BELEUCHTUNG UND BEWEIS

EINES SATZES

AUS

LEGENDRE'S ZAHLENTHEORIE.

VON

Dr. HERMANN SCHEFFLER.

LEIPZIG.
VERLAG VON FRIEDRICH FOERSTER.
1893.

BELEUCHTUNG UND BEWEIS

EINES SATZES

AUS

LEGENDRE'S ZAHLENTHEORIE.

VON

Dr. HERMANN SCHEFFLER.

29/IX 93.

LEIPZIG.
VERLAG VON FRIEDRICH FOERSTER.
1893.

Legendre's Lehrsatz.

Um das Jahr 1857 hat die Akademie der Wissenschaften zu Paris die nachstehende mathematische Preisaufgabe gestellt.

Legendre dans sa Théorie des nombres (tome II, page 76 de l'édition de 1830), énonce et croit même démontrer la proposition suivante, qui, si elle était bien établie, serait à la fois très-remarquable et très-importante.

„Soit donnée une progression arithmétique quelconque $A - C$, $2A - C$, $3A - C$, etc., dans laquelle A et C sont premiers entre eux; soit donnée aussi une suite ϑ, λ, μ, ... ψ, ω, composée de k nombres premiers impairs, pris à volonté et disposés dans un ordre quelconque; si l'on appelle en général $\pi^{(z)}$ le z^{ieme} terme de la suite naturelle des nombres premiers 3, 5, 7, 11, etc., je dis que sur $\pi^{(k-1)}$ termes consécutifs de la progression proposée il y en aura au moins un qui ne sera divisible par aucun des nombres premiers ϑ, λ, μ, ... ψ, ω."

Mais la démonstration de Legendre est évidemment insuffisante, et jusqu'ici l'on ignore si ce beau théorème a lieu réellement. Pour appeler sur ce point l'attention des géomètres, l'Académie propose comme sujet du grand prix de Mathématiques à décerner en 1858 la question suivante.

„Établir rigoureusement la proposition de Legendre ci-dessus énoncée, dans le cas où elle serait exacte, ou, dans le cas contraire, montrer comment on doit la remplacer."

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de trois mille francs.

Es ist mir nicht bekannt, ob diese Aufgabe zu dem festgesetzten Termine oder später ihre Lösung gefunden hat. Immerhin dürfte die nachfolgende Beleuchtung mit ihrem Beweise einiges Interesse in Anspruch nehmen.

1) Wenn A und C relativ prim sind; so können zwei Glieder der aus $n + 1$ Gliedern bestehenden Reihe

$$A - C,\ 2A - C,\ 3A - C,\ \ldots\ (n+1)A - C$$

z. B. die beiden Glieder $sA - C$ und $tA - C$ einen gemeinschaftlichen Faktor p haben: allein, dieser Faktor ist an eine bestimmte Bedingung gebunden. Damit nämlich $sA - C = xp$ und $tA - C = yp$ sei, muss $(t - s)A = (y - x)p$ sein. Nun kann aber p kein gemeinschaftliches Maass mit A haben: denn wäre Diess der Fall; so müsste wegen $sA - C = xp$ auch C dieses Maass haben, A und C müssten daher ein gemeinschaftliches Maass besitzen, was der Voraussetzung widerspricht.

Demzufolge kann p nur ein Faktor von $t - s$ sein. Der grösste Werth, welchen $t - s$ annehmen kann, ist $(n + 1) - 1 = n$; hieraus folgt, dass der gemeinschaftliche Faktor zweier Glieder der obigen Progression $\leqq n$ sein muss, oder, dass keine Zahl, welche $> n$ ist, ein gemeinschaftlicher Faktor zweier Glieder der aus $n + 1$ Gliedern bestehenden Progression sein kann.

Diess gilt offenbar für jede Strecke von $n + 1$ aufeinander folgenden Gliedern der ins Unbestimmte fortgesetzten Progression, also allgemein für die $n + 1$ Glieder

$$mA - C, \quad (m + 1)A - C, \quad \ldots \quad (m + n)A - C$$

Es gilt aber auch für die nach der negativen Seite fortgesetzte Progression

$$\ldots \; -3A - C, \quad -2A - C, \quad -A - C, \quad -C$$

überhaupt für $n + 1$ Glieder, deren erstes $mA - C$ und deren letztes $(m + n)A - C$ ist, worin n positiv ist, m aber positiv oder negativ sein kann (während A als positiv und > 1, C jedoch als positiv oder negativ, auch $= \mp 1$ vorausgesetzt wird).

