\,dx_s \end{array}\right),$$

$$d_{x_i} \cdot d_{x_s}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ll} 1 + \frac{d}{dx_i}\left(D\frac{dA}{dx_s} - C\frac{dB}{dx_s}\right) dx_i\,dx_s, & \frac{d}{dx_i}\left(A\frac{dB}{dx_s} - B\frac{dA}{dx_s}\right) dx_i\,dx_s \\ \frac{d}{dx_i}\left(D\frac{dC}{dx_s} - C\frac{dD}{dx_s}\right) dx_i\,dx_s & , 1 + \frac{d}{dx_i}\left(A\frac{dD}{dx_s} - B\frac{dC}{dx_s}\right) dx_i\,dx_s \end{array}\right)$$

Porremo

$$\frac{d}{dx_s}\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d}{dx_s}\left(D\dfrac{dA}{dx_i}-C\dfrac{dB}{dx_i}\right) & , & \dfrac{d}{dx_s}\left(A\dfrac{dB}{dx_i}-B\dfrac{dA}{dx_i}\right)\\ \dfrac{d}{dx_s}\left(D\dfrac{dC}{dx_i}-C\dfrac{dD}{dx_i}\right) & , & \dfrac{d}{dx_s}\left(A\dfrac{dD}{dx_i}-B\dfrac{dC}{dx_i}\right)\end{matrix}\right\},$$

$$\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d}{dx_i}\left(D\dfrac{dA}{dx_s}-C\dfrac{dB}{dx_s}\right) & , & \dfrac{d}{dx_i}\left(A\dfrac{dB}{dx_s}-B\dfrac{dA}{dx_s}\right)\\ \dfrac{d}{dx_i}\left(D\dfrac{dC}{dx_s}-C\dfrac{dD}{dx_s}\right) & , & \dfrac{d}{dx_i}\left(A\dfrac{dD}{dx_s}-B\dfrac{dC}{dx_s}\right)\end{matrix}\right\}$$

e avremo in generale che

$$\frac{d}{dx_s}\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}\neq\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}\neq\frac{d^2}{d(x_i\,x_s)}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\frac{d^2}{d(x_s\,x_i)}\begin{pmatrix}A\,,B\\C.,D\end{pmatrix}.$$

Nel nostro caso quindi non vale la *legge di permutabilità* nella derivazione, né la legge di formazione del differenziale secondo analoga a quella per le funzioni.

6. È utile per il seguito vedere le relazioni che passano tra le diverse derivate seconde di $\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}$ rispetto a x_i e x_s.

Poniamo

$$\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_i\,,\beta_i\\\gamma_i\,,\delta_i\end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_s\,,\beta_s\\\gamma_s\,,\delta_s\end{pmatrix}.$$

Avremo

$$(3)\qquad \frac{d}{dx_s}\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_i}{dx_s}\,, & \dfrac{d\beta_i}{dx_s}\\ \dfrac{d\gamma_i}{dx_s}\,, & \dfrac{d\delta_i}{dx_s}\end{matrix}\right\},$$

$$(4)\qquad \frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_s}{dx_i}\,, & \dfrac{d\beta_s}{dx_i}\\ \dfrac{d\gamma_s}{dx_i}\,, & \dfrac{d\delta_s}{dx_i}\end{matrix}\right\},$$

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_i}{dx_s}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dD}{dx_i}\dfrac{dA}{dx_s}-\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}+\dfrac{dC}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}-\dfrac{dD}{dx_s}\dfrac{dA}{dx_i}\right), & \dfrac{d\beta_i}{dx_s}+\left(\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}-\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}\right)\\ \dfrac{d\gamma_i}{dx_s}+\left(\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}-\dfrac{dD}{dx_s}\dfrac{dC}{dx_i}\right) & ,\dfrac{d\delta_i}{dx_s}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}-\dfrac{dB}{dx_i}\dfrac{dC}{dx_s}-\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dD}{dx_i}+\dfrac{dB}{dx_s}\dfrac{dC}{dx_i}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_s}{dx_i}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dD}{dx_s}\dfrac{dA}{dx_i}-\dfrac{dC}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}+\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}-\dfrac{dD}{dx_i}\dfrac{dA}{dx_s}\right), & \dfrac{d\beta_s}{dx_i}+\left(\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}-\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}\right)\\ \dfrac{d\gamma_s}{dx_i}+\left(\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}-\dfrac{dD}{dx_i}\dfrac{dC}{dx_s}\right) & ,\dfrac{d\delta_s}{dx_i}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dD}{dx_i}-\dfrac{dB}{dx_s}\dfrac{dC}{dx_i}-\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}+\dfrac{dB}{dx_i}\dfrac{dC}{dx_s}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx_s}, \frac{dB}{dx_s} \\ \frac{dC}{dx_i}, \frac{dD}{dx_i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{dA}{dx_i}, \frac{dB}{dx_i} \\ \frac{dC}{dx_s}, \frac{dD}{dx_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} = (-\beta_s\gamma_i + \alpha_s\delta_i + \beta_i\gamma_s - \alpha_i\delta_s) = (\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx_s}, \frac{dB}{dx_s} \\ \frac{dA}{dx_i}, \frac{dB}{dx_i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} = -\beta_s\alpha_i + \alpha_s\beta_i \quad , \quad \begin{vmatrix} \frac{dC}{dx_i}, \frac{dD}{dx_i} \\ \frac{dC}{dx_s}, \frac{dD}{dx_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} = -\delta_i\gamma_s + \gamma_i\delta_s ;$$

quindi si ottiene

$$(5) \qquad \frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} + (\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} + (\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_s}{dx_i} + (\beta_i\alpha_s - \beta_s\alpha_i) \\ \frac{d\gamma_s}{dx_i} + (\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{pmatrix}.$$

7. Valendoci delle formule ora trovate, passiamo a risolvere una questione fondamentale di questa teoria:

Dato un prodotto di sostituzioni infinitesime della forma

$$(6) \qquad \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i dx_i, & \beta_i dx_i \\ \gamma_i dx_i & , 1 + \delta_i dx_i \end{pmatrix} = \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \gamma_i, \delta_i \end{pmatrix} dx_i$$

determinare a quali condizioni esse debbono soddisfare, affinché il prodotto rappresenti il differenziale esatto totale sinistro di una sostituzione.

In altri termini: *Data una espressione differenziale, trovare la condizione affinché essa sia un differenziale esatto totale sinistro.*

La soluzione di questa questione può ottenersi direttamente come viene mostrato in una Nota (*), ma essa può dedursi immediatamente dai risultati trovati precedentemente.

Se la (6) è il differenziale esatto sinistro di una sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$, dovremo avere

$$\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \gamma_i, \delta_i \end{pmatrix},$$

quindi avremo intanto che dovranno essere soddisfatte le n relazioni

$$(7) \qquad \alpha_i + \delta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(*) Vedi la Nota a questo articolo inserita alla fine di questa *prima parte*.

Dovremo avere inoltre (formula (5))

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} + (\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} + (\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{pmatrix},$$

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_s}{dx_i} + (\alpha_s\beta_i - \alpha_i\beta_s) \\ \frac{d\gamma_s}{dx_i} + (\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{pmatrix},$$

dalle quali si deducono le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni fra sostituzioni

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} + (\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} + (\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_s}{dx_i} + (\alpha_s\beta_i - \alpha_i\beta_s) \\ \frac{d\gamma_s}{dx_i} + (\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{pmatrix} \quad (i, s = 1, 2, \cdots, n)$$

che possono anche scriversi

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} - \frac{d\alpha_s}{dx_i} + (\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} - \frac{d\beta_s}{dx_i} + 2(\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} - \frac{d\gamma_s}{dx_i} + 2(\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} - \frac{d\delta_s}{dx_i} + (\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

Queste $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni equivalgono alle $\frac{4(n-1)n}{2}$ relazioni che si ottengono eguagliando a zero gli elementi della sostituzione (9).

Di queste $\frac{4(n-1)n}{2}$ relazioni $\frac{n(n-1)}{2}$ sono conseguenza delle altre, come risulta immediatamente osservando che in forza delle relazioni (7) la somma dei termini in diagonale nelle (9) è nulla.

8. Analogamente si troverebbe che le condizioni affinché la espressione (6) fosse un differenziale esatto *destro* sarebbero date, oltre che dalle (7), dalle altre

$$(9')\qquad \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} - \frac{d\alpha_s}{dx_i} + (\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} - \frac{d\beta_s}{dx_i} + 2(\alpha_s\beta_i - \alpha_i\beta_s) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} - \frac{d\gamma_s}{dx_i} + 2(\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} - \frac{d\delta_s}{dx_i} + (\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

9. Adotteremo il simbolo

$$\Delta'\left\{\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right\}_{x,y}$$

per denotare la sostituzione

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy} + (\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) \ , & \dfrac{d\beta_1}{dx} - \dfrac{d\beta}{dy} + 2(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1) \\ \dfrac{d\gamma_1}{dx} - \dfrac{d\gamma}{dy} + 2(\delta_1\gamma - \delta\gamma_1) \ , & \dfrac{d\delta_1}{dx} - \dfrac{d\delta}{dy} + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \end{pmatrix}$$

ed il simbolo

$$\Delta'' \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \ , \beta \\ \gamma \ , \delta \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \alpha_1 \ , \beta_1 \\ \gamma_1 \ , \delta_1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y}$$

per denotare la sostituzione

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy} + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \ , & \dfrac{d\beta_1}{dx} - \dfrac{d\beta}{dy} + 2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) \\ \dfrac{d\gamma_1}{dx} - \dfrac{d\gamma}{dy} + 2(\delta\gamma_1 - \delta_1\gamma) \ , & \dfrac{d\delta_1}{dx} - \dfrac{d\delta}{dy} + (\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta) \end{pmatrix}.$$

La condizione affinché

$$\begin{pmatrix} \alpha \ , \beta \\ \gamma \ , \delta \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} \alpha_1 \ , \beta_1 \\ \gamma_1 \ , \delta_1 \end{pmatrix} dy$$

sia un differenziale *sinistro* verrà espressa da

$$\Delta' \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \ , \beta \\ \gamma \ , \delta \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \alpha_1 \ , \beta_1 \\ \gamma_1 \ , \delta_1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y} = \begin{pmatrix} 0 \ , 0 \\ 0 \ , 0 \end{pmatrix};$$

mentre la condizione affinché sia un differenziale destro sarà data da

$$\Delta'' \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \ , \beta \\ \gamma \ , \delta \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \alpha_1 \ , \beta_1 \\ \gamma_1 \ , \delta_1 \end{pmatrix} \right\}_{x,y} = \begin{pmatrix} 0 \ , 0 \\ 0 \ , 0 \end{pmatrix}.$$

§ 4. – Sulle sostituzioni funzioni di più variabili. – Integrazione di differenziali totali.

1. Abbiasi una sostituzione S funzione di $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Avremo (vedi paragrafo precedente)

(I) $$dS = \prod_{1}^{n}{}_i \, X_i \, dx_i$$

in cui le sostituzioni X_i, hanno la somma dei termini in diagonale eguale allo zero.

