Nota III.

Ibidem, pp. 153–158 (*).

§ 5. – Questioni particolari.

17. Cominciamo dal supporre

$$y' \left| \left[\varphi \left(\underset{A}{\overset{B}{x}} \right), t \right] \right|$$

sempre eguale a zero per tutti i valori di t e di $\varphi(x)$. In tal caso se y *non* dipende *specialmente* da valori di $\varphi(x)$ e delle sue derivate in punti dell'intervallo (AB), avremo che

$$y \left| \left[\varphi(x) \right] \right|$$

sarà costante per ogni possibile $\varphi(x)$.

18. Supponiamo ora che

$$y' \left| \left[\varphi \left(\underset{A}{\overset{B}{x}} \right), t \right] \right|$$

sia nullo, ma che y dipenda dai valori di $\varphi(x)$ e delle derivate $\varphi'(x)$, $\varphi''(x) \cdots \varphi^{m_i}(x)$ nei punti x_i, $(i = 1, 2 \cdots n)$. In questo caso avremo che y sarà una funzione nel senso ordinario di $\varphi(x_i)$, $\varphi'(x_i) \cdots \varphi^{m_i}(x_i)$, $(i = 1, 2 \cdots n)$.

19. Se si considera la derivata prima di

$$y' \left| \left[\varphi \left(\underset{A}{\overset{B}{x}} \right), t \right] \right|,$$

può avvenire che essa dipenda *specialmente* dai valori di $\varphi(x)$ e delle sue derivate in certi punti dell'intervallo AB; in particolare può avvenire che dipenda *specialmente* dal valore di $\varphi(x)$ e delle sue derivate nel punto t.

Suppongasi

$$y' \left| \left[\varphi \left(\underset{A}{\overset{B}{x}} \right), t \right] \right| = F(\varphi(t))$$

ove F è il simbolo di una funzione ordinaria.

Pongasi $F(z) = d\Psi/dz$, e

$$\eta = \int_A^B \Psi(\varphi(t)) \, dt.$$

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

Avremo

$$\delta\eta = \int_A^B F(\varphi(t))\, \delta\varphi(t)\, dt,$$

quindi

$$\eta' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$$

e (vedi Art. 17)

$$y = \eta + C$$

essendo C costante. Ne segue che

$$y = C + \int_A^B \Psi(\varphi(t))\, dt.$$

In generale se si ha

$$y = \int_A^B F(\varphi(t), \varphi'(t), \cdots \varphi^{(m)}(t))\, dt$$

avremo, come è ben noto,

$$\delta y = \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} + \cdots \pm \frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial F}{\partial \varphi^{(m)}} \right) \delta\varphi(t)\, dt + \sum_0^{m-1} N_p\, \delta\varphi^{(p)}(B) - \sum_0^{m-1} M_p\, \delta\varphi^{(p)}(A)$$

e quindi

$$y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} + \cdots \right)_{x=t}.$$

20. Abbiasi

$$y \,|\, [\varphi(x)] \,| = \int_A^B dt \int_A^B F(\varphi(t), \varphi(t_1))\, dt_1.$$

Per calcolare $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$, osserviamo che, posto $\varphi(t) = z$, $\varphi(t_1) = z_1$, si ha

$$\delta y = \int_A^B dt \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial z}\, \delta\varphi(t) + \frac{\partial F}{\partial z_1}\, \delta\varphi(t_1) \right) dt_1.$$

Poniamo

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \Phi(z, z_1) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} = \Phi_1(z, z_1)$$

avremo

$$\delta y = \int_A^B \delta\varphi(t)\, dt \int_A^B \Phi(z, z_1)\, dt_1 + \int_A^B \delta\varphi(t_1)\, dt_1 \int_A^B \Phi_1(z, z_1)\, dt.$$

Chiamando $\overline{\Phi}_1(z, z_1)$ la funzione che si ottiene da $\Phi_1(z, z_1)$ scambiando z con z_1, avremo

$$\delta y = \int_A^B \delta\varphi(t)\, dt \int_A^B \left\{ \Phi(z, z_1) + \overline{\Phi}_1(z, z_1) \right\} dt_1$$

e quindi

$$y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = \int_A^B \left\{ \Phi(z, z_1) + \overline{\Phi}_1(z, z_1) \right\} dt_1 .$$

Manteniamo ora fisso t e facciamo variare $\varphi(x)$, avremo

$$\delta y' \,|\, [\varphi(x), t] = \int_A^B \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z} \right) \delta\varphi(t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} \right) \delta\varphi(t_1) \right\} dt_1$$

$$= \delta\varphi(t) \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z} \right) dt_1 + \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} \right) \cdot \delta\varphi(t_1) \cdot dt_1 .$$

Avremo dunque che $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$, oltre a dipendere da $\varphi(x)$ in generale, dipenderà specialmente dal valore di $\varphi(x)$ nel punto t.

Si avrà

$$y'' \,|\, [\varphi(x), t, t_1] \,| = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} .$$

Ora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z_1} = \Psi(z, z_1)$$

e $\frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1}$ si otterrà da $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z_1}$ scambiando z con z_1, dunque

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} = \overline{\Psi}(z, z_1)$$

e perciò

$$y'' \,|\, [\varphi(x), t, t_1] \,| = \Psi(z, z_1) + \overline{\Psi}(z, z_1)$$

il che dimostra la simmetria di y'' rispetto a t e a t_1.

21. Abbiasi una equazione differenziale in y

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots \varphi^{(m)}(x) \right) = 0 \tag{11}$$

in cui $\varphi(x)$ è una funzione arbitraria. Se supponiamo dati i valori di $y, y', \cdots y^{(n-1)}$ nel punto $x = A$, il valore Y di y in un dato punto B dipenderà dalla $\varphi(x)$ in tutto l'intervallo AB, e potremo quindi porre

$$Y = Y \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}] \,| .$$

La questione che vogliamo risolvere consiste nel determinare $Y' \left| [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t] \right|$. Questa questione comprende come caso particolare l'altra considerata nel § 19.