2) Wenn ebenso viel Primzahlen, als Progressionsglieder gegeben sind, wenn also $k = n + 1$ ist, kann möglicherweise jedes Glied durch irgend eine der gegebenen Primzahlen theilbar sein. Sind aber weniger Primzahlen, als Progressionsglieder gegeben, ist also $k \leqq n$, und ist die kleinste dieser Primzahlen $> n$; so können nur höchstens k Glieder durch irgend eine dieser Primzahlen theilbar sein: denn wäre ausser k Gliedern, von welchen jedes eine andere Primzahl enthält, noch irgend ein Glied durch eine dieser Primzahlen theilbar; so besässen zwei Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor $> n$, was nach Obigem nicht möglich ist. Hiernach sind mindestens $n + 1 - k$ Progressionsglieder durch keine der gegebenen Primzahlen theilbar.

Kommen jedoch unter den gegebenen Primzahlen solche vor, welche $\leqq n$ sind; so können mehr Glieder theilbar und weniger untheilbar werden, und es würde sich dann um die Maximalzahl der ersteren oder die Minimalzahl der letzteren handeln.

3) Fassen wir zunächst die Vertheilung der Primfaktoren in der nach der positiven und negativen Seite unbestimmt fortgesetzten natürlichen Reihe der unpaaren Zahlen, welche zugleich der aus $A = 2$, $C = 1$ gebildeten Progression entspricht, also die Reihe

$$\ldots \; -11 \;\; -9 \;\; -7 \;\; -5 \;\; -3 \;\; -1 \qquad 1 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 11 \; \ldots$$

ins Auge. Hebt man in dieser Reihe diejenigen Glieder hervor, welche von k gegebenen unpaaren Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ irgend eine als Faktor enthalten; so wiederholt sich selbstredend auf der positiven, sowie auf der negativen Seite jeder Primfaktor wie p_1 in regelmässigen Abständen, also in Zahlen wie a und b, deren numerische Werthe die Differenz $b - a = 2p_1$ oder deren Stellenzahlen α und β die Differenz $\beta - \alpha = p_1$ bilden, welche also in A b s t ä n d e n $\beta - \alpha = p_1$ liegen, sonst aber nirgends. Wenn die Zahl $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_k$, welche das Produkt aller gegebenen Primzahlen bildet, erreicht ist, müssen sich rechts von P durch diese Primzahlen theilbare Zahlen in derselben Reihenfolge und in denselben Abständen einstellen, wie links von P, es muss also schliesslich der positive Anfang und dann die ganze negative Reihe der durch jene Primzahlen theilbaren Zahlen in entgegengesetzter Ordnung wiederkehren. Diese Wiederkehr erfolgt, sobald die Zahl $2P - 1$ erreicht ist. Mit der Zahl $2P + 1$ beginnt alsdann eine Reihenfolge von Zahlen, welche hinsichtlich der Theilbarkeit durch irgend eine der gegebenen Primzahlen mit dem positiven Anfange der Reihe nach Abständen und gleichlaufender Ordnung ganz identisch ist. Der Rücklauf von $2P - 1$ gegen den Anfang hin stimmt mit dem positiven Anfange der Reihe überein; die ganze Gruppe bis zum Gliede $2P - 1$ ist also von beiden Enden her symmetrisch und wiederholt sich vom Gliede $2P + 1$ an unausgesetzt dergestalt, dass die aufeinander folgenden Gruppen erst durch 1 und $2P - 1$, dann durch $2P + 1$ und $4P - 1$, dann durch $4P + 1$ und $6P - 1$ u. s. w. begrenzt sind, indem die zwischen zwei benachbarten unpaaren Grenzzahlen liegende paare Zahl $2P$, $4P$, $6P$ u. s. w. der zwischen den ersten Grenzen -1 und $+1$ liegenden Zahl $0 = 0 \, . \, P$ entspricht.

Ich bemerke noch, dass auch jede zusammengesetzte Zahl p_1 sich in Abständen p_1 und sonst nirgends als Faktor wiederholt.