Abbiamo trovato nel paragrafo precedente (Art. 7) delle condizioni *necessarie* a cui debbono soddisfare le sostituzioni X_i. Queste condizioni sono espresse mediante le equazioni simboliche

(II) $$\Delta'(X_i \, X_s)_{x_i x_s} = \begin{pmatrix} 0 \ , 0 \\ 0 \ , 0 \end{pmatrix} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

Risolviamo ora la questione: *Data la espressione differenziale* (I) *i cui fattori soddisfano le relazioni* (II), *costruire, se è possibile, la sostituzione integrale* S.

Questo ci servirà a dimostrare che le condizioni (II) trovate come *necessarie,* sono anche *sufficienti* affinché la (I) sia un differenziale esatto *sinistro.*

2. A ciò premetteremo la dimostrazione di alcuni teoremi che ci serviranno anche in altre occasioni (*).

TEOREMA I. – *Siano* X (som. 0), Y (som. 0) *due sostituzioni funzioni di* x *e* y *e sia*

$$S = \int X\,dx \quad , \quad X_1 = \frac{dS}{dy}.$$

Si ponga

$$\begin{pmatrix} M , N \\ P , Q \end{pmatrix} = S^{-1}(Y - X_1)\,S.$$

Avremo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dM}{dx}, \dfrac{dN}{dx} \\ \dfrac{dP}{dx}, \dfrac{dQ}{dx} \end{vmatrix} = S^{-1}[\Delta'(X, Y)_{x,y}]\,S.$$

Infatti supponiamo che sia

$$X = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}.$$

Avremo

$$\begin{pmatrix} M , N \\ P , Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 - (da'_y - cb'_y) , \beta_1 - (ab'_y - ba'_y) \\ \gamma_1 - (dc'_y - cd'_y) , \delta_1 - (ad'_y - bc'_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix},$$

vale a dire

$$\begin{aligned}
M &= \quad (\alpha_1 - da'_y + cb'_y)\,ad + (\beta_1 - ab'_y + ba'_y)\,cd - (\gamma_1 - dc'_y + cd'_y)\,ab - (\delta_1 - ad'_y + bc'_y)\,bc ,\\
N &= \quad (\alpha_1 - da'_y + cb'_y)\,bd + (\beta_1 - ab'_y + ba'_y)\,d^2 - (\gamma_1 - dc' + cd'_y)\,b^2 - (\delta_1 - ad'_y + bc'_y)\,bd ,\\
P &= -(\alpha_1 - da'_y + cb'_y)\,ac - (\beta_1 - ab'_y + ba'_y)\,c^2 + (\gamma_1 - dc'_y + cd'_y)\,a^2 + (\delta_1 - ad'_y + bc'_y)\,ac ,\\
Q &= -(\alpha_1 - da'_y + cb'_y)\,bc - (\beta_1 - ab'_y + ba'_y)\,cd + (\gamma_1 - dc'_y + cd'_y)\,ab + (\delta_1 - ad'_y + bc'_y)\,ad
\end{aligned}$$

e quindi, con un calcolo che non presenta difficoltà e che perciò crediamo di poter sopprimere, segue

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dM}{dx}, \dfrac{dN}{dx} \\ \dfrac{dP}{dx}, \dfrac{dQ}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy} + \gamma\beta_1 - \beta\gamma_1 \quad , & \dfrac{d\beta_1}{dx} - \dfrac{d\beta}{dy} + 2(\beta_1\delta - \gamma_1\beta) \\ \dfrac{d\gamma_1}{dx} - \dfrac{d\gamma}{dy} + 2(\gamma_1\alpha - \alpha_1\gamma) \quad , & \dfrac{d\delta_1}{dx} - \dfrac{d\delta}{dy} + (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} [\Delta'(X, Y)_{x,y}] \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$$

come si voleva dimostrare.

(*) Vedi le dimostrazioni degli stessi teoremi pel caso di sostituzioni di ordine qualunque nel § 8.

TEOREMA II. – *Se si hanno le due sostituzioni*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, g \end{pmatrix} = \mathrm{X}\,(\text{som. }0) \quad , \quad \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, g_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Y}\,(\text{som. }0)$$

funzioni di x e di y e se

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} (\text{det. } 1)$$

è tale che

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \rho \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dy}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1, \mu_1 \\ \nu_1, \rho_1 \end{pmatrix}$$

avremo

$$\Delta'[\mathrm{S}^{-1}\mathrm{XS} \;,\; \mathrm{S}^{-1}\mathrm{YS}]_{x,y} =$$

$$\mathrm{S}^{-1}\left\{\Delta'[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_{x,y} + \begin{pmatrix} c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b\nu_1 & , & 2(c_1\lambda - c\lambda_1 + a\nu_1 - a_1\nu) \\ 2(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu) & , & c_1\mu - c\mu_1 + b\nu_1 - b_1\nu \end{pmatrix}\right\}\mathrm{S}.$$

Infatti

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{XS} = \begin{pmatrix} \alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma g & , & \beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \beta\delta g \\ -\alpha\gamma a + \alpha^2 c_1 - \gamma^2 b + \alpha\gamma g & , & -\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p, q \\ r, s \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{YS} = \begin{pmatrix} \alpha\delta a_1 - \alpha\beta c_1 + \gamma\delta b_1 - \beta\gamma g_1 & , & \beta\delta a_1 - \beta^2 c_1 + \delta^2 b_1 - \beta\delta g_1 \\ -\alpha\gamma a_1 + \alpha^2 c_1 - \gamma^2 b_1 + \alpha\gamma g_1 & , & -\gamma\beta a_1 + \alpha\beta c_1 - \gamma\delta b_1 + \alpha\delta g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1, q_1 \\ r_1, s_1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} rq_1 - r_1 q & , & 2(q_1 s - q s_1) \\ 2(r_1 p - r p_1) & . & r_1 q - r q_1 \end{pmatrix} = \mathrm{S}^{-1}\begin{pmatrix} cb_1 - bc_1 & , & 2(b_1 g - b g_1) \\ 2(c_1 a - c a_1) & , & bc_1 - b_1 c \end{pmatrix}\mathrm{S}.$$

Avremo poi

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{dp_1}{dx} - \dfrac{dp}{dy} & , & \dfrac{dq_1}{dx} - \dfrac{dq}{dy} \\ \dfrac{dr_1}{dx} - \dfrac{dr}{dy} & , & \dfrac{ds_1}{dx} - \dfrac{ds}{dy} \end{Bmatrix} = \mathrm{S}^{-1}\begin{Bmatrix} \dfrac{da_1}{dx} - \dfrac{da}{dy} & , & \dfrac{db_1}{dx} - \dfrac{db}{dy} \\ \dfrac{dc_1}{dx} - \dfrac{dc}{dy} & , & \dfrac{dg_1}{dx} - \dfrac{dg}{dy} \end{Bmatrix}\mathrm{S}$$

$$+\begin{Bmatrix} a_1\dfrac{d(\alpha\delta)}{dx} - a\dfrac{d(\alpha\delta)}{dy} - c_1\dfrac{d(\alpha\beta)}{dx} + c\dfrac{d(\alpha\beta)}{dy} + b_1\dfrac{d(\gamma\delta)}{dx} - b\dfrac{d(\gamma\delta)}{dy} - g_1\dfrac{d(\beta\gamma)}{dx} + g\dfrac{d(\beta\gamma)}{dy}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots \end{Bmatrix}.$$

Ora

$$\left|\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= \alpha\lambda + \gamma\mu \\ \frac{d\beta}{dx} &= \delta\mu + \beta\lambda \\ \frac{d\gamma}{dx} &= \alpha\nu + \gamma\rho \\ \frac{d\delta}{dx} &= \delta\rho + \beta\nu \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dy} &= \alpha\lambda_1 + \gamma\mu_1 \\ \frac{d\beta}{dy} &= \delta\mu_1 + \beta\lambda_1 \\ \frac{d\gamma}{dy} &= \alpha\nu_1 + \gamma\rho_1 \\ \frac{d\delta}{dy} &= \delta\rho_1 + \beta\nu_1 \end{aligned}\right.$$

quindi

$$a_1 \frac{d(\alpha\delta)}{dx} - a \frac{d(\alpha\delta)}{dy} - c_1 \frac{d(\alpha\beta)}{dx} + c \frac{d(\alpha\beta)}{dy} + b_1 \frac{d(\gamma\delta)}{dx} - b \frac{d(\gamma\delta)}{dy} - g_1 \frac{d(\beta\gamma)}{dx} + g \frac{d(\beta\gamma)}{dy}$$

$$= \alpha\delta(c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b\nu_1) - 2\alpha\beta(c_1\lambda - c\lambda_1 + \nu a_1 - \nu a_1)$$

$$+ 2\gamma\delta(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu) + \beta\gamma(b_1\nu - b\nu_1 + \mu_1 c - \mu c_1).$$

Analogamente si ottengono gli altri elementi dell'ultima sostituzione scritta; quindi

$$\begin{Bmatrix} \frac{dp_1}{dx} - \frac{dp}{dy} \,, & \frac{dq_1}{dx} - \frac{dq}{dy} \\ \frac{dr_1}{dx} - \frac{dr}{dy} \,, & \frac{ds_1}{dx} - \frac{ds}{dy} \end{Bmatrix}$$

$$= S^{-1}\left[\begin{Bmatrix} \frac{da_1}{dx} - \frac{da}{dy} \,, & \frac{db_1}{dx} - \frac{db}{dy} \\ \frac{dc_1}{dx} - \frac{dc}{dy} \,, & \frac{dg_1}{dx} - \frac{dg}{dy} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b\nu_1 \,, & 2(c_1\lambda - c\lambda_1 + \nu_1 a - a_1\nu) \\ 2(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu) \,, & c_1\mu - c\mu_1 + b\nu_1 - b_1\nu \end{pmatrix}\right] S$$

e finalmente

$$\Delta'(S^{-1}XS \,, S^{-1}YS)_{x,y} = S^{-1}\Big\{\Delta'(X\,,Y)_{x,y}$$

$$+ \begin{pmatrix} c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b_1\nu \,, & 2(c_1\lambda - c\lambda_1 + \nu_1 a - a_1\nu) \\ 2(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu) \,, & c_1\mu - c\mu_1 + b\nu_1 - b_1\nu \end{pmatrix}\Big\} S$$

come si voleva dimostrare.

