Nota II.

Ibidem, pp. 141–146 (*).

§ 4. Funzioni dipendenti da un'altra funzione con punti eccezionali.

11. Nei paragrafi precedenti, studiando

$$y = y \left| \left[\varphi (x) \right] \right|_{A}^{B}$$

abbiamo assoggettato la $\varphi (x)$ alla sola condizione di essere continua. È facile vedere che i risultati già trovati non subirebbero modificazioni supponendo che $\varphi (x)$ e le sue variazioni dovessero avere le derivate prime, seconde, terze, ecc.

12. Abbiamo pure supposto nei § precedenti che y dipendesse dai valori di $\varphi (x)$ entro AB in modo tale (condizione I, § 2) che, variando $\varphi (x)$ entro un intervallo h di meno di ε e facendo impiccolire indefinitamente ε e h, la variazione corrispondente della y fosse un infinitesimo d'ordine non inferiore a εh.

Peraltro può presentarsi il caso che per gli intorni di certi punti entro AB questa condizione non si verifichi. Supporremo che se si esclude dall'intervallo AB il punto C, mediante un intorno arbitrariamente piccolo di questo punto, nelle parti rimanenti vengano soddisfatte le condizioni stabilite nei paragrafi precedenti, e considereremo varî casi.

13. 1° *Caso. – Preso un intorno h del punto* C *e in esso variando* $\varphi (x)$ *meno di* ε, *sia*

$$\lim_{\substack{h=0 \\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = 0, \tag{10}$$

essendo Δy *l'accrescimento corrispondente di* y.

Preso un valore di t diverso dal valore dell'indice x_1 del punto C, la

$$y' \left| \left[\varphi (x) , t \right] \right|$$

sarà finita e continua rispetto a t. Cominciamo dal dimostrare che se $\psi (x)$ è continua ed è sempre inferiore ad un valore finito M

$$\int_{A}^{B} y' \left| \left[\varphi (x) , t \right] \right| \psi (t) \, dt$$

esiste ed ha un valore determinato e finito.

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

Infatti, mediante un intorno $h = mn$ di x_1, separiamo questo punto dai rimanenti dell'intervallo AB. A cagione della condizione (10), basterà prendere ε e h minori di un valore δ, perché si abbia

$$\frac{\Delta y}{\varepsilon} < \sigma,$$

essendo σ piccolo ad arbitrio. Prendiamo pertanto un intervallo $(mn) < \delta$ e fissiamo due punti p, q compresi fra m e x_1, oppure fra x_1 e n. Diamo a $\varphi(x)$ una variazione *continua* $\eta\theta(x)$, tale che $\theta(x)$ sia nulla fra A e p e fra q e B, eguale a $\psi(t)$ fra $p + k$ e $q - k$ e sempre crescente o sempre decrescente nei due intervalli $(p, p + k)$, e $(q - k, q)$. Basterà che si abbia

$$\eta < \frac{\delta}{\mathrm{M}},$$

in valore assoluto, perché sia

$$\frac{y\,|[\varphi(x) + \eta\theta(x)]| - y\,|[\varphi(x)]|}{\eta \mathrm{M}} < \sigma$$

ovvero

$$\frac{y\,|[\varphi(x) + \eta\theta(x)]| - y\,|[\varphi(x)]|}{\eta} < \mathrm{M}\sigma.$$

Facciamo tendere η a zero, avremo al limite

$$\int_p^q y'\,|[\varphi(x), t]|\,\theta(t)\,dt \leq \mathrm{M}\sigma,$$

ovvero

$$\int_{p+k}^{q-k} y'\,|[\varphi(x), t]|\,\psi(t)\,dt + 2\,\vartheta k \mathrm{LM} \leq \mathrm{M}\sigma,$$

essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $y'\,|[\varphi(x), t]|$ entro (pq) e ϑ essendo compreso fra -1 e $+1$. Poiché la relazione precedente vale qualunque sia k, così dovremo avere

$$\int_p^q y'\,|[\varphi(x), t]|\,\psi(t)\,dt \leq \mathrm{M}\sigma.$$

Questa relazione ci dimostra che gli integrali definiti singolari soddisfano alla condizione voluta, affinché

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y'\,|[\varphi(x), t]|\,\psi(t)\,dt$$

esista e sia determinato e finito.