Beispielsweise hat man für die drei Primfaktoren 3, 5, 7 $P = 3 \, . \, 5 \, . \, 7 = 105$, $2P = 210$, $2P - 1 = 209$, $2P + 1 = 211$. Bezeichnet man die durch 3, 5 oder 7 theilbaren unpaaren Zahlen durch die darunter gesetzten Ziffern; so ergeben sich für den Anfang, die Mitte und das Ende der ersten Periode folgende Reihen:

…	−17	−15	−13	−11	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	…
	.	3	.	.	3	7	5	3	.	.	3	5	7	3	.	.	3	.	
		5															5		

…	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119	…
	7	3	5	.	3	.	.	3	.	.	3	.	5	3	7	
								5								
								7								

…	193	195	197	199	201	203	205	207	209	211	213	215	217	219	221	223	225	227	…
	.	3	.	.	3	7	5	3	.	.	3	5	7	3	.	.	3	.	
		5															5		

4) Eine Reihe von $n + 1$ aufeinander folgenden unpaaren Zahlen der natürlichen Zahlenreihe wird eine gewisse Anzahl r von Gliedern haben, welche durch irgend eine von k gegebenen Primzahlen theilbar sind, also $n + 1 - r$ Glieder, welche durch keine jener Primzahlen theilbar sind: sagen wir, die ersteren r Glieder werden durch die gegebenen Primzahlen gedeckt und die letzteren $n + 1 - r$ Glieder werden nicht gedeckt. Die Anzahl r der gedeckten Glieder hängt von der Stelle ab, welche das Anfangsglied der $(n + 1)$-stelligen Zahlenreihe einnimmt und hat offenbar für gewisse Stellen ein Maximum und für gewisse Stellen ein Minimum. Das Maximum der gedeckten bedingt das Minimum der ungedeckten Glieder, und umgekehrt. Nimmt man einmal im vorstehenden Beispiele für die $k = 3$ Primzahlen 3, 5, 7 eine $n + 1 = 10$-gliedrige Reihe an; so enthält die Anfangsreihe (in deren Mitte die Null liegt) 8 gedeckte und 2 ungedeckte Glieder, die Mittelreihe (in deren Mitte die Zahl 104

oder 106 liegt) 4 gedeckte und 6 ungedeckte Glieder. Wo man nun auch die 10-gliedrige Reihe beginnen möge, nirgends ergiebt sich ein grösseres Maximum, als 8 gedeckte Glieder, oder ein kleineres Minimum, als 2 ungedeckte Glieder, und dieses Maximum und Minimum kömmt nur im Anfange oder am Ende der 105-gliedrigen Periode vor.

Zur Untersuchung des Maximums der gedeckten Glieder ist die Vorfrage aufzuwerfen, wievielmal eine gegebene Zahl p als Faktor in einer Reihe von $n+1$ Gliedern vorkommen kann. Wenn p ein Faktor von $n+1$ ist; so kömmt die Zahl p jedenfalls $\frac{n+1}{p}$-mal als Faktor in jener Reihe vor, gleichviel, welchen Anfangswerth das erste Glied dieser Reihe hat. Denn ist das niedrigste durch p theilbare Glied der fraglichen Reihe $sA - C = xp$; so ist das nächst höhere durch p theilbare Glied $(s+p)A - C = (x+A)p$, und die ganze Reihe enthält, wenn man $\frac{n+1}{p} = a$ setzt, folgende a durch p theilbaren Glieder

$$sA - C,\ (s+p)A - C,\ (s+2p)A - C,\ \ldots\ (s+(a-1)p)A - C$$

Dass das letzte Glied wirklich der in Rede stehenden Reihe angehört, geht daraus hervor, dass sein Koeffizient von A den Werth $s + \left(\frac{n+1}{p} - 1\right)p = n+1+s-p$ hat, der in keinem Falle grösser als $n+1$ ist, da ohne Frage $s \leqq p$ ist.