TEOREMA III. – *Supponendo che sia*

$$X = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, g \end{pmatrix} \,, \quad X_1 = \begin{pmatrix} a_1\,, b_1 \\ c_1\,, g_1 \end{pmatrix} \,,$$

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} \,, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\,, \beta_1 \\ \gamma_1\,, \delta_1 \end{pmatrix} \,,$$

si avrà

$$\Delta'(X + X_1 \,, Y + Y_1)_{x,y} = \Delta'(X\,,Y)_{x,y} + \Delta'(X_1\,,Y_1)_{x,y}$$

$$- \begin{pmatrix} \gamma b_1 + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c \,, & 2(a\beta_1 + a_1\beta - \alpha_1 b - \alpha b_1) \\ 2(g\gamma_1 + g_1\gamma - \delta c_1 - \delta_1 c) \,, & \beta_1 c + \beta c_1 - \gamma b_1 - \gamma_1 b \end{pmatrix}.$$

Infatti posto

$$\Delta'(X + X_1 \,, Y + Y_1)_{x,y} = \begin{pmatrix} M\,, N \\ P\,, Q \end{pmatrix}$$

otterremo

$$M = \left(\frac{d\alpha}{dx} - \frac{da}{dy} + c\beta - \gamma b\right) + \left(\frac{d\alpha_1}{dx} - \frac{da_1}{dy} + c_1\beta_1 - b_1\gamma_1\right) - (\gamma b + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c),$$

$$N = \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{db}{dy} + 2(\alpha b - \beta a)\right) + \left(\frac{d\beta_1}{dx} - \frac{db}{dy} + 2(\alpha_1 b_1 - \beta_1 a_1)\right) - 2(a\beta_1 + a_1\beta - \alpha_1 b - \alpha b_1),$$

$$P = \left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{dc}{dy} + 2(c\delta - \gamma g)\right) + \left(\frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{dc_1}{dy} + 2(c_1\delta_1 - \gamma_1 g_1)\right) - 2(g\gamma_1 + g_1\gamma - \delta c_1 - \delta_1 c),$$

$$Q = \left(\frac{d\delta}{dx} - \frac{dg}{dy} + b\gamma - \beta c\right) + \left(\frac{d\delta_1}{dx} - \frac{dg}{dy} + b_1\gamma_1 - \beta_1 c_1\right) - (\beta_1 c + \beta c_1 - b_1\gamma - b\gamma_1)$$

e per conseguenza

$$\begin{pmatrix} M, N \\ P, Q \end{pmatrix} = \Delta'(XY)_{x,y} + \Delta'(X_1, Y_1)_{x,y} - \begin{pmatrix} \gamma b_1 + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c & , 2(a\beta_1 + a_1 \beta - \alpha_1 b - \alpha b_1) \\ 2(g\gamma_1 + g_1 \gamma - \delta c_1 - \delta_1 c) , & \beta_1 c + \beta c_1 - b_1 \gamma - b\gamma_1 \end{pmatrix}$$

come si voleva dimostrare.

Da questo teorema si deduce immediatamente la formula

$$\Delta'(X - X_1, Y - Y_1)_{x,y} = \Delta'(X, Y)_{x,y} - \Delta'(X_1, Y_1)_{x,y}$$
$$+ \begin{pmatrix} \gamma b_1 + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c - 2(b_1 \gamma_1 - c_1 \beta_1) & , 2[a\beta_1 + \alpha_1 b - \alpha_1 b - \alpha b_1 - 2(\beta_1 a_1 - \alpha_1 b_1)] \\ 2[g\gamma_1 + g_1 \gamma - \delta c_1 - \delta_1 c - 2(\gamma_1 g_1 - c_1 \delta_1)] , & \beta_1 c + \beta c_1 - \gamma b_1 - \gamma_1 b - 2(\beta_1 c_1 - b_1 \gamma_1) \end{pmatrix}.$$

Finalmente si avrà il

TEOREMA IV. – *Siano* X (som. o), Y (som. o) *e* Z (som. o), *tre sostituzioni funzioni di* x, y *e* z *e sia*

$$S = \int X\,dx \quad , \quad X_2 = \frac{dS}{dy} \quad , \quad X_3 = \frac{dS}{dz}.$$

Si avrà

$$\Delta'[S^{-1}(Y - X_2)S \ , \ S^{-1}(Z - X_3)S]_{y,z} = S^{-1}[\Delta'(Y, Z)_{y,z}]S.$$

Infatti, poniamo

$$Y = \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \begin{pmatrix} a_3, b_3 \\ c_3, d_3 \end{pmatrix}$$
$$X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3, \beta_3 \\ \gamma_3, \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Avremo (vedi teoremi precedenti)

$$\Delta'[S^{-1}(Y - X_2)S, S^{-1}(Z - X_3)S]_{y,z} = S^{-1}[\Delta'(Y - X_2, Z - X_3)_{y,z}]S$$
$$+ S^{-1}\left\{\begin{pmatrix} (c_2 - \gamma_2)\beta_3 - (c_3 - \gamma_3)\beta_2 + (b_3 - \beta_3)\gamma_2 - (b_2 - \beta_2)\gamma_3, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \cdots \end{pmatrix}\right\} S$$
$$= S^{-1}\left\{\Delta'(Y, Z)_{y,z} - \Delta'(X_2, X_3)_{y,z} + \begin{pmatrix} c_3\beta_2 - c_2\beta_3 + b_2\gamma_3 - b_3\gamma_2 - 2(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \cdots \end{pmatrix}\right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} (c_2 - \gamma_2)\beta_3 - (c_3 - \gamma_3)\beta_2 + (b_3 - \beta_3)\gamma_2 - (b_2 - \beta_2)\gamma_3, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \cdots \end{pmatrix}\right\} S$$
$$= S^{-1}\{\Delta'(Y - Z)_{y,z} - \Delta'(X_2, X_3)_{y,z}\}S.$$

Ma

$$\Delta'(X_2, X_3)_{y,z} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\Delta'[S^{-1}(Y - X_2)S, S^{-1}(Z - X_3)S]_{y,z} = S^{-1}[\Delta'(Y, Z)_{y,z}]S,$$

come si voleva dimostrare.

3. Cominciamo dal considerare il caso in cui si abbiano due sole variabili indipendenti e l'espressione differenziale sia

$$dS = Xdx \cdot Ydy$$

con

$$\Delta'(X, Y)_{x.y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si formi

$$S_1 = \int X dx,$$

in cui nell'eseguire la integrazione deve supporsi y costante. Avremo

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS_1}{dx} = X,$$

onde per un noto teorema (§ 1, teorema XIII, p. 231) S e S_1 dovranno essere eguali a meno di un *fattore a destra* indipendente dalla x.

Ne segue che

$$S = S_1 T,$$

essendo T funzione della sola y. Quindi

$$S_1^{-1} S = T,$$

e derivando rispetto ad y, avremo

$$\frac{d}{dy}(S_1^{-1} S) = \frac{dT}{dy},$$

o anche, per un noto teorema (§ 1, teorema X, formula (14), p. 229), l'equazione precedente potrà scriversi

$$S_1^{-1}\left(\frac{dS}{dy} - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1 = \frac{dT}{dy},$$

vale a dire

$$S_1^{-1}\left(Y - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1 = \frac{dT}{dy}. \tag{2}$$

Bisognerà dimostrare che essendo soddisfatta la (1) il primo membro della precedente equazione è indipendente da x. Perciò osserviamo che ponendo il primo membro eguale a $\begin{pmatrix} M, N \\ P, Q \end{pmatrix}$, pel teorema I di questo paragrafo, si avrà

$$\begin{Bmatrix} \frac{dM}{dx}, \frac{dN}{dx} \\ \frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx} \end{Bmatrix} = S_1^{-1} (\Delta'(Y, X)_{y,x}) S_1$$

onde per la (1)

$$\begin{Bmatrix} \frac{dM}{dx}, \frac{dN}{dx} \\ \frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Questo ci dimostra che il primo membro della (2) è indipendente da x. Integrando avremo

$$T = \int S_1^{-1}\left(Y - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1\, dy$$

e per conseguenza

$$S = S_1 \cdot \int \left\{ S_1^{-1}\left[Y - \left(\frac{dS_1}{dy}\right)\right] S_1 \right\} dy.$$

4. Consideriamo ora il caso generale in cui si abbiano n variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e l'espressione differenziale sia

$$dS = \prod_{1}^{n}{}_i\, X_i\, dx_i$$

con

$$\Delta'(X_i\, X_s)_{x_i x_s} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n). \tag{3}$$

Si formi

$$\int X_1\, dx_1 = S_1$$

e nell'eseguire la integrazione si suppongano $x_2, x_3, \cdots, x_n$, costanti.

Avremo

$$\frac{dS}{dx_1} = \frac{dS_1}{dx_1} = X_1$$

e per conseguenza (§ 1, teorema XIII)

$$S = S_1\, T_1$$

con T funzione di $x_2, x_3, \cdots, x_n$ soltanto.

Quindi

$$S_1^{-1}\, S = T_1$$

e derivando rispetto ad x_i $(i = 2, 3, \cdots, n)$ (§ 1, formula 14)

$$U_{1,i} = S_1^{-1}\left(X_i - \frac{dS_1}{dx_i}\right) S_1 = \frac{dT_1}{dx_i}.$$

Bisognerà dimostrare che

1) $U_{1,i}$ *è indipendente da* x_i,

2) $\Delta'(U_{1,i} U_{1,i})_{x_i x_s} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$ $(i, s = 2, 3, \cdots, n)$.

quando sono soddisfatte le (3).

Ora che le $U_{1,i}$ siano indipendenti da x_1 risulta immediatamente dal teorema I di questo paragrafo.

Abbiamo poi pel teorema IV

$$\Delta'(U_{1,i}, U_{1,s})_{x_i x_s} = S_1^{-1}\,(\Delta'(X_i\, X_s)_{x_i x_s})\, S_1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Resta quindi dimostrato che se le condizioni (3) sono sufficienti per $n = m$, saranno pure sufficienti per $n = m + 1$, il che prova quanto ci eravamo proposto.

Abbiamo così anche una regola per la integrazione dei differenziali totali di sostituzioni perfettamente analoga a quella che si dà nel calcolo per la integrazione dei differenziali esatti.

§ 5. – Variazione dell'integrale di una sostituzione.

1. Teorema I. – *Se si hanno le due sostituzioni*

$$X \,(\text{som. } 0) \quad , \quad X_1 \,(\text{som. } 0)$$

avremo

$$\Big(\int_p^q X_1\, dx\Big)\cdot\Big(\int_p^q X dx\Big)^{-1} = (T\,(X_1 - X)\,T^{-1})\, dx \int_p^q$$

ove

$$T = \int_x^q X_1\, dx\,.$$

Infatti, dividiamo l'intervallo $(p \cdots q)$ in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ a cominciare dall'estremo p.

Supponendo

$$X = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{pmatrix} a', b' \\ c', d'\end{pmatrix},$$

potremo scegliere gli intervalli h_r così piccoli che si abbia

$$\int_p^q X dx = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1\,, & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & , 1 + \varepsilon_4\end{pmatrix} \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + a_i h_i\,, & b_i h_i \\ c_i h_i & , 1 + d_i h_i\end{pmatrix}$$

$$\int_p^q X_1\, dx = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon'_1\,, & \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 & , 1 + \varepsilon'_4\end{pmatrix} \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + a'_i h_i\,, & b'_i h_i \\ c'_i h_i & , 1 + d'_i h_i\end{pmatrix}$$

e in modo che le ε siano tutte inferiori a un numero dato σ.

Ne segue per il lemma 2° del § 2, Art. 2,

$$\Big(\int_p^q X_1\, dx\Big)\Big(\int_p^q X dx\Big)^{-1} = \eta' \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + a'_i h_i\,, & b'_i h_i \\ c'_i h_i & , 1 + d'_i h_i\end{pmatrix} \Big\{ \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + a_i h_i\,, & b_i h_i \\ c_i h_i & , 1 + d_i h_i\end{pmatrix}\Big\}^{-1} \eta$$

$$= \eta' \prod_n^1{}_i \Big\{ T'_i \begin{pmatrix} 1 + a'_i h_i\,, & b'_i h_i \\ c'_i h_i & , 1 + d'_i h_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + a_i h_i\,, & b_i h_i \\ c_i h_i & , 1 + d_i a_i\end{pmatrix}^{-1} T_i'^{-1}\Big\}\, \eta,$$

ove si è posto

$$\eta = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 , & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & , 1+\varepsilon_4 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\eta' = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon'_1 , & \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 & , 1+\varepsilon'_4 \end{pmatrix},$$

$$T'_i = \prod_{i+1}^{n}{}_s \begin{pmatrix} 1+a'_s h_s , & b'_s h_s \\ c'_s h_s & , 1+d'_s h_s \end{pmatrix}.$$

Passando al limite, per le h_i infinitamente decrescenti, si ottiene

$$\left(\int_p^q X_1\, dx\right)\left(\int_p^q X dx\right)^{-1} = (T\,(X_1 - X)\,T^{-1})\, dx \int_p^q$$

come si voleva dimostrare.

