442.

NOTE SUR LA SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE DOUÉE DE SEIZE POINTS SINGULIERS ET DE SEIZE PLANS SINGULIERS.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXXIII. (1871), pp. 292—293.]

L'ÉQUATION de M. Kummer se transforme sans difficulté en celle-ci

$$\sqrt{\alpha x\left(\gamma'\gamma''y-\beta'\beta''z-\frac{w}{\alpha}\right)}+\sqrt{\beta y\left(\alpha'\alpha''z-\gamma'\gamma''x-\frac{w}{\beta}\right)}+\sqrt{\gamma z\left(\beta'\beta''x-\alpha'\alpha''y-\frac{w}{\gamma}\right)}=0,$$

où

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'=0,\quad \alpha''+\beta''+\gamma''=0.$$

Or cette équation rendue rationnelle prend, après toutes les réductions nécessaires, la forme suivante:

$$\begin{aligned} &w^2\,(x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy)\\ &+2w\,(\alpha\alpha'\alpha''\,(y^2z-yz^2)+\beta\beta'\beta''\,(z^2x-zx^2)+\gamma\gamma'\gamma''\,(x^2y-xy^2)+\theta xyz)\\ &+\qquad(\alpha\alpha'\alpha''yz+\beta\beta'\beta''zx+\gamma\gamma'\gamma''xy)^2=0,\end{aligned}$$

où, pour abréger, l'on a écrit

$$\begin{aligned}\theta&=(\beta\ -\gamma\ )\,\alpha'\alpha''+(\gamma\ -\alpha\ )\,\beta'\beta''+(\alpha\ -\beta\ )\,\gamma'\gamma''\\ &=(\beta'-\gamma'\,)\,\alpha''\alpha+(\gamma'-\alpha'\,)\,\beta''\beta+(\alpha'-\beta'\,)\,\gamma''\gamma\,,\\ &=(\beta''-\gamma'')\,\alpha\,\alpha'+(\gamma''-\alpha'')\,\beta\,\beta'+(\alpha''-\beta'')\,\gamma\gamma'\,,\\ &=-\tfrac{1}{3}\,\{(\beta-\gamma)\,(\beta'-\gamma')\,(\beta''-\gamma'')+(\gamma-\alpha)\,(\gamma'-\alpha')\,(\gamma''-\alpha'')+(\alpha-\beta)\,(\alpha'-\beta')\,(\alpha''-\beta'')\},\end{aligned}$$

l'identité de ces différentes valeurs de θ étant facile à vérifier.

En représentant par $Aw^2 + 2Bw + C = 0$ la forme rationnelle de l'équation de la surface, on trouve pour le discriminant $AC - B^2$ de cette équation du second degré en w la valeur

$$AC - B^2 = 4\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'\beta''\gamma\gamma'\gamma''\, xyz \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} + \frac{z}{\gamma'}\right)\left(\frac{x}{\alpha''} + \frac{y}{\beta''} + \frac{z}{\gamma''}\right).$$

L'équation de la surface rendue rationnelle est symétrique par rapport aux trois systèmes de quantités (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$; la forme irrationnelle de la même équation peut donc être présentée de trois manières différentes, savoir:

$$\sqrt{\alpha x \left(\gamma'\gamma'' y - \beta'\beta'' z - \frac{w}{\alpha}\right)} + \sqrt{\beta y \left(\alpha'\alpha'' z - \gamma'\gamma'' x - \frac{w}{\beta}\right)} + \sqrt{\gamma z \left(\beta'\beta'' x - \alpha'\alpha'' y - \frac{w}{\gamma}\right)} = 0,$$

$$\sqrt{\alpha' x \left(\gamma''\gamma y - \beta''\beta z - \frac{w}{\alpha'}\right)} + \sqrt{\beta' y \left(\alpha''\alpha z - \gamma''\gamma x - \frac{w}{\beta'}\right)} + \sqrt{\gamma' z \left(\beta''\beta x - \alpha''\alpha y - \frac{w}{\gamma'}\right)} = 0,$$

$$\sqrt{\alpha'' x \left(\gamma\gamma' y - \beta\beta' z - \frac{w}{\alpha''}\right)} + \sqrt{\beta'' y \left(\alpha\alpha' z - \gamma\gamma' x - \frac{w}{\beta''}\right)} + \sqrt{\gamma'' z \left(\beta\beta' x - \alpha\alpha' y - \frac{w}{\gamma''}\right)} = 0$$

et l'on voit de plus que les équations des seize plans singuliers sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0,$$

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0, \qquad \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} + \frac{z}{\gamma'} = 0, \qquad \frac{x}{\alpha''} + \frac{y}{\beta''} + \frac{z}{\gamma''} = 0,$$

$$\gamma'\gamma'' y - \beta'\beta'' z - \frac{w}{\alpha} = 0, \quad \alpha'\alpha'' z - \gamma'\gamma'' x - \frac{w}{\beta} = 0, \quad \beta'\beta'' x - \alpha'\alpha'' y - \frac{w}{\gamma} = 0,$$

$$\gamma''\gamma y - \beta''\beta z - \frac{w}{\alpha'} = 0, \quad \alpha''\alpha z - \gamma''\gamma x - \frac{w}{\beta'} = 0, \quad \beta''\beta x - \alpha''\alpha y - \frac{w}{\gamma'} = 0,$$

$$\gamma\gamma' y - \beta\beta' z - \frac{w}{\alpha''} = 0, \quad \alpha\alpha' z - \gamma\gamma' x - \frac{w}{\beta''} = 0, \quad \beta\beta' x - \alpha\alpha' y - \frac{w}{\gamma''} = 0,$$

les quantités α, β, γ, etc. étant liées entre elles par les trois équations

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0, \quad \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0.$$

Voilà ce me semble la forme la plus simple pour l'équation de cette surface.

Cambridge, le 23 *février* 1871.