Wenn p kein Faktor von $n+1$ ist, und a die kleinste unter $\frac{n+1}{p}$ liegende Zahl bezeichnet; so enthält die fragliche Reihe den Faktor p entweder a-mal, oder $(a+1)$-mal (ist $p > n+1$, also $a = 0$; so kömmt der Faktor p entweder gar nicht, oder einmal vor). Die Anzahl der durch p gedeckten Glieder ergiebt sich folgendermaassen. Es sei $n+1 = ap+b$, ferner das erste Glied der Reihe $G_1 = c_1 A - C = sp + r$, worin r den kleinsten positiven Rest bezeichnet, das letzte Glied $G_{n+1} = c_{n+1} A - C$, das niedrigste durch p theilbare Glied $G = cA - C$, also $c_{n+1} - c_1 = n$. Alsdann hat man, wenn r unpaar ist, $G = G_1 + p - r$, und, wenn r paar ist, $G = G_1 + 2p - r$. Im ersten Falle, also für einen unpaaren Rest r, ist $G = G_1 + p - r = (s+1)p = cA - C$, also $c = \frac{(s+1)p + C}{A}$, ferner $c_1 = \frac{sp + r + C}{A}$ und daher $c = c_1 + \frac{p-r}{A}$. Ist nun $m+1$ die Anzahl der durch p gedeckten Glieder, enthält also die $(n+1)$-gliedrige Reihe ausser dem niedrigsten durch p theilbaren Gliede $G = cA - C$ noch die m Glieder

$$(p+c)A - C,\ (2p+c)A - C,\ (3p+c)A - C,\ \ldots\ (mp+c)A - C$$

so ist das höchste dieser Glieder $(mp+c)A - C \leqq G_{n+1}$ oder $\leqq c_{n+1}A - C$, mithin $m+1 \leqq \frac{c_{n+1} - c}{p} + 1$, d. h. die Anzahl der gedeckten Glieder ist der Werth der grössten ganzen Zahl des auf der rechten Seite stehenden

Ausdruckes. Substituirt man in diesen Ausdruck für c den vorstehenden Werth; so ergiebt sich

$$m + 1 \leqq \frac{c_{n+1} - c_1}{p} + 1 - \frac{p - r}{pA} \quad \text{oder} \quad \leqq \frac{n}{p} + 1 - \frac{p - r}{pA}$$

Da nach Obigem $\frac{n+1}{p} = \frac{n}{p} + \frac{1}{p} = a + \frac{b}{p}$ ist; so hat man auch

$$m + 1 \leqq a + 1 + \frac{b - 1}{p} - \frac{p - r}{pA}$$

Diese Formel bestimmt die Anzahl $m + 1$ der durch p gedeckten Glieder durch die vermittelst der Grössen n, p, A und des unpaaren Restes r des ersten Gliedes gegebenen Zahlwerthe. Von diesen Grössen sind n, p, A konstant und r vom Werthe des ersten Gliedes G_1 abhängig. Ich habe schon erwähnt, dass $m + 1$ entweder $= a$, oder $= a + 1$ ist: Diess verlangt, dass die nachstehenden beiden Ungleichheiten erfüllt seien.

$$\frac{b - 1}{p} - \frac{p - r}{pA} \geqq -1 \qquad < 1$$

oder nach Multiplikation mit pA

$$(b - 1)A - (p - r) \geqq -pA \qquad < pA$$

Da b und $r \leqq p$ sind; so ist $(b-1)A + pA = (p + b - 1)A > p - r$, mithin die erste Ungleichheit erfüllt. Ferner ist $(b - 1)A < pA + (p' - r)$ und demzufolge die zweite Ungleichheit bestätigt.

Für einen paaren Rest r tritt im Zähler des letzten Gliedes von $m + 1$ die Grösse $2p - r$ an die Stelle von $p - r$, und man überzeugt sich leicht, dass auch dann die vorstehenden beiden Ungleichheiten stattfinden.

Ist der Rest r gleich null; so hat man, wenn $p < n + 1$ ist, $m + 1 = a + 1$, und, wenn $p \geqq n + 1$ ist, $m + 1 = a$ (der Werth $p = n + 1$ gehört alsdann schon dem ersten obigen Falle, wo p ein Faktor von $n + 1$ ist, an).