Variamo la equazione data. Posto

$$\frac{df}{dy^{(i)}} = a_i \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi^{(i)}} = b_i \, ,$$

avremo

$$\sum_0^n a_i \frac{d^i \, \delta y}{dx^i} + \sum_0^m b_i \frac{d^i \, \delta\varphi}{dx^i} = 0.$$

Moltiplichiamo per una funzione indeterminata λ e integriamo fra A e B, avremo

$$\int_A^B \lambda \left\{ \sum_{0}^{n}{}_i \, a_i \, \frac{d^i \, \delta y}{dx^i} + \sum_0^m b_i \, \frac{d^i \, \delta\varphi}{dx^i} \right\} dx = 0$$

e mediante integrazioni per parti

$$0 = \left[\sum_{0}^{n-1}{}_i \, p_i \frac{d^i \, \delta y}{dx} \right]_A^B + \left[\sum_{0}^{m-1}{}_i \, q_i \, \frac{d^i \, \delta\varphi}{dx^i} \right]_A^B$$

$$+ \int_A^B \left\{ \delta y \sum_0^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda a_i) + \delta\varphi \sum_0^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda b_i) \right\} dx$$

ove

$$p_r = \sum_{1}^{n-r}{}_i \, (-1)^{n-r-i} \frac{d^{n-r-i}}{dx^{n-r-i}} (\lambda a_{n-i+1})$$

$$q_r = \sum_{1}^{m-r}{}_i \, (-1)^{m-r-i} \frac{d^{m-r-i}}{dx^{m-r-i}} (\lambda a_{m-i+1}).$$

Ora

$$\left(\frac{d^i \, \delta y}{dx^i} \right)_{x=A} = 0 \qquad (i = 0 , 1 , 2 \cdots , n-1),$$

e poiché λ è in nostro arbitrio scegliamolo in modo che sia soddisfatta la equazione

$$(12) \qquad \sum_{0}^{n}{}_i (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda a_i) = 0;$$

avremo

$$(13) \qquad \sum_{0}^{n-1}{}_i \, P_i \, \frac{d^i \, \delta Y}{d B^i} = - \left[\sum_{0}^{m-1}{}_i q_i \, \frac{d^i \, \delta\varphi}{dx^i} \right]_A^B - \int_A^B \delta\varphi \sum_0^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda b_i) \, dx$$

ove P_i è il valore di p_i per $x = B$.

La funzione λ soddisfa alla equazione differenziale lineare e omogenea (12) di ordine n. Scegliamo un sistema di integrali fondamentali di essa e denotiamoli con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}$. Avremo

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_0 \,, & \frac{d\lambda_0}{dx} \,, & \ldots \,, & \frac{d^{n-1}\lambda_0}{dx^{n-1}} \\ \lambda_1 \,, & \frac{d\lambda_1}{dx} \,, & \ldots \,, & \frac{d^{n-1}\lambda_1}{dx^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n-1} \,, & \frac{d\lambda_{n-1}}{dx} \,, & \ldots \,, & \frac{d^{n-1}\lambda_{n-1}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

La (13) sussisterà sostituendo successivamente $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_{n-1}$ in luogo di λ. Denotiamo con P_{is} il valore di P_i quando si pone in esso λ_s in luogo di λ. Otterremo in tal modo n equazioni lineari i cui secondi membri potremo ritenere come noti e nei quali

$$\delta Y \quad , \quad \frac{d}{dB}\delta Y \,, \ldots \,, \frac{d^{n-1}}{dB^{n-1}}\delta Y$$

figureranno come incognite.

Il determinante dei coefficienti sarà

$$\begin{vmatrix} P_{00} & , P_{01} & , \ldots, P_{0,n-1} \\ P_{10} & , P_{11} & , \ldots, P_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n-1,0} & , P_{n-1,1} & , \ldots, P_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \pm A_n^n D,$$

quindi diverso da zero. Se chiamiamo M_{is} il determinante reciproco di P_{is}, avremo

$$\delta Y = \frac{1}{\pm A_n^n D} \left[\sum_0^{m-1}{}_i \sum_0^{n-1}{}_s \, q_{is} M_{s0} \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} \right]_A^B$$

$$- \frac{1}{\pm A_n^n D} \int_A^B \left\{ \sum_0^m{}_i \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(\lambda_s b_i) \cdot M_{s0} \right\} \delta\varphi \cdot dx.$$

La Y dipende dunque *specialmente* dai valori di $\delta\varphi$ e delle sue derivate fino alle $(n-1)^{esime}$ nei punti A e B, e si ha poi,

$$Y' \, | [\varphi(t), x] \, | = - \frac{1}{\pm A_n^n D} \left\{ \sum_0^m{}_i \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(\lambda_s b_i) \cdot M_{s0} \right\} \cdot$$

La determinazione di Y' è quindi ridotta alla integrazione della equazione differenziale (12).

22. Le formule trovate conducono molto semplicemente alla risoluzione del problema del cambiamento della *funzione* da cui dipende una data quantità. Così se due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ saranno legate da una relazione differenziale

$$F(\varphi^{(n)}(x), \varphi^{(n-1)}(x), \cdots, \varphi(x), \psi^{(m)}(x), \psi^{(m-1)}(x), \cdots, \psi(x)) \, o$$

troveremo in generale, applicando le dette formule, $y' \left| [\psi \underset{A_1}{\overset{B_1}{(x)}}, t] \right|$ quando si conosce $y' \left| [\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}}, t] \right|$ e reciprocamente.