La formula precedente può verificarsi facilmente derivando a sinistra ambo i membri rispetto a p.

2. Se agli elementi di una sostituzione $\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$ (det. 1) diamo delle variazioni infinitesime $\delta a , \delta b , \delta c , \delta d$, si chiamerà *variazione sinistra* della sostituzione, la sostituzione

$$\delta \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\delta a , & b+\delta b \\ c+\delta c , & d+\delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1}$$

e *variazione destra*, la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \delta = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a+\delta a , & b+\delta b \\ c+\delta c , & d+\delta d \end{pmatrix}.$$

Si tratta di trovare la variazione di un integrale definito di una sostituzione.

Supponiamo di avere $\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$ (som. 0) e

$$S = \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx\,.$$

Diamo una variazione a tutti gli elementi della sostituzione ed ai limiti, in modo però che

$$\delta\,(a+d) = 0\,;$$

avremo

TEOREMA II.

$$\delta S = \delta \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1+a\delta q , & b\delta q \\ c\delta q & , 1+d\delta q \end{pmatrix}_q S \begin{pmatrix} 1-a\delta p , & -b\delta p \\ -c\delta p & , 1-d\delta p \end{pmatrix}_p S^{-1} \cdot \left\{ T \begin{pmatrix} \delta a , \delta b \\ \delta c , \delta d \end{pmatrix} T^{-1} \right\} dx \int_p^q$$

essendo

$$T = \int_x^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx .$$

Infatti

$$\delta S = \left\{ \int_{p+\delta p}^{q+\delta q} \begin{pmatrix} a+\delta a , b+\delta b \\ c+\delta c , d+\delta d \end{pmatrix} dx \right\} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx \right\}^{-1}$$

onde posto

$$\begin{pmatrix} a+\delta a , b+\delta b \\ c+\delta c , d+\delta d \end{pmatrix} = V_1 \quad , \quad \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} = V ,$$

si troverà

$$\delta S = \left(\int_{p+\delta p}^{q+\delta q} V_1\, dx \right) \left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx \right)^{-1} \left(\int_p^q V_1\, dx \right) \left(\int_p^q V_1\, dx \right)^{-1} \left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx \right) \left(\int_p^q V_1\, dx \right)^{-1} \left(\int_p^q V_1\, dx \right) \left(\int_p^q V dx \right)^{-1} .$$

Ora a meno d'infinitesimi d'ordine superiore si ha

$$\left(\int_{p+\delta p}^{q+\delta q} V_1\, dx \right) \left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx \right)^{-1} = \int_q^{q+\delta q} V_1\, dx = \begin{pmatrix} 1 + a\delta q , & b\delta q \\ c\delta q & , 1 + d\delta q \end{pmatrix}_q$$

$$\left(\int_p^q V_1\, dx \right)^{-1} \left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx \right) = \int_{p+\delta p}^{p} V_1\, dx = \begin{pmatrix} 1 - a\delta p , & - b\delta p \\ - c\delta p & , 1 - d\delta p \end{pmatrix}_p$$

$$\left(\int_p^q V_1\, dx \right) \left(\int_p^q V dx \right)^{-1} = \left\{ T \begin{pmatrix} \delta a , \delta b \\ \delta c , \delta d \end{pmatrix} T^{-1}\, dx \right\} \int_p^q ,$$

quindi a meno di infinitesimi d'ordine superiore

$$\delta S = \begin{pmatrix} 1 + a\delta q , & b\delta q \\ c\delta q & , 1 + d\delta q \end{pmatrix}_q S \begin{pmatrix} 1 - a\delta p , & - b\delta p \\ - c\delta p & , 1 - d\delta p \end{pmatrix}_p S^{-1} \cdot \left\{ T \begin{pmatrix} \delta a , \delta b \\ \delta c , \delta d \end{pmatrix} T^{-1} \right\} dx \int_p^q$$

come si voleva appunto dimostrare.

§ 6. – Integrazione multipla di una sostituzione. – Relazione fra integrali curvilinei e integrali doppî.

1. Relativamente alla integrazione multipla ci limiteremo ai soli integrali doppî.

Abbiasi una sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} (\text{som. } 0)$$

funzione di due variabili x, y e definita in un campo σ nel piano delle variabili x, y che supporremo tale che ogni parallela all'asse x ne incontri il contorno s al più in due punti.

Ammettiamo che la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ sia continua e che il contorno s sia una linea continua.

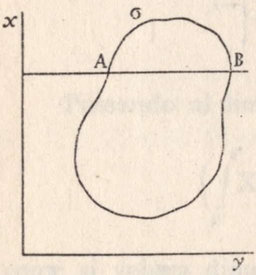

Fig. 1.

La parallela all'asse x che dista di y da questa retta tagli il contorno nei punti A e B. Si formi la sostituzione

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_A^B \alpha dx, & \int_A^B \beta dx\\ \int_A^B \gamma dx, & \int_A^B \delta dx\end{pmatrix}$$

avremo che $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ sarà funzione continua della sola y e sarà $\alpha_1 + \delta_1 = 0$. Siano y_0 e y_1 rispettivamente le distanze minima e massima che passano fra i punti di s e l'asse x.

Si formi

$$\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix} = \int_{y_0}^{y_1} \begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} dy$$

avremo che $\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix}$ sarà a (det. 1); essa si chiamerà l'*integrale doppio sinistro della sostituzione* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ *eseguita prima rispetto ad x, poi rispetto ad y ed estesa a tutti i punti del campo* σ. Si scriverà

$$\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix} = \iint_\sigma \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx\, dy.$$

Se le parallele all'asse y incontreranno s in due soli punti al massimo, potremo considerare la sostituzione

$$\begin{pmatrix}A_1, B_1\\ C_1, D_1\end{pmatrix} = \iint_\sigma \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dy\, dx$$

e avremo *in generale*

$$\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}A_1, B_1\\ C_1, D_1\end{pmatrix}.$$

Limitiamo il campo σ_1, fra il contorno di σ e due rette rispettivamente parallele agli assi x e y e che si tagliano nel punto di coordinate x_1, y_1 (la parte tratteggiata della figura 2).

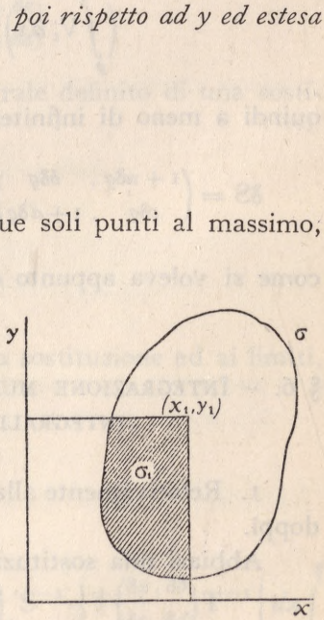

Fig. 2.

Poniamo

$$\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} = \iint\limits_{\sigma_1} \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} dx\, dy$$

$$\begin{pmatrix} a_1\,, b_1 \\ c_1\,, d_1 \end{pmatrix} = \iint\limits_{\sigma_1} \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} dy\, dx\,.$$

Se manterremo tutto fisso, soltanto varieremo le due rette che passano per $(x_1\, y_1)$ collo spostare questo punto entro σ, ambedue le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1\,, b_1 \\ c_1\,, d_1 \end{pmatrix}$ potranno considerarsi come funzioni di x_1 e di y_1 e avremo evidentemente (vedi § 3)

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} = \frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a_1\,, b_1 \\ c_1\,, d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix}.$$

2. Analogamente a quanto si fa per le funzioni studieremo gli *integrali curvilinei* delle sostituzioni. Se la sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix}$ (som. o) è definita per tutti i punti di un arco di curva s, potremo considerare (presi due punti A e B sulla curva)

$$\int_A^B \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} ds$$

e analogamente avremo un *integrale destro curvilineo*.

Se la curva s giace nel piano delle x e y entro il campo di variabilità di due sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix}$ (som. o), $\begin{pmatrix} \alpha_1\,, \beta_1 \\ \gamma_1\,, \delta_1 \end{pmatrix}$ (som. o) funzioni di $x\,, y$, potremo considerare la sostituzione

$$\int_A^B \begin{pmatrix} \alpha \dfrac{dx}{ds} + \alpha_1 \dfrac{dy}{ds} & , & \beta \dfrac{dx}{ds} + \beta_1 \dfrac{dy}{ds} \\ \gamma \dfrac{dx}{ds} + \gamma_1 \dfrac{dy}{ds} & , & \delta \dfrac{dx}{ds} + \delta_1 \dfrac{dy}{ds} \end{pmatrix} ds$$

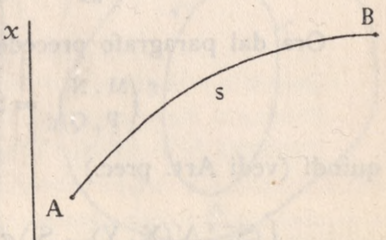

Fig. 3.

che scriveremo col simbolo

$$\int_A^B \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1\,, \beta_1 \\ \gamma_1\,, \delta_1 \end{pmatrix} dy.$$

Si avrà

$$\int_A^B \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1\,, \beta_1 \\ \gamma_1\,, \delta_1 \end{pmatrix} dy = \left[\int_B^A \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1\,, \beta_1 \\ \gamma_1\,, \delta_1 \end{pmatrix} dy \right]^{-1}.$$

3. Il teorema che ora vogliamo dimostrare si riferisce alla relazione che passa fra integrali curvilinei e integrali doppî.

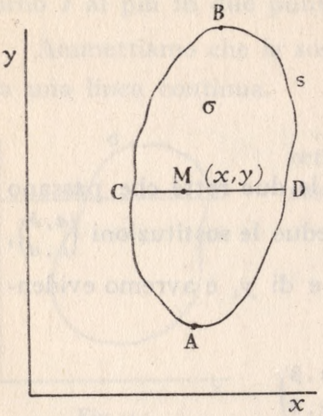

Fig. 4.