Die Formel für $m + 1$ lehrt nicht nur, dass die Anzahl der durch p gedeckten Glieder je nach der Lage des Anfangsgliedes gleich a, oder gleich $a + 1$ ist, sondern sie bestimmt diese Anzahl vermittelst des Restes r des ersten Gliedes genau als die in dem gefundenen Ausdrucke enthaltene grösste ganze Zahl. Diess gilt für jeden Werth von A und C, also für jede zulässige Progression, d. h. für jede Progression, in welcher A und C relativ prim sind, sowie für jede Primzahl p, welche nicht in A enthalten ist, indem die Progression kein Glied enthalten kann, welches durch ein solches p theilbar wäre.

5) Aus dem Werthe von $m + 1$ folgt, dass derselbe für einen unpaaren Rest r gleich $a + 1$ ist, wenn man $\frac{b - 1}{p} - \frac{p - r}{pA} \geqq 0$ oder $b - 1 \geqq \frac{p - r}{A}$ hat. Wenn diese Ungleichheit für irgend einen Werth von A stattfindet, ist sie offenbar für jeden grösseren Werth von A

erfüllt, folglich die Anzahl der gedeckten Glieder gleich $a+1$. Ferner folgt, dass $m+1$ gleich a ist, wenn man $\frac{b-1}{p} - \frac{p-r}{pA} < 0$ und $\geqq -1$ oder $b-1-\frac{p-r}{A} < 0$ und $\geqq -p$ hat. Diese letzteren beiden Ungleichheiten müssen nothwendig zusammen bestehen, wennnicht der erste Fall eintreten soll, welcher $m+1 = a+1$ bedingt. Diese beiden Ungleichheiten fordern $\frac{p-r}{A} > b-1$ und $p+b \geqq 1+\frac{p-r}{A}$. Sind dieselben für irgend einen Werth von A beide erfüllt; so ist die zweite auch für jeden grösseren Werth von A erfüllt: von der ersten lässt sich Diess jedoch nicht behaupten; dieselbe kann für einen grösseren Werth von A erfüllt und unerfüllt sein: für gewisse grössere Werthe von A wird also $m+1 = a$, für gewisse andere jedoch $= a+1$ sein. Ganz Dasselbe gilt für einen paaren Rest r, indem man $2p-r$ an die Stelle von $p-r$ setzt.

In allen Fällen sind die Abstände der durch p theilbaren Zahlen in jeder Progression G_1, G_2, G_3 . . . , in welcher überhaupt durch p theilbare Glieder vorkommen, gleich p, dieser Abstand ist also von A und C ganz unabhängig. Der Werth der Anzahl der durch p gedeckten Glieder einer $(n+1)$-stelligen Reihe ist trotz der Konstanz des Abstandes p für zwei Progressionsreihen nicht gleich, kann aber nur um eine Einheit sich unterscheiden. Beispielsweise giebt für $p = 3$ die Progression für $A = 4$, $C = 3$

1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
.	.	3	.	.	3	.	.	3	.	.	3

dagegen die Progression für $A = 5$, $C = 3$

2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57
.	.	3	.	.	3	.	.	3	.	.	3

Für $n+1 = 5$ enthalten die fünf Glieder 13, 17, 21, 25, 29, deren erstes Glied den Rest $r = 1$ hat, in der ersten Progression $m+1 = a = 1$-mal die Zahl 3, während die fünf Glieder 22, 27, 32, 37, 42 mit demselben Anfangsreste in der zweiten Progression $m+1 = a+1 = 2$-mal die Zahl 3 aufweisen. Der Faktor 5 kömmt in der ersten Reihe in den Abständen 5, in der zweiten Reihe jedoch gar nicht vor, weil er ein Faktor von $A = 5$ ist.

6) Die über die Anzahl $m+1$ entwickelten Sätze gelten nicht nur für eine Primzahl p, sondern auch für eine zusammengesetzte Zahl. Hat nun in der $(n+1)$-gliedrigen Reihe für die Primzahlen p_1, p_2, p_3 . . . die Grösse $m+1$, bezw. die Werthe m_1, m_2, m_3 . . . ; so ergeben die beiden Primzahlen p_1 und p_2 die Summe $m_1 + m_2$ von gedeckten Gliedern. Hierunter kommen aber eine bestimmte Menge durch p_1 und p_2 zugleich, also durch das Produkt $p_1 p_2$ gedeckte Glieder vor. Diese Menge bestimmt sich nach der Formel für $m+1$, indem $p_1 p_2$ an die Stelle von p tritt. Bezeichnet man diese Menge mit m_{12}; so ist jede dieser Zahlen in der Summe $m_1 + m_2$ zweimal gezählt: die Anzahl der durch p_1 und p_2 gedeckten Glieder ist daher $m_1 + m_2 - m_{12}$.

