XVI.

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

« Rend. Acc. Lincei », 4, 3, 1887, pp. 393-396 (*)

Nella Memoria *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, \varkappa)$ *darstellbaren Functionen* (1) RIEMANN tracciò la via da seguirsi nello studio degli integrali delle equazioni differenziali lineari, studio che egli stesso iniziò in una Memoria scritta nel 1857 e che lasciò inedita (2).

Il metodo tenuto dal RIEMANN in questa questione è simile a quello applicato con tanto successo agli integrali abeliani. Egli mise in evidenza l'analogia fra le proprietà degli integrali di funzioni monodrome in dati campi e quelle dei sistemi di integrali di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti pure monodromi: mentre i primi hanno delle discontinuità che consistono in differenze costanti dei loro valori dalle due parti di certe linee, i sistemi di integrali fondamentali delle equazioni differenziali lineari lungo le linee di discontinuità sono tali, che i valori da una parte si deducono da quelli dall'altra per mezzo di *sostituzioni lineari a coefficienti costanti*, e tali sostituzioni caratterizzano il modo di comportarsi degli integrali intorno ai punti di diramazione.

Inversamente RIEMANN dimostrò che ogni sistema di funzioni aventi discontinuità di questa specie, è un sistema di integrali di equazioni differenziali lineari a coefficienti monodromi.

Sono ben noti i progressi fatti in questi ultimi anni dalla teoria delle equazioni differenziali lineari, dovuti fra gli altri ai lavori di FUCHS e di KLEIN, i quali hanno condotto questa teoria ad un alto grado di sviluppo. Essi diedero origine ai fecondi studî del POINCARÉ che hanno aperto un nuovo e vasto campo di ricerche.

Se si segue la teoria delle equazioni differenziali nel suo svolgersi, si può notare che già nelle Memorie di RIEMANN si manifesta il suo stretto legame colla teoria delle sostituzioni, e che i successivi lavori sullo stesso argomento hanno sempre più posto in evidenza tale relazione. Nei lavori di FUCHS, KLEIN, POINCARÉ, JORDAN e di molti altri, si ha continuamente ricorso alla teoria delle sostituzioni per trattare delle questioni sulle equazioni differenziali.

(*) Nota presentata dal Presidente F. BRIOSCHI a nome del Socio E. BETTI.

(1) « Abh. d. Gesellschaft. d. Wiss. zu Göttingen. », Bd. VII, 1857.

(2) Riemann's Werke — Nachlass — s. 357.

Il legame fra le due teorie è però molto più intimo di quanto può risultare a primo aspetto, perché si può dimostrare che vi è una dipendenza diretta dell'una dall'altra, la quale pone anche in chiaro la stretta analogia che sussiste fra la integrazione delle funzioni e quella delle equazioni differenziali lineari. Si possono infatti trovare due operazioni infinitesimali sulle sostituzioni (i cui elementi si immaginano variabili) analoghe alla derivazione e alla integrazione ordinarie, le quali danno direttamente il passaggio dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale lineare ai suoi coefficienti, e inversamente dai coefficienti agli integrali fondamentali.

Abbiasi una sostituzione lineare S di ordine n (a determinante sempre diverso da zero) i cui elementi sono funzioni finite e continue di una variabile x derivabili rispetto a questa variabile, e si consideri la sostituzione per due valori infinitamente vicini della variabile: x e $x+dx$. Denoteremo le due sostituzioni rispettivamente con S_x e S_{x+dx}.

Formiamo

$$S_x^{-1}\, S_{x+dx} \quad , \quad S_{x+dx}\, S_x^{-1} ;$$

queste saranno due sostituzioni infinitamente prossime alla identità, vale a dire tutti i loro elementi saranno infinitamente piccoli eccettuati quelli lungo la diagonale che differiranno infinitamente poco dalla unità. Tolta l'unità da questi elementi, dividiamo ogni termine per dx e passiamo al limite col far tendere il dx a zero. È facile dimostrare che le due sostituzioni limiti esistono, ed esse possono considerarsi come le due *derivate* della sostituzione S_x rapporto ad x, prese rispettivamente *a destra* e *a sinistra*.