TEOREMA I. – *Siano* X e Y (som. 0) *due sostituzioni funzioni di x e di y definite nell'interno di un dato campo σ del piano xy e al contorno s* (incontrato dalle parallele ad x al più in due punti). *Preso un punto qualunque* M (di coordinate x, y) *entro σ, si formi*

$$\int_C^M X\,dx \cdot \int_A^C X\,dx \cdot Y\,dy = S_1$$

essendo MC *parallela ad x*, A *il punto di s più vicino all'asse x. Avremo che*

$$\int_\sigma (S_1^{-1}\,\Delta'(X\,,\,Y)_{x\,,\,y}\,S_1)\,dx\,dy = \int_s X\,dx \cdot Y\,dy$$

supponendo che la integrazione lungo la linea s sia eseguita partendo da A *e ritornando allo stesso punto lasciando sempre a sinistra il campo σ.*

Per dimostrare questo teorema si osservi che pel teorema I, del § 4°, posto

$$\begin{pmatrix} M\,, N \\ P\,, Q \end{pmatrix} = S_1^{-1}\left(Y - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1$$

resulterà

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{dM}{dx} & , & \dfrac{dN}{dx} \\ \dfrac{dP}{dx} & , & \dfrac{dQ}{dx} \end{Bmatrix} = S_1^{-1}\,\Delta'(Y\,,X)_{x\,,\,y}\,S_1\,.$$

Ora dal paragrafo precedente si deduce facilmente

$$\begin{pmatrix} M\,, N \\ P\,, Q \end{pmatrix}_C = S_1^{-1}\,(Y_C - Y_C)\,S_1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

quindi (vedi Art. prec.)

$$\int_\sigma (S_1^{-1}\,\Delta'(X\,,\,Y)_{x\,,\,y}\;S_1)\,dx \cdot dy = \int_A^B \Big\{ S_1^{-1}\left(Y\,dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy\right) S_1 \Big\}_D\,,$$

ove B è il punto di s più distante dall'asse x; e l'indice D posto nella quantità sotto il segno d'integrazione nel secondo membro denota che il valore della quantità stessa va preso nei punti dalla parte D del contorno (vedi figura 4).

Formiamo ora

$$U = (S_1)_D \int_A^D \Big\{ S_1^{-1}\left(Y\,dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy\right) S_1 \Big\}_D$$

e facciamone il differenziale. Otterremo

$$dU = dS_1 \cdot S_1 \Big\{ S_1^{-1}\left(Y\,dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy\right) S_1 \Big\}\, S_1^{-1} = dS_1 \cdot Y\,dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy.$$

Ma

$$dS_1 = \frac{dS_1}{dy}dy \cdot X\,dx,$$

quindi

$$dU = (X\,dx \cdot Y\,dy)_D$$

e perciò

$$\int_{ADB}(X\,dx \cdot Y\,dy)_D = (S_1)_B \int_A^B \left\{ S_1^{-1}\left(Y\,dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy\right) S_1 \right\}_D.$$

Si ha

$$(S_1)_B = \int_{ACB}(X\,dx \cdot Y\,dy),$$

per conseguenza

$$\int_{BCA} X\,dx \cdot Y\,dy \cdot \int_{ADB} X\,dx \cdot Y\,dy = \int_A^B \left\{ S_1^{-1}\left(Y\,dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy\right) S_1 \right\}_D$$

e finalmente

$$\int_s (X\,dx \cdot Y\,dy) = \int_\sigma (S_1^{-1}\,\Delta'(X\,,\,Y)_{x,y}\,S_1)\,dx\,dy$$

come volevasi dimostrare.

4. Supponiamo ora che in un dato campo Σ semplicemente connesso nel piano delle due variabili x e y le due sostituzioni X e Y funzioni di x e y siano finite e continue e le derivate dei loro elementi siano finite e atte alle integrazione; inoltre si abbia

$$\Delta'(X\,,\,Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Presa entro Σ una linea s chiusa incontrata dalle parallele ad x in due punti soli, pel teorema precedente sarà

$$(1) \qquad \int_s X\,dx \cdot Y\,dy = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

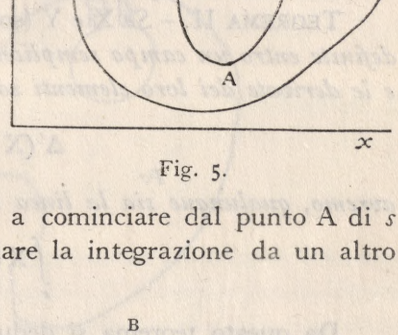

Fig. 5.

in cui la integrazione deve supporsi eseguita a cominciare dal punto A di s più vicino ad x. Suppongasi ora di cominciare la integrazione da un altro punto B qualunque di s. Avremo

$$\int_{BACB} X\,dx \cdot Y\,dy = \left(\int_A^B X\,dx \cdot Y\,dy\right)\left(\int_{ACBA} X\,dx \cdot Y\,dy\right)\left(\int_A^B X\,dx \cdot Y\,dy\right)^{-1}$$

$$= \left(\int_A^B X\,dx \cdot Y\,dy\right)\left(\int_A^B X\,dx \cdot Y\,dy\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la relazione (1) vale qualunque sia il punto di s da cui si principia la integrazione.

Suppongasi ora di avere entro Σ una linea chiusa s la quale possa esser tagliata dalle parallele all'asse x in più di due punti.

Sarà evidentemente possibile spezzare il campo racchiuso entro s in altri, ciascuno dei quali abbia il contorno incontrato in due punti soli dalle parallele all'asse x e tale spezzamento potrà sempre eseguirsi mediante delle linee che partano da un punto del contorno. Nel caso particolare rappresentato dalla figura 6, basterà tirare due sole linee AGB e CHB e otterremo il campo racchiuso da s spezzato nei tre σ_1, σ_2, σ_3 e ciascuno dei loro contorni

$$s_1 = \mathrm{CIDBC} \quad , \quad s_2 = \mathrm{ACBGA} \quad , \quad s_3 = \mathrm{AGBFA}$$

sarà incontrato dalle parallele ad x al più in due punti.

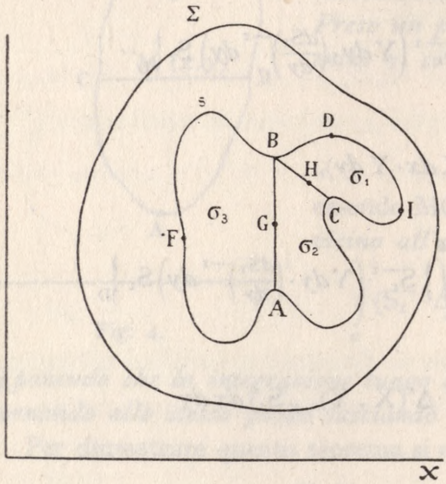

Fig. 6.

Avremo ora

$$\int\limits_s = \int\limits_{\mathrm{AC+CIB+BFA}} = \int\limits_{\mathrm{BFA}} \cdot \int\limits_{\mathrm{CIB}} \cdot \int\limits_{\mathrm{AC}} = \Big(\int\limits_{\mathrm{AB}}\Big)^{-1} \Big(\int\limits_{\mathrm{AB}} \cdot \int\limits_{\mathrm{BFA}}\Big) \cdot \Big(\int\limits_{\mathrm{CIB}} \cdot \int\limits_{\mathrm{BC}}\Big) \cdot \Big(\int\limits_{\mathrm{CB}} \int\limits_{\mathrm{AC}} \int\limits_{\mathrm{BA}}\Big) \cdot \int\limits_{\mathrm{AB}}$$

$$= \Big(\int\limits_{\mathrm{AB}}\Big)^{-1} \int\limits_{s_3} \cdot \int\limits_{s_1} \cdot \int\limits_{s_2} \Big(\int\limits_{\mathrm{AB}}\Big) = \Big(\int\limits_{\mathrm{AB}}\Big)^{-1} \Big(\int\limits_{\mathrm{AB}}\Big) = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la relazione (1) vale qualunque sia la linea s racchiusa nel campo Σ.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Teorema II. – *Se* X *e* Y (som. 0) *sono due sostituzioni funzioni di x e y definite entro un campo semplicemente connesso Σ nel piano delle x, y ed esse e le derivate dei loro elementi sono finite e continue; e se*

$$\Delta'(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

avremo, qualunque sia la linea s chiusa che si prenda entro Σ,

$$\int\limits_s \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Da questo teorema si deduce immediatamente l'altro:

Teorema III. – *Se per le* X *e* Y *valgono le stesse condizioni stabilite precedentemente e si prendono entro Σ due punti qualunque* A, B *il valore dell'integrale*

$$\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy.$$

esteso ai punti di una linea che va dal punto A *al punto* B *sarà indipendente da questa linea, purché essa sia tutta racchiusa entro il campo* Σ *e ne restino invariati gli estremi.*

Questo teorema è equivalente all'altro:

TEOREMA IV. – *Se per le* X *e* Y *valgono le solite condizioni, preso entro* Σ *un punto arbitrario fisso* A *ed un punto di coordinate* x, y *correnti, avremo che*

$$\int_{A}^{(x,y)} X\,dx \cdot Y\,dy$$

sarà una sostituzione (det. 1) *funzione monodroma di* x *e di* y.

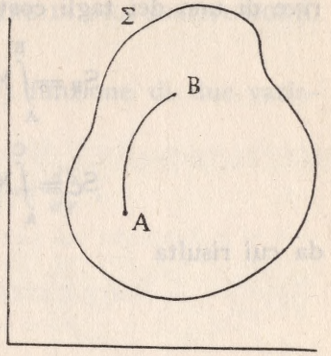

Fig. 7.

5. Supponiamo ora di avere un campo Σ più volte connesso; mediante i tagli normali si riduca la superficie Σ ad essere semplicemente connessa.

Se X (som. 0) e Y (som. 0) sono due sostituzioni che soddisfano alla condizione

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

e oltre ad esser finite e continue hanno le derivate degli elementi pure finite e continue, consideriamo

$$\int_{A}^{(x,y)} X\,dx \cdot Y dy = S,$$

essendo A un punto fisso qualunque di Σ.

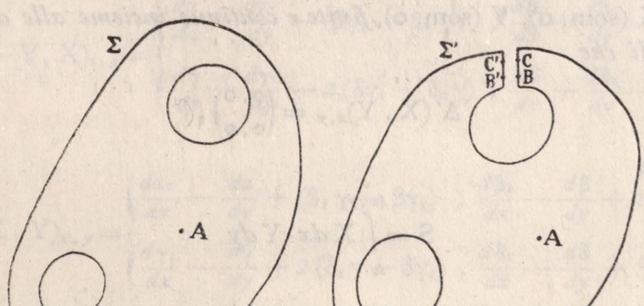

Fig. 8.

Entro Σ' la sostituzione S sarà monodroma; ma non sarà tale più entro Σ. Per studiarne la polidromia vediamo le relazioni che passano fra i valori di S alle due rive di ciascuno dei tagli costruiti.

Prendiamo a considerare due coppie di punti BB′, CC′ opposte alle due rive di uno dei tagli costruiti; avremo entro Σ'

$$\mathrm{S_B} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \quad , \quad \mathrm{S_{B'}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy,$$

$$\mathrm{S_C} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \quad , \quad \mathrm{S_{C'}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy,$$

da cui risulta

$$\mathrm{S_C} = \left(\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \right) \mathrm{S_B}\,,$$

$$\mathrm{S_{C'}} = \left(\int_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \right) \mathrm{S_{B'}}.$$

Ma

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy = \int_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \int_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy,$$

quindi,

$$\mathrm{S_{C'}^{-1}}\,\mathrm{S_C} = \mathrm{S_{B'}^{-1}}\,\mathrm{S_B} = \mathrm{T}$$

e per conseguenza

$$\mathrm{S_C} = \mathrm{S_{C'}}\,\mathrm{T},$$

$$\mathrm{S_B} = \mathrm{S_{B'}}\,\mathrm{T}.$$

Possiamo quindi enunciare il teorema seguente.