Sind drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 gegeben; so sind für die Glieder, welche die Produkte $p_1 p_2$, $p_1 p_3$, $p_2 p_3$ enthalten, m_{12}, m_{13}, m_{23} Glieder in Abzug zu bringen. Die m_{123} Glieder, welche das Produkt $p_1 p_2 p_3$ enthalten, sind dann aber je dreimal, nämlich einmal wegen $p_1 p_2$, einmal wegen $p_1 p_3$ und einmal wegen $p_2 p_3$ subtrahirt: es muss also für jedes dieser Glieder eine Einheit hinzugefügt werden. Die Anzahl der durch p_1, p_2, p_3 gedeckten Glieder ist mithin $(m_1 + m_2 + m_3) - (m_{12} + m_{13} + m_{23}) + m_{123}$.

Die Anzahl der durch vier Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 gedeckten Glieder ist

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)-(m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{23}+m_{24}+m_{34})+(m_{123}+m_{124}+m_{134}+m_{234})-m_{1234}$$

Bezeichnet man, allgemein, für k Primzahlen die Summe der durch je eine, je zwei, je drei, . . . je $(k-1)$ und zuletzt durch k Primzahlen gedeckten Glieder durch S_1, S_2, S_3, . . . S_k; so ist die Anzahl aller gedeckten Glieder

$$m + 1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots (-1)^{k-1} S_k$$

Durch diese Formel ist die Anzahl der in einer $(n+1)$-gliedrigen Reihe vorkommenden, durch k Primzahlen gedeckten und daher auch die der ungedeckten Glieder genau bestimmt. Beispielsweise sei für die natürliche Progression der unpaaren Zahlen, also für $A = 2$, eine Reihe von $n + 1 = 11$ Gliedern mit dem Anfangsgliede $G_1 = 13$ gegeben, und es werde nach der Anzahl $m + 1$ der darin enthaltenen Glieder gefragt, welche die drei Primzahlen $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$ decken. Zur Berechnung der Werthe von m_1, m_2 . . . bedarf man der nachstehenden Werthe von a, b, r, da $p_1 p_2$, $p_1 p_3$, $p_2 p_3$, $p_1 p_2 p_3$ bezw. $= 15, 21, 35, 105$ ist,

$n+1 = a.p + b$	$G_1 = s.p + r$	r	$p - r$	$2p - 1$	$b - 1$
$11 = 3.3 + 2$	$13 = 4.3 + 1$	unpaar	2	.	1
$= 2.5 + 1$	$= 2.5 + 3$	unpaar	2	.	0
$= 1.7 + 4$	$= 1.7 + 6$	paar	.	8	3
$= 0.15 + 11$	$= 0.15 + 13$	unpaar	2	.	10
$= 0.21 + 11$	$= 0.21 + 13$	unpaar	8	.	10
$= 0.35 + 11$	$= 0.35 + 13$	unpaar	22	.	10
$= 0.105 + 11$	$= 0.105 + 13$	unpaar	92	.	10

Hiernach ist

$$\left.\begin{aligned} m_1 &\leqq 3 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{2.3} = 4 \\ m_2 &\leqq 2 + 1 + \frac{0}{5} - \frac{2}{2.5} = 2 \\ m_3 &\leqq 1 + 1 + \frac{3}{7} - \frac{8}{2.7} = 1 \end{aligned}\right\} 7$$

$$\left.\begin{aligned} m_{12} &\leqq 0+1+\frac{10}{15}-\frac{2}{2\,.\,15}=1 \\ m_{13} &\leqq 0+1+\frac{10}{21}-\frac{8}{2\,.\,21}=1 \\ m_{23} &\leqq 0+1+\frac{10}{35}-\frac{22}{2\,.\,35}=0 \end{aligned}\right\} 2$$

$$m_{123} \leqq 0+1+\frac{10}{105}-\frac{92}{2.105}=0$$

Mithin werden durch die Primzahlen 3, 5, 7

$$m+1 = 7-2+0 = 5$$

Glieder der Reihe

13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
.	3	.	.	3	.	5	3	.	.	3
	5			7						

gedeckt und es bleiben $11-5=6$ Glieder ungedeckt, was sich auch bestätigt, indem 15, 21, 25, 27, 33 die fünf gedeckten und 13, 17, 19, 23, 29, 31 die sechs ungedeckten Glieder sind.