Ciò premesso abbiasi

$$y\,|[\varphi(x) + \eta\psi(x)]|.$$

Si prenda un intorno $m_1 n_1$ di x_1 entro mn e $\theta(x)$ eguale a $\psi(x)$ fra A e m e fra n e B, eguale a zero fra m_1 e n_1 e sempre crescente o sempre decrescente negli intervalli $mm_1 = nn_1 = k$. Avremo

$$\psi(x) = \theta(x) + \alpha(x),$$

e $\alpha(x)$ potrà essere diversa da zero soltanto nell'intervallo mn, ove avrà un valore non superiore a $2\mathrm{M}$.

Ora

$$y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|$$

$$= y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,| + y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|.$$

Prendasi

$$\eta < \frac{\delta}{2\mathrm{M}} \quad \text{e} \quad mn < \delta,$$

avremo in valore assoluto

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta} < 2\mathrm{M}\sigma.$$

Si ha poi

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,|}{\eta} = \int_{\mathrm{A}}^{m_1} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x),\, t]\,|\,\theta(t)\,dt$$

$$+ \int_{n_1}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x),\, t]\,|\,\theta(t)\,dt,$$

essendo ϑ compreso fra -1 e 1; quindi

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta} = \int_{\mathrm{A}}^{m} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x),\, t]\,|\,\psi(t)\,dt$$

$$+ \int_{n}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x),\, t]\,|\,\psi(t)\,dt + \vartheta_1(2\mathrm{M}\sigma + 2k\mathrm{LM}),$$

in cui L denota il limite superiore dei valori di $y'\,|\,[\varphi(x) + \lambda(x),\, t]\,|$ negli intervalli mm_1 e nn_1. Facciamo ora impiccolire indefinitamente η e contemporaneamente anche k, si potrà fare in modo che il rapporto

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta}$$

venga a differire da

$$\int_{\mathrm{A}}^{m} y'\,|\,[\varphi(x),\, t]\,|\,\psi(t)\,dt + \int_{n}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x),\, t]\,|\,\psi(t)\,dt$$

meno di $2\mathrm{M}\sigma$; ma possiamo prendere $\delta > mn$ così piccolo, che la somma precedente differisca tanto poco quanto si vuole da

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x),\, t]\,|\,\psi(t)\,dt,$$

e σ si riduca minore di qualunque quantità assegnabile. Dunque

$$\lim_{\eta=0} \frac{y\,|\,[\varphi(x)+\eta\psi(x)]\,|-y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta}=\int_A^B y'\,|\,[\varphi(x),t]\,\psi(t)\,dt;$$

e quindi anche in questo caso potremo porre

$$\delta y\,|\,[\varphi(x)]\,|=\int_A^B y'\,|\,[\varphi(x),t]\,|\,\delta\varphi(t)\,dt.$$

Se la singolarità considerata invece di presentarsi nel punto C soltanto si verificasse in più punti entro AB, purché fosse sempre per tutti soddisfatta la condizione (10), si giungerebbe pure ai precedenti risultati.

14. 2° *Caso. - Diamo in un intorno* h *di* C (*indice* x_1) *un accrescimento alla* $\varphi(x)$ *minore di* ε, *tale che in* x_1 *il valore dell'accrescimento sia* ρ *e supponiamo che coll'impicciolire indefinito di* ε *e di* h *sia*

$$\lim_{\substack{h=0\\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta y}{\varepsilon}=a_1 \lim \frac{\rho}{\varepsilon},$$

essendo a_1 *un valore determinato e finito.*

Per trattare questo secondo caso consideriamo

$$z\,|\,[\varphi(x)]\,|=y\,|\,[\varphi(x)]\,|-a_1\,\varphi(x_1).$$

Diamo a $\varphi(x)$ nell'intorno h di x_1 l'accrescimento $\psi(x)$ eguale a ρ nel punto x_1 e inferiore a ε, avremo

$$\Delta z=z\,|\,[\varphi(x)+\psi(x)]\,|-z\,|\,[\varphi(x)]\,|=\Delta y-a_1\,\rho,$$

quindi

$$\frac{\Delta z}{\varepsilon}=\frac{\Delta y}{\varepsilon}-a_1\frac{\rho}{\varepsilon},$$

e perciò

$$\lim_{\substack{h=0\\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta z}{\varepsilon}=0,$$

il che riconduce per la $z\,|\,[\varphi(x)]\,|$ al caso precedente. Ora è evidente che per

$$t \gtrless x_1\,,\; z'\,|\,[\varphi(x),t]\,|=y'\,|\,[\varphi(x),t]\,|\,,$$

quindi

$$\delta z=\int_A^B y'\,|\,[\varphi(x),t]\,|\,\delta\varphi\cdot dt$$

e dalla relazione

$$\delta z=\delta y-a_1\,\delta\varphi(x_1)$$

segue

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi(t) \cdot dt + a_1 \, \delta\varphi(x).$$

Quando ci troveremo in questo secondo caso, per mettere in evidenza la proprietà che ha la y in x_1, si porrà

$$y = y \,|\, [\varphi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}] \,|\, (\varphi(x_1))$$

e si dirà che *y oltre che da $\varphi(x)$ in tutto* AB, *dipende specialmente dal valore di* $\varphi(x)$ in x_1.