TEOREMA V. – *Se entro una superficie più volte connessa* Σ *si hanno due sostituzioni* X (som. o), Y (som. o), *finite e continue insieme alle derivate degli elementi e tali che*

$$\Delta'(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

la sostituzione

$$\mathrm{S} = \int_{\mathrm{A}}^{(x,y)} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy$$

non sarà in generale monodroma. Eseguiti i tagli che rendono Σ *una superficie semplicemente connessa* Σ' *e considerando* S *entro* Σ', *avremo che esisterà per ogni taglio una sostituzione costante, tale che i valori di* S *ad una delle rive del taglio saranno eguali a quelli di* S *all'altra riva moltiplicati a destra per la sostituzione costante.*

6. Non si avrebbe difficoltà a ritrovare i teoremi correlativi ai precedenti relativamente agli integrali destri.

§ 7. – Parametri differenziali del secondo ordine di una sostituzione.

1. Abbiasi una sostituzione $S = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ (det. 1) funzione di due variabili x e y. Si formino

$$X = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \frac{dS}{dx} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = \frac{dS}{dy} ,$$

avremo (vedi § 3, Art. 9)

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri

$$\Delta'(-Y, X)_{x,y}$$

che rappresenteremo col simbolo

$$\Delta_2' S ,$$

o anche col simbolo

$$\Delta_2' S_{x,y} .$$

Analogamente, posto

$$X_1 = S \frac{d}{dx} \quad , \quad Y_1 = S \frac{d}{dy} ,$$

si consideri

$$\Delta''(-Y_1, X_1)_{x,y} = \Delta_2'' S .$$

Chiameremo $\Delta_2' S$ e $\Delta_2'' S$ i *parametri differenziali secondi* di S *sinistro* o *destro*.

Avremo

$$\text{(I)} \quad \Delta_2 S = \Delta'(-Y, X)_{x,y} = \begin{pmatrix} \dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\alpha_1}{dy} - (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \ , & \dfrac{d\beta}{dx} + \dfrac{d\beta_1}{dy} - 2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) \\ \dfrac{d\gamma}{dx} + \dfrac{d\gamma_1}{dy} - 2(\delta\gamma_1 - \delta_1\gamma) \ , & \dfrac{d\delta}{dx} + \dfrac{d\delta_1}{dy} - (\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) \end{pmatrix};$$

ma

$$\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} = \Delta'(X, Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy} + (\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) \ , & \dfrac{d\beta_1}{dx} - \dfrac{d\beta}{dy} + 2(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1) \\ \dfrac{d\gamma_1}{dx} - \dfrac{d\gamma}{dy} + 2(\delta_1\gamma - \delta\gamma_1) \ , & \dfrac{d\delta_1}{dx} - \dfrac{d\delta}{dy} + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \end{pmatrix}$$

quindi si otterrà un'altra espressione per $\Delta_2' S$

$$\text{(II)} \qquad \Delta_2' S = \begin{pmatrix} \dfrac{d(\alpha - \alpha_1)}{dx} + \dfrac{d(\alpha + \alpha_1)}{dy} \quad , & \dfrac{d(\beta - \beta_1)}{dx} + \dfrac{d(\beta + \beta_1)}{dy} \\ \dfrac{d(\gamma - \gamma_1)}{dx} + \dfrac{d(\gamma + \gamma_1)}{dy} \quad , & \dfrac{d(\delta - \delta_1)}{dx} + \dfrac{d(\delta + \delta_1)}{dy} \end{pmatrix}.$$

Se finalmente sostituiamo per $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, i loro valori espressi mediante A, B, C, D e le loro derivate, avremo una terza espressione per $\Delta_2' S$, cioè

(III) $$\Delta_2 S$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(D\Delta^2 A - A\Delta^2 D + B\Delta^2 C - C\Delta^2 B) + \frac{d(A,D)}{d(x,y)} - \frac{d(B,C)}{d(x,y)}, & A\Delta^2 B - B\Delta^2 A + 2\frac{d(A,B)}{d(x,y)} \\ D\Delta^2 C - C\Delta^2 D + 2\frac{d(D,C)}{d(x,y)}, & \frac{1}{2}(A\Delta^2 D - D\Delta^2 A + C\Delta^2 B - B\Delta^2 C) + \frac{d(B,C)}{d(x,y)} - \frac{d(A,D)}{d(x,y)} \end{pmatrix},$$

ove si è denotato col simbolo $\Delta^2 f$ la espressione $\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2}$, e col simbolo $\frac{d(f,\varphi)}{d(x,y)}$, il determinante funzionale delle f e φ rispetto ad x e y.

2. Cominciamo dalla trasformazione di $\Delta_2' S$.

TEOREMA I. - *Sia*

$$\xi + i\eta = f(x+iy) \quad , \quad \rho = \text{mod.} \frac{df(x+iy)}{d(x+iy)};$$

$$\Delta_2' S_{x,y} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_2' S_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix};$$

avremo

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2\alpha, \rho^2\beta \\ \rho^2\gamma, \rho^2\delta \end{pmatrix}$$

che si potrà anche scrivere simbolicamente

$$\Delta_2' S_{x,y} = \rho^2 \Delta_2' S_{\xi,\eta}.$$

Questo teorema risulta immediatamente dalla forma (III) sotto cui fu posto $\Delta_2' S$ nell'articolo precedente.

Se ne deduce immediatamente:

TEOREMA II. - *Se due campi Σ e Σ' sono rappresentati in modo conforme l'uno sull'altro, ogni sostituzione* S *funzione dei punti del campo Σ che soddisfa in Σ alla condizione $\Delta_2 S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$ conserva, trasportata in Σ', il medesimo carattere.*

3. Sia $S = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ (det. 1) una sostituzione funzione di x e di y tale che

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix};$$

posto

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = X = \frac{dS}{dx} \quad , \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = Y = \frac{dS}{dx},$$

avremo

$$\Delta'(-Y, X)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Supponendo che X , Y siano finite insieme alle derivate dei loro elementi entro un campo σ il cui contorno sia s, sarà

$$\int_s X\,dy\,(-Y)\,dx = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}.$$

Ora se n è la normale ad s e le direzioni positive di n ed s sono tali che la coppia (n, s) è congruente ad (x, y), avremo

$$X\,dy\cdot(-Y)\,dx = \begin{Bmatrix} 1 + \left(\alpha \frac{dy}{ds} - \alpha_1 \frac{dx}{ds}\right) ds \quad , & \left(\beta \frac{dy}{ds} - \beta_1 \frac{dx}{ds}\right) ds \\ \left(\gamma \frac{dy}{ds} - \gamma_1 \frac{dx}{ds}\right) ds \quad , & 1 + \left(\delta \frac{dy}{ds} - \delta_1 \frac{dx}{ds}\right) ds \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 + \left(\alpha \frac{dx}{dn} + \alpha_1 \frac{dy}{dn}\right) ds \quad , & \left(\beta \frac{dx}{dn} + \beta_1 \frac{dy}{dn}\right) ds \\ \left(\gamma \frac{dx}{dn} + \gamma_1 \frac{dy}{dn}\right) ds \quad , & 1 + \left(\delta \frac{dx}{dn} + \delta_1 \frac{dy}{dn}\right) ds \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 + \left(D \frac{dA}{dn} - C \frac{dB}{dn}\right) ds \quad , & \left(A \frac{dB}{dn} - B \frac{dA}{dn}\right) ds \\ \left(A \frac{dC}{dn} - C \frac{dA}{dn}\right) ds \quad , & 1 + \left(A \frac{dD}{dn} - B \frac{dC}{dn}\right) ds \end{Bmatrix} = \frac{dS}{dn}\,ds;$$

quindi

$$\int_s \frac{dS}{dn}\,ds = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix},$$

da cui il teorema:

TEOREMA III. – *Se si ha una sostituzione* S (det. 1) *definita in un campo* Σ *limitato da un contorno s entro cui essa e le derivate prime e seconde dei suoi elementi sono finite e continue, e se*

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

avremo

$$\int_s \frac{dS}{dn}\,ds = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix},$$

ove n denota la normale ad s.

4. Se si ha la sostituzione S (det. 1), tale che

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

posto

$$\frac{dS}{dx} = X \quad , \quad \frac{dS}{dy} = Y,$$

risulterà

$$\Delta'_2(-Y, X)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

quindi (vedi § 3, Art. 9)

$$X dy \cdot (-Y)\, dx$$

sarà un differenziale esatto. Poniamo

$$\int X dy \cdot (-Y)\, dx = S_1,$$

avremo

$$\frac{dS_1}{dx} = X_1 = -Y \quad , \quad \frac{dS_1}{dy} = Y_1 = X,$$

quindi

$$\Delta'_2 S_1 = \Delta'(-Y_1, X_1)_{x,y} = \Delta'(-X, -Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Donde il teorema:

TEOREMA IV. – *Se si ha la sostituzione* S (det. 1) *tale che*

$$\Delta'_2 S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

esisterà sempre una sostituzione coniugata S_1 (det. 1) *tale che*

$$\Delta'_2 S_1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS_1}{dy}, \quad \frac{dS}{dy} = -\frac{dS_1}{dx}.$$

5. Non si avrebbe nessuna difficoltà a trovare, per il parametro differenziale secondo destro, i teoremi *correlativi* a quelli enunciati precedentemente.

§ 8. – GENERALIZZAZIONE AL CASO DI UNA SOSTITUZIONE QUALUNQUE.

1. Nei precedenti paragrafi ci siamo limitati (per presentare da principio il caso più semplice) alle sostituzioni del secondo ordine; i risultati trovati si possono però estendere alle sostituzioni di ordine n senza alcuna difficoltà. Daremo qui un cenno di tale estensione.

2. Abbiasi una sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} \text{(det. 1)}$$

i cui elementi supporremo possedere una derivata determinata e finita. Denoteremo col nome di *differenziale sinistro* e *destro* di S le sostituzioni:

$$dS = \begin{Bmatrix} a_{11} + da_{11}, & a_{12} + da_{12}, & \cdots, & a_{1n} + da_{1n} \\ a_{21} + da_{21}, & a_{22} + da_{22}, & \cdots, & a_{2n} + da_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + da_{n1}, & a_{n2} + da_{n2}, & \cdots, & a_{nn} + da_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{Bmatrix}^{-1},$$

$$Sd = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} a_{11} + da_{11}, & \cdots, & a_{1n} + da_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + da_{n1}, & \cdots, & a_{nn} + da_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Se A_{is} è l'elemento reciproco ad a_{is} nel determinante di S, avremo

$$dS = \begin{Bmatrix} 1 + \Sigma_i A_{1i}\, da_{1i}, & \Sigma_i A_{2i}\, da_{1i}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni}\, da_{1i} \\ \Sigma_i A_{1i}\, da_{2i}, & 1 + \Sigma_i A_{2i}\, da_{2i}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni}\, da_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{1i}\, da_{ni}, & \Sigma_i A_{2i}\, da_{ni}, & \cdots, & 1 + \Sigma_i A_{ni}\, da_{ni} \end{Bmatrix},$$

$$Sd = \begin{Bmatrix} 1 + \Sigma_i A_{i1}\, da_{i1}, & \Sigma_i A_{i1}\, da_{i2}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i1}\, da_{in} \\ \Sigma_i A_{i2}\, da_{i1}, & 1 + \Sigma_i A_{i2}\, da_{i2}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i2}\, da_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{in}\, da_{i1}, & \Sigma_i A_{in}\, da_{i2}, & \cdots, & 1 + \Sigma_i A_{in}\, da_{in} \end{Bmatrix}.$$