Als zweites Beispiel nehme ich für $A=2$ die 7-gliedrige Reihe -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7 mit den drei Primzahlen 3, 5, 7. Man hat

$n+1=a.p+b$	$G_1=s.p+r$	r	$p-r$	$2p-r$	$b-1$
. $7=2.3+1$	$-5=-2.3+1$	unpaar	2	.	0
$=1.5+2$	$=-1.5+0$	null	.	.	.
$=1.7+0$	$=-1.7+2$	paar	.	12	-1

folglich

$$m_1 \leqq 2+1+\frac{0}{3}-\frac{2}{2.3}=2$$

$$m_2 \qquad\qquad\qquad\qquad = 2$$

$$m_3 \leqq 1+1+\frac{-1}{7}-\frac{12}{2.7}=1$$

und da m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{123} gleich null sind, $m+1=2+2+1=5$.

In Nr. 18 werde ich übrigens ein einfacheres Verfahren zur Bestimmung der Werthe von m_1, m_2 u. s. w. angeben.

7) Wenn in zwei $(n+1)$-gliedrigen Reihen

$$G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_{n+1} \quad \text{und} \quad G_1',\ G_2'\ \ldots\ G_{n+1}'$$

denen verschiedene Werthe A und A' zu Grunde liegen, die Anfangsglieder G_1 und G_1' gleiche Reste für die Primzahl p darbieten; so kann nach dem Obigen doch die Anzahl der durch p theilbaren Glieder in beiden Reihen um eine Einheit im positiven oder negativen Sinne differiren. Wenn dagegen die beiden Anfangsglieder durch p theilbar sind, können beide Reihen nur eine gleiche Anzahl durch p gedeckte Glieder besitzen: denn auf ein Glied $G_1=e_1A-C=xp$, welches durch p theilbar ist, folgt im Abstande p und nicht früher ein Glied $(c_1 + p) A - C = p(x + A)$, welches wiederum durch p theilbar ist, welchen Werth auch A habe.

Dieser Satz verallgemeinert sich für eine beliebige Menge k gegebener Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_k$ folgendermaassen. Wenn die Anfangsglieder G_1 und G_1' durch sämmtliche gegebenen Primzahlen, also durch die Zahl $p_1 p_2 \ldots p_k = P$ theilbar sind; so enthalten beide Reihen nicht nur dieselbe Anzahl durch $p_1, p_2, \ldots p_k$ gedeckter Glieder, sondern auch diese Glieder in derselben Reihenfolge und in denselben Abständen sowohl hinsichtlich der einfach gedeckten, als auch hinsichtlich der mehrfach (durch $p_1 p_2$, $p_1 p_3$, $p_2 p_3$, $p_1 p_2 p_3$ u. s. w.) gedeckten Glieder. Hieraus folgt aber weiter, dass diese Identität der Reihenfolge der gedeckten Glieder immer stattfindet, wenn die beiden Anfangsglieder G_1 und G_1' gleichen Abstand von einem durch P theilbaren Gliede haben. Ist also $G = cA - C = Px$ und $G' = c'A' - C' = Px'$, ferner für einen beliebigen Werth von y $G_1 = G + yA = Px + A = (c + y) A - C$ und $G_1' = G' + yA' = Px' + yA' = (c' + y) A' - C'$; so liegt in beiden Reihen bei beliebiger Gliederzahl $n + 1$ ganz dieselbe Reihenfolge der gedeckten und ungedeckten Glieder. Beispielsweise hat man in den beiden aus $c.2 - 3$ und $c.4 - 5$ entspringenden Progressionen für die drei Primzahlsn 3, 5, 7, also $P = 3.5.7 = 105$, indem ein durch 105 theilbares Glied in der ersten Reihe gleich 105 und in der zweiten Reihe gleich 315 ist, wenn man als Anfangsglieder G_1 und G_1' diejenigen beiden Glieder nimmt, welche um fünf Stellen von 105, bezw. 315 abstehen, welche also den Werth $105 + 5.2 = 115$ und $315 + 5.4 = 335$ haben, die beiden identischen Reihenfolgen von beliebiger Gliederzahl