Inversamente data una sostituzione T i cui elementi sono funzioni continue di una variabile x, si può dividere l'intervallo in cui essa è definita in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ e considerare le sostituzioni $T_1, T_2, \cdots, T_n$ corrispondenti a n valori di x compresi negli intervalli suddetti. Moltiplicati gli elementi di T_i per h_i e aggiunta l'unità a quelli in diagonale, si otterrà una sostituzione R_i che si avvicinerà indefinitamente alla identità coll'impiccolire indefinito di h_i.

Peraltro i due prodotti di sostituzioni

$$R_1\, R_2 \cdots R_n \quad , \quad R_n\, R_{n-1} \cdots R_2\, R_1$$

coll'impiccolire indefinito di $h_1\, h_2 \cdots h_n$ tenderanno in generale verso due sostituzioni limiti diverse dalla identità.

Questa operazione può chiamarsi *integrazione di una sostituzione* ed è evidente che, come la derivazione, essa può eseguirsi in due modi diversi che possono rispettivamente denotarsi con *integrazione a destra* e *a sinistra*.

Le operazioni così stabilite di derivazione e di integrazione sono inverse una dell'altra, vale a dire *se si integra a destra una sostituzione, e poi considerando la sostituzione integrale come funzione del limite superiore dell'intervallo di integrazione, si deriva a destra, si ritrova la sostituzione primitiva*, e lo stesso vale per le integrazioni e derivazioni a sinistra.

Come teorema fondamentale si ha che *la derivata a destra di una sostituzione non varia se si moltiplica a sinistra la sostituzione per una sostituzione costante, e che tutte le sostituzioni che hanno per derivata a destra una stessa sostituzione, debbono differire per sostituzioni costanti che moltiplicano a sinistra.*

Un teorema correlativo si ottiene per la derivazione a sinistra. Si ha inoltre la proprietà:

Derivando o integrando a destra o a sinistra la trasformata di una sostituzione variabile mediante una sostituzione costante, si ottiene come risultato la trasformata mediante la sostituzione costante della derivata o dell'integrale di quella variabile.

La proposizione che lega la teoria della integrazione e della derivazione delle sostituzioni colla teoria delle equazioni differenziali lineari è la seguente:

La integrazione di una equazione differenziale lineare omogenea di un ordine qualunque può ridursi alla integrazione di una sostituzione. Così l'integrale *sinistro* della sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 & , 0 & , \cdots, 0 & , 0 \\ 0, & 0 & , 1 & , \cdots, 0 & , 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 & , 1 \\ p_n, & p_{n-1} & , p_{n-2} & , \cdots, p_2 & , 0 \end{pmatrix}$$

ove $p_2, p_3, \cdots p_n$ sono funzioni di x, è la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & , v_2 & , v_3 & , \cdots, v_{n-1} & , v_n \\ v_1' & , v_2' & , v_3' & , \cdots, v_{n-1}' & , v_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{(n-1)} & , v_2^{(n-1)} & , v_3^{(n-1)} & , \cdots, v_{n-1}^{(n-1)} & , v_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ove $v_1, v_2, \cdots, v_n$ rappresentano un sistema di integrali fondamentali della equazione differenziale

$$y^{(n)} = p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y.$$

Adoperando i simboli analoghi a quelli che si usano nel calcolo scriveremo

$$S = \int T\, dx \quad , \quad T = \frac{dS}{dx}.$$

Riconosciuto in tal modo il legame fra la teoria delle due operazioni infinitesimali sulle sostituzioni e quella delle equazioni differenziali lineari, risulta naturale il pensare che possa fondarsi una teoria delle equazioni differenziali lineari avente a base il *calcolo differenziale ed integrale delle sostituzioni*. – Con la scorta dei teoremi del calcolo e con metodo analogo a quello che si segue nello studio degli integrali delle funzioni, si potrà cercare quali dei teoremi già noti potranno estendersi alle sostituzioni, e con tale generalizzazione quali modificazioni subiranno; i teoremi così ottenuti potranno interpretarsi come altrettante proprietà relative alle equazioni differenziali lineari.