Chiameremo rispettivamente *derivata a sinistra* e *derivata a destra* le sostituzioni

$$\text{(I)} \qquad \frac{dS}{dx} = \begin{Bmatrix} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{1i}}{dx}, & \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{1i}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{1i}}{dx} \\ \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{2i}}{dx}, & \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{2i}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{2i}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{ni}}{dx}, & \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{ni}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{ni}}{dx} \end{Bmatrix},$$

$$\text{(II)} \qquad S\frac{d}{dx} = \begin{Bmatrix} \Sigma_i A_{i1} \frac{da_{i1}}{dx}, & \Sigma_i A_{i1} \frac{da_{i2}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i1} \frac{d\alpha_{in}}{dx} \\ \Sigma_i A_{i2} \frac{da_{i1}}{dx}, & \Sigma_i A_{i2} \frac{da_{i2}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i2} \frac{da_{in}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{in} \frac{da_{i1}}{dx}, & \Sigma_i A_{in} \frac{da_{i2}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{in} \frac{da_{in}}{dx} \end{Bmatrix}.$$

e avremo

$$\text{som.}\left(\frac{d}{dx}S\right) = \Sigma_s \Sigma_i A_{si} \frac{da_{si}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{som.}\left(S\frac{d}{dx}\right) = \Sigma_s \Sigma_i A_{is} \frac{da_{is}}{dx} = 0.$$

Le (I) e (II) potranno scriversi

$$\frac{dS}{dx} = \begin{Bmatrix} \frac{da_{11}}{dx}, & \frac{da_{12}}{dx}, \cdots, & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dx}, & \frac{da_{n2}}{dx}, \cdots, & \frac{da_{nn}}{dx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \cdots, & a_{nn} \end{Bmatrix}^{-1},$$

$$S\frac{d}{dx} = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \cdots, & a_{nn} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{da_{11}}{dx}, & \frac{da_{12}}{dx}, \cdots, & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dx}, & \frac{da_{n2}}{dx}, \cdots, & \frac{da_{1n}}{dx} \end{Bmatrix}.$$

I teoremi dimostrati nel § 1 *valgono evidentemente senza modificazione anche nel caso in cui si tratti di una sostituzione d'ordine qualunque.*

Per trovare, come abbiamo fatto nell'Art. 9, § 1, tutte le sostituzioni la cui derivata sinistra è una sostituzione costante, osserviamo che se

$$S = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & 0, & 0, \cdots, 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 x}, & 0, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots, e^{\lambda_n x} \end{Bmatrix}, \sum_1^n {}_i \lambda_i = 0,$$

avremo

$$\frac{dS}{dx} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0, & 0, \cdots, 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots, \lambda_n \end{Bmatrix}.$$

In generale, posto

$$S^{(r_i)} = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_i x}, & 0, & 0, & 0, & \cdots, 0 \\ xe^{\lambda_i x}, & e^{\lambda_i x}, & 0, & 0, & \cdots, 0 \\ \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{\lambda_i x}, & xe^{\lambda_i x}, & e^{\lambda_i x}, & 0, & \cdots, 0 \\ \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{\lambda_i x}, & xe^{\lambda_i x}, & e^{\lambda_i x}, & \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^{r_i-3}}{(r_i-3)!}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^{r_i-4}}{(r_i-4)!}e^{\lambda_i x}, & \cdots, e^{\lambda_i x} \end{Bmatrix}$$

e

$$S = \left\{\overline{\underline{S_1^{(r_1)} S_2^{(r_2)} \cdots S_p^{(r_p)}}}\right\}, \sum_1^p {}_i r_i \lambda_i = 0,$$

si avrà

$$S^{-1} = \left\{\overline{\underline{U_1^{(r_1)} U_2^{(r_2)} \cdots U_p^{(r_p)}}}\right\}$$

ove

$$U_i^{(r_i)} = \begin{vmatrix} e^{-\lambda_i x} & , & 0 & , & 0 & , \cdots , 0 \\ -x e^{-\lambda_i x} & , & e^{-\lambda_i x} & , & 0 & , \cdots , 0 \\ \frac{x^2}{1 \cdot 2} e^{-\lambda_i x} & , & -x e^{-\lambda_i x} & , & e^{-\lambda_i x} & , \cdots , 0 \\ \frac{-x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-\lambda_i x} & , & \frac{x^2}{1 \cdot 2} e^{-\lambda_i x} & , & -x e^{-\lambda_i x} & , \cdots , 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ (-1)^{r_i - 1} \frac{x^{r_i - 1}}{(r_i - 1)!} e^{-\lambda_i x} & , & (-1)^{r_i - 2} \frac{x^{r_i - 2}}{(r_i - 2)!} e^{-\lambda_i x} & , & (-1)^{r_i - 3} \frac{x^{r_i - 2}}{(r_i - 3)!} e^{-\lambda_i x} & , \cdots , e^{-\lambda_i x} \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\frac{dS}{dx} = T$$

ove

$$T = \left\{ \overline{T_1^{(r_1)} T_2^{(r_2)} \cdots T_p^{(r_p)}} \right\}$$

e la sostituzione $T_i^{(r_i)}$ è di ordine r_i ed è data da

$$T_i^{(r_i)} = \begin{vmatrix} \lambda_i , & 0 , & 0 , \cdots , 0 , & 0 \\ 1 , & \lambda_i , & 0 , \cdots , 0 , & 0 \\ 0 , & 1 , & \lambda_i , \cdots , 0 , & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 , & 0 , & , \cdots , 1 , & \lambda_i \end{vmatrix} .$$

Abbiasi ora una sostituzione costante qualunque

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & , a_{12} & , \cdots , a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} & , \cdots , a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots , a_{nn} \end{vmatrix} (\text{som.} = 0).$$

Poniamo A sotto la forma normale; avremo

$$A = B^{-1} \left\{ \overline{T_1^{(r_1)} T_2^{(r_2)} \cdots T_p^{(r_p)}} \right\} B$$

ove B è una sostituzione costante a determinante eguale ad 1. Ne seguirà che

$$\frac{d}{dx} \left[B^{-1} \left\{ \overline{S_1^{(r_1)} S_2^{(r_2)} \cdots S_p^{(r_p)}} \right\} C \right] = A,$$

e quindi la sostituzione più generale la cui derivata sinistra è A, risulterà

$$V = B^{-1} \left\{ \overline{S_1^{(r_1)} S_2^{(r_2)} \cdots S_p^{(r_p)}} \right\} C,$$

ove C è una sostituzione costante arbitraria (det. 1). Le λ_i sono radici dell'equazione di grado n

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda\,, & a_{12} & ,\cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & ,\; a_{22}-\lambda & ,\cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & ,\; a_{n1} & ,\cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare se questa equazione ha tutte le radici $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ diverse fra loro, la V prenderà forma

$$V = B^{-1} \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x}\,, & 0\,,\cdots, & 0 \\ 0 & ,\; e^{\lambda_2 x}\,,\cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & ,\; 0 \;,\cdots, & e^{\lambda_n x} \end{Bmatrix} C.$$

3. Il concetto di integrale *destro* e *sinistro* di una sostituzione può egualmente estendersi alle sostituzioni d'ordine n; così se si avrà la sostituzione

$$(3) \qquad \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & ,\; \alpha_{12} & ,\cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & ,\; \alpha_{22} & ,\cdots \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & ,\; \alpha_{n2} & ,\cdots \alpha_{nn} \end{Bmatrix} (\text{som. } 0)$$

definita per tutti i valori di x in un intervallo $(p \cdots q)$, diviso (a partire da p) questo intervallo in n parti $h_1, h_2 \cdots h_n$, denotando con $(\alpha_{is})_r$ un valore di α_{is} compreso nell'intervallo h_r, formeremo i due prodotti

$$\prod_1^n{}_r \begin{Bmatrix} 1+(\alpha_{11})_r h_r\,, & (\alpha_{12})_r h_r\,,\cdots, & (\alpha_{1n})_r h_r \\ (\alpha_{21})_r h_r\,, & 1+(\alpha_{22})_r h_r\,,\cdots, & (\alpha_{2n})_r h_r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_{n1})_r h_r\,, & (\alpha_{n2})_r h_r\,,\cdots, & 1+(\alpha_{nn})_r h_r \end{Bmatrix}$$

$$\prod_n^1{}_r \begin{Bmatrix} 1+(\alpha_{11})_r h_r\,, & (\alpha_{12})_r h_r\,,\cdots, & (\alpha_{1n})_r h_r \\ (\alpha_{21})_r h_r\,, & 1+(\alpha_{22})_r h_r\,,\cdots, & (\alpha_{2n})_r h_r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_{n1})_r h_r\,, & (\alpha_{n2})_r h_r\,,\cdots, & 1+(\alpha_{nn})_r h_r \end{Bmatrix}$$

e ne cercheremo i limiti, quando le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tenderanno a zero. Se questi limiti esisteranno, essi saranno rispettivamente l'integrale sinistro e l'integrale destro della sostituzione (3). *I teoremi del* § 2 *possono estendersi senza modificazione alle sostituzioni d'ordine n.*

4. Per le sostituzioni di più variabili e di ordine n, avremo che il differenziale primo potrà porsi sotto la forma

$$dS = \prod_1^n{}_i S_i \, dx_i\,,$$

essendo le sostituzioni S_i sostituzioni d'ordine n con la somma dei termini in diagonale eguale allo zero.

Se

$$S = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{Bmatrix},$$

risulterà

$$S_r = \frac{dS}{dx_r} = \begin{Bmatrix} \Sigma_i A_{1i}\frac{da_{1i}}{dx_r}, & \Sigma_i A_{2i}\frac{da_{1i}}{dx_r}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni}\frac{da_{1i}}{dx_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{1i}\frac{da_{ni}}{dx_r}, & \Sigma_i A_{2i}\frac{da_{ni}}{dx_r}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni}\frac{da_{ni}}{dx_r} \end{Bmatrix}.$$

Analogamente a quanto venne fatto nel § 3, art. 5, avremo

$$\frac{d}{dx_r}\cdot\frac{d}{dx_s}S = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{1i}\frac{da_{1i}}{dx_s}\right), & \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{2i}\frac{da_{1i}}{dx_s}\right), & \cdots, & \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{ni}\frac{da_{1i}}{dx_s}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{1i}\frac{da_{ni}}{dx_s}\right), & \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{2i}\frac{da_{ni}}{dx_s}\right), & \cdots, & \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{ni}\frac{da_{ni}}{dx_s}\right) \end{Bmatrix},$$

mentre, posto

$$d^2 S = \prod_{1}^{n}{}_i \frac{d^2 S}{dx_i^2}dx_i^2 \cdot \prod_{r<s}^{1,n} 2\frac{d^2 S}{d(x_r x_s)}dx_r\,dx_s,$$

si avrà

$$\frac{d^2 S}{d(x_r x_s)}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r}\Sigma_i A_{1i}\frac{da_{1i}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s}\Sigma_i A_{1i}\frac{da_{1i}}{dx_r}\right), & \cdots, & \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r}\Sigma_i A_{ni}\frac{da_{1i}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s}\Sigma_i A_{ni}\frac{da_{1i}}{dx_r}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r}\Sigma_i A_{1i}\frac{da_{ni}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s}\Sigma_i A_{1i}\frac{da_{ni}}{dx_r}\right), & \cdots, & \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r}\Sigma_i A_{ni}\frac{da_{ni}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s}\Sigma_i A_{ni}\frac{da_{ni}}{dx_r}\right) \end{Bmatrix}.$$

Da queste formule si deduce immediatamente *la condizione affinché una espressione differenziale sia un differenziale esatto* (1).