In generale la quantità a_1 dipenderà da $\varphi(x)$; la denoteremo con

$$y'_{\varphi(x_1)} \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}] \,|$$

e quindi

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi(t) \cdot dt + y'_{\varphi(x_1)} \, \delta\varphi(x_1).$$

Se ciò che vale pel punto x_1 valesse anche per i punti $x_2, x_3, \ldots x_n$ entro AB, porremmo

$$y = y \,|\, [\varphi(x)] \,|\, (\varphi(x_1), (\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n))$$

e

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| \cdot \delta\varphi(t)\, dt + \sum_1^n y'_{\varphi(x_i)} \, \delta\varphi(x_i).$$

15. 3° *Caso. — Supponiamo che* $\varphi(x)$ *e le sue variazioni debbano possedere le prime* m_1 *derivate. Diamo a* $\varphi(x)$ *una variazione entro un intorno* h *di* x_1 *tale che la variazione stessa e le sue prime* m_1 *derivate siano inferiori a* ε *e rispettivamente eguali a* $\rho_0, \rho_1 \cdots \rho_{m_1}$ in x_1. *Facciamo impiccolire indefinitamente* ε *ed* h *in modo che, se* ρ_i/ε *tende verso* k_i, *denotando con* Δy *l'accrescimento di* y, *sia*:

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ h=0}} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = \sum_0^{m_1} a_p \, k_p$$

essendo a_p *valori determinati e finiti*.

Se poniamo

$$z \,|\, [\varphi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi(x)] \,| - \sum_0^{m_1} a_p \, \varphi^{(p)}(x_1)$$

e diamo a $\varphi(x)$ un accrescimento $\psi(x)$ diverso da zero solo entro h, inferiore ad ε e tale che $\psi^{(p)}(x_1) = \rho_p$ avremo

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\h=0}} \frac{\Delta z}{\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\h=0}} \frac{z\,|\,[\varphi(x)+\psi(x)]\,| - z\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\varepsilon} = 0.$$

La $z\,|\,[\varphi(x)]\,|$ soddisfa quindi alle condizioni poste nel primo caso trattato, per conseguenza

$$\delta z = \int_A^B z'\,|\,[\varphi(x), t]\,|\,\delta\varphi(t)\,dt$$

e poiché per $t \gtrless x_1$

$$z'\,|\,[\varphi(x), t]\,| = y'\,|\,[\varphi(x), t]\,|,$$

così

$$\delta y = \int_A^B y'\,|\,[\varphi(x), t]\,|\,\delta\varphi(t)\,dt + \sum_0^{m_1} a_p \cdot \delta\varphi^{(p)}(x_1).$$

Se ciò che vale pel punto x_1, valesse anche analogamente per i punti $x_2, x_3, \cdots, x_n$, allora

$$\delta y = \int_A^B y'\,|\,[\varphi(x), t]\,|\,\delta\varphi(t)\cdot dt + \sum_i^n \sum_p^{m_i} a_{pi}\,\delta\varphi^{(p)}(x_i),$$

e si scriverebbe

$$y = y\,|\,[\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}]\,|\,(\varphi(x_1), \varphi'(x_1)\cdots\varphi^{m_1}(x_1)\cdots\varphi(x_n)\cdots\varphi^{m_n}(x_n)),$$

cioè y oltre che da $\varphi(x)$ in tutto AB, dipenderebbe *specialmente* dai valori di $\varphi(x)$ nei punti $x_1, x_2 \cdots x_n$ e dalle sue derivate, rispettivamente degli ordini $m_1, m_2 \cdots m_n$, prese nei punti stessi.

Le a_{pi} dipendono da $\varphi(x)$. Porremo

$$a_{pi} = y'_{\varphi^{(p)}(x_i)}\,|\,[\varphi(x)]\,|.$$

Le quantità $y'_{\varphi^{(p)}(x_i)}$ godono di varie notevoli proprietà, ma per brevità tralasceremo di esporle, accennando invece a qualche esempio per chiarire ciò che fu detto fin qui.