115	117	119	121	123	125	127	129	131	133	135
5	3	7	.	3	5	.	3	.	7	3 5
335	339	343	347	351	355	359	363	367	371	375
5	3	7	.	3	5	.	3	.	7	3 5

Dieses Ergebniss hat für die Untersuchung des Primzahlengesetzes darum eine besondere Wichtigkeit, weil es lehrt, dass man die Untersuchung lediglich auf die Progression der natürlichen unpaaren Zahlen beschränken kann, indem diese Progression, wofür $A = 2$ einen durch keine unpaare Primzahl theilbaren Werth hat, alle Beziehungen darbietet, welche möglicherweise in Betracht kommen können. Dieselben Dienste würde eine Progression, worin $A = 2^r$ ist, leisten, weil auch für diese, welchen zu A relativ primen, also welchen unpaaren Werth auch C haben möge, jede beliebige Primzahl zugelassen werden kann (wogegen eine Progression, worin A ausser 2 einen unpaaren Faktor s hat, nicht allgemein genug ist, da sie kein Glied besitzen kann, welches durch s oder durch eine in s enthaltene Primzahl theilbar ist, indem sonst auch C durch diese Primzahl theilbar sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht).

8) Nach den vorstehenden Formeln ist es leicht, wenn die eine der beiden Reihen gegeben ist, die **äquivalente** andere herzustellen, also, wenn für irgend welche Werthe von A, C, G die mit G_1 anfangende Reihe gegeben ist, die äquivalente natürliche Reihe der unpaaren Zahlen, für welche $A' = 2$ und $C' = 1$ ist, zu bestimmen. Ist A durch irgend eine unpaare Primzahl oder durch mehrere theilbar; so hat Diess auf die Bestimmung der äquivalenten natürlichen Reihe keinen Einfluss: es sind alsdann nur die durch dieselben Primzahlen theilbaren Glieder der letzteren Reihe als ungedeckte zu betrachten. So hat man z. B. für $A = 3$, $C = 5$, wenn die k Primzahlen die beiden 5 und 7 sind, also $P = 5.7 = 35$ ist, die mit $G_1 = 35.x + y.3 = 35.1 + 2.3 = 41$ beginnende Reihe

41	44	47	50	53	56	59	62	65	u. s. w.
.	.	.	5	.	7	.	.	5	

Dieser Reihe ist die natürliche Reihe äquivalent, welche mit dem Gliede $G_1' = 35.x' + y.2 = 35.1 + 2.2 = 39$ beginnt, also die Reihe

39	41	43	45	47	49	51	53	55	u. s. w.
.	.	.	5	.	7	.	.	5	

indem darin die durch 3 theilbaren Glieder ungedeckte sind.

9) Betrachtet man nun die natürliche unpaare Zahlenreihe; so erscheinen zwei Strecken von besonderer Wichtigkeit. Die erste Strecke ist diejenige, in deren Mitte die beiden Zahlen -1 und $+1$ liegen; die zweite Strecke ist diejenige, in deren Mitte die Zahl $P = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$ liegt, worin $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ die k ersten Primzahlen der natürlichen Primzahlenreihe 3, 5, 7, 11 u. s. w. bedeuten. Die unpaare Gliederzahl $n + 1 = p_k$, welche in der erstgedachten Strecke links $\frac{n}{2} = \frac{p_k - 1}{2}$ und rechts $\frac{n}{2} + 1 = \frac{p_k + 1}{2}$ Glieder umfasst, enthält nur die beiden ungedeckten Glieder -1 und $+1$ und $n - 1$ gedeckte Glieder, da sich zwischen alle Primzahlen zusammengesetzte Zahlen legen, deren Faktoren Primzahlen $< p_k$ sind, welche also durch irgend eine der gegebenen Primzahlen theilbar sind. Wenn man nur die Faktoren niederschreibt, durch welche die Glieder dieser Strecke theilbar sind; so beginnt dieselbe folgendermaassen