Dinotiamo infatti rispettivamente con $\alpha_{i,k}^{(r)}$ l'elemento della linea i della colonna k della sostituzione $\frac{dS}{dx_r}$ e con λ_{ik} l'elemento della linea i e della colonna k della sostituzione $\frac{d^2 S}{d(x_r x_s)}$, avremo

$$(4)\qquad \alpha_{ik}^{(r)} = \Sigma_g A_{kg}\frac{da_{ig}}{dx_r}\quad,\qquad (5)\qquad \lambda_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} + \frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r}\right).$$

(1) Vedi la nota inserita alla fine (p. 289).

Ora

$$\frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r} = \frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} - \Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dx_s} \frac{da_{ig}}{dx_r} - \frac{dA_{kg}}{dx_r} \frac{da_{ig}}{dx_s} \right).$$

Dalle (4) si deduce

$$\frac{da_{ig}}{dx_r} = \Sigma_t a_{tg} \alpha_{it}^{(r)},$$

quindi

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_s} \frac{da_{ig}}{dx_r} = \Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_s} \Sigma_t a_{tg} \alpha_{it}^{(r)} = \Sigma_t \alpha_{it}^{(r)} \Sigma_g a_{tg} \frac{dA_{hg}}{dx_s}.$$

Ma

$$\Sigma_g a_{tg} A_{kg} = \begin{cases} 1 \text{ (se } t = k), \\ 0 \text{ (se } t \neq k), \end{cases}$$

onde derivando rispetto ad x_s

$$\Sigma_g \frac{da_{tg}}{dx_s} A_{kg} + \Sigma_g a_{tg} \frac{dA_{kg}}{dx_s} = 0$$

e

$$\Sigma_g a_{tg} \frac{dA_{kg}}{dx_s} = - \Sigma_g \frac{da_{tg}}{dx_s} A_{kg} = - \alpha_{tk}^{(s)},$$

da cui

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_s} \frac{da_{ig}}{dx_r} = - \Sigma_t \alpha_{it}^{(r)} \alpha_{tk}^{(s)},$$

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_r} \frac{da_{ig}}{dx_s} = - \Sigma_t \alpha_{it}^{(s)} \alpha_{tk}^{(r)},$$

$$\Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dx_s} \frac{da_{ig}}{dx_r} - \frac{dA_{kg}}{dx_r} \frac{da_{ig}}{da_s} \right) = \Sigma_t \left(\alpha_{it}^{(s)} \alpha_{tk}^{(r)} - \alpha_{it}^{(r)} \alpha_{tk}^{(s)} \right).$$

Avremo dunque

$$\lambda_{ik} = \frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} - \frac{1}{2} \Sigma_t \left(\alpha_{it}^{(s)} \alpha_{tk}^{(r)} - \alpha_{it}^{(r)} \alpha_{tk}^{(s)} \right)$$

come pure

$$\lambda_{ik} = \frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r} - \frac{1}{2} \Sigma_t \left(\alpha_{it}^{(r)} \alpha_{tk}^{(s)} - \alpha_{it}^{(s)} \alpha_{tk}^{(r)} \right).$$

Ne segue che le condizioni affinché

$$\prod_{1}^{m}{}_r S_r \, dx_r, \tag{6}$$

sia un differenziale esatto di una sostituzione dS, risulteranno

$$\mu_{ik} = \frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} - \frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r} - \Sigma_t \left(\alpha_{it}^{(s)} \alpha_{tk}^{(r)} - \alpha_{it}^{(r)} \alpha_{tk}^{(s)} \right) = 0 \qquad \begin{matrix} (r, s = 1, 2 \cdots m, r \neq s) \\ (i, k = 1, 2 \cdots n). \end{matrix}$$

Denotiamo ora con T'_x la sostituzione che si ottiene da T derivandone tutti gli elementi rispetto ad x, e supponendo X , Y sostituzioni funzioni di x e y, poniamo

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = Y'_x - X'_y + YX - XY.$$

In tal modo otterremo

$$\Delta'(S_s, S_r)_{x_s, x_r} = \begin{vmatrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \cdots, \mu_{1n} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \cdots, \mu_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{n1}, \mu_{n2}, \cdots, \mu_{nn} \end{vmatrix},$$

quindi le condizioni affinché la (6) sia un differenziale esatto si esprimeranno con

$$\Delta'(S_r, S_s)_{x_r, x_s} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n),$$

ove col simbolo o si intende di rappresentare una sostituzione i cui elementi sono tutti nulli.

5. Posto $X = \dfrac{dS}{dx}$ si otterranno immediatamente le formule

$$(S^{-1}TS)'_x = S^{-1}(T'_x + TX - XT)S, \tag{7}$$

e posto $T = \dfrac{dS}{dy} = X_1$,

$$(S^{-1}X_1S)'_x = S^{-1}(X'_{1x} + X_1X - XX_1)S;$$

essendo $X = \dfrac{dS}{dx}$

$$0 = \Delta'(X, X_1)_{x,y} = X'_{1x} - X'_y + X_1X - XX_1,$$

quindi

$$(S^{-1}X_1S)'_x = S^{-1}(X'_y)S.$$

Ma

$$(S^{-1}YS)'_x = S^{-1}(Y'_x + YX - XY),$$

onde sottraendo

$$(S^{-1}(Y - X_1)S)'_x = S^{-1}(\Delta'(X, Y)_{x,y})S. \tag{8}$$

Questa formula comprende come caso particolare il teorema I del § 4. Analogamente si ottengono le formule che comprendono gli altri teoremi di quel paragrafo.

Sarà quindi facile riconoscere che queste condizioni, oltre essere necessarie, sono anche sufficienti affinché la (6) sia un differenziale esatto.

In modo pure perfettamente analogo si generalizzano le condizioni di monodromia di una sostituzione di due variabili ottenuta integrando un differenziale esatto, come pure ciò che si riferisce alla integrazione multipla.

6. Resta ancora da vedere la forma che assume il parametro differenziale secondo sinistro di una sostituzione funzione di due variabili nel caso in cui l'ordine sia n.

Perciò pongasi (essendo S funzione di x e y)

$$X = \frac{dS}{dx} \quad , \quad Y = \frac{dS}{dy}$$

$$X = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \cdots, \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad , \quad Y = \begin{vmatrix} \beta_{11}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{1n} \\ \beta_{21}, \beta_{22}, \cdots, \beta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1}, \beta_{n2}, \cdots, \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Avremo

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = 0,$$

$$\Delta'_2 S = \Delta'(-Y, X)_{x,y}$$

e quindi (vedi Art. 3)

$$\Delta'_2 S = \begin{vmatrix} \frac{d(\alpha_{11}-\beta_{11})}{dx} + \frac{d(\alpha_{11}+\beta_{11})}{dy}, \ldots, \frac{d(\alpha_{1n}-\beta_{1n})}{dx} + \frac{d(\alpha_{1n}+\beta_{1n})}{dy} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d(\alpha_{n1}-\beta_{n1})}{dx} + \frac{d(\alpha_{n1}+\beta_{n1})}{dy}, \ldots, \frac{d(\alpha_{nn}-\beta_{nn})}{dx} + \frac{d(\alpha_{nn}+\beta_{nn})}{dy} \end{vmatrix}.$$

Ora se

$$S = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

avremo

$$\alpha_{ik} = \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dx} \quad , \quad \beta_{ik} = \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dy};$$

$$\frac{d(\alpha_{ik}-\beta_{ik})}{dx} + \frac{d(\alpha_{ik}+\beta_{ik})}{dy}$$

$$= \Sigma_g A_{kg} \Delta^2 a_{ik} + \Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dx}\frac{da_{ig}}{dx} + \frac{dA_{kg}}{dy}\frac{da_{ig}}{dy}\right) + \Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dy}\frac{da_{ig}}{dx} - \frac{dA_{kg}}{dx}\frac{da_{ig}}{dy}\right).$$

Si ha inoltre

$$\Sigma_g a_{ig} A_{kg} = \begin{cases} 0 \ (k \neq i) \\ 1 \ (k = i), \end{cases}$$

e derivando

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx} a_{ig} + \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dx} = 0,$$

$$\Sigma_g \frac{d^2 A_{kg}}{dx^2} a_{ig} + \Sigma_g A_{kg} \frac{d^2 a_{ig}}{dx^2} + 2\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx}\frac{da_{ig}}{dx} = 0,$$

onde

$$\Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dx} \frac{da_{ig}}{dx} + \frac{dA_{kg}}{dy} \frac{da_{ig}}{dy} \right) = -\frac{1}{2} \Sigma_g \, a_{ig} \, \Delta^2 A_{kg} - \frac{1}{2} \Sigma_g \, A_{kg} \, \Delta^2 a_{ig} \, .$$

Ne segue che

$$\frac{d(\alpha_{ik} - \beta_{ik})}{dx} + \frac{d(\alpha_{ik} + \beta_{ik})}{dy} = \frac{1}{2} \Sigma_g (A_{kg} \, \Delta^2 a_{ig} - a_{ig} \, \Delta^2 A_{kg}) + \Sigma_g \frac{d(a_{ig}, A_{kg})}{d(x, y)} \, .$$

Avremo dunque che il parametro differenziale secondo sinistro d'una sostituzione potrà scriversi

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} \nu_{11}, & \nu_{12}, & \cdots, & \nu_{1n} \\ \nu_{21}, & \nu_{22}, & \cdots, & \nu_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \nu_{n1}, & \nu_{n2}, & \cdots, & \nu_{nn} \end{pmatrix} .$$

con

$$\nu_{ik} = \frac{1}{2} \Sigma_g (A_{kg} \, \Delta^2 a_{ig} - a_{ig} \, \Delta^2 A_{kg}) + \Sigma_g \frac{d(a_{ig}, A_{kg})}{d(x, y)} \, .$$

NOTA AL § 3, ART. 7 E AL § 8, ART. 4.

Si tratta di risolvere la questione: *Dato un prodotto di sostituzioni infinitesime*

$$\prod_{1}^{n}{}_i \, X_i \, dx_i$$

trovare le condizioni affinché esso sia il differenziale di una sostituzione S.

Denotiamo con S'_{x_r} la sostituzione che si ottiene da S derivandone tutti gli elementi rispetto ad x_r; dovremo avere

$$X_r = \frac{dS}{dx_r} = S'_{x_r} \, S^{-1}$$

onde

$$S'_{x_r} = X_r \, S$$

e derivando rispetto ad x_s

$$(S'_{x_r})'_{x_s} = (X_r)'_{x_s} \, S + X_r \, S'_{x_s} = (X_r)'_{x_s} \, S + X_r \, X_s \, S = [(X_r)'_{x_s} + X_r \, X_s] \, S \, ;$$

scambiando x_r con x_s il primo membro non deve cambiare, quindi

$$[(X_r)'_{x_s} + X_r \, X_s] \, S = [(X_s)'_{x_r} + X_s \, X_r) \, S \, ,$$

vale a dire

$$(X_r)'_{x_s} - (X_s)'_{x_r} + X_r \, X_s - X_s \, X_r = \Delta' (X_s \, X_r)_{x_s \, x_r} = 0.$$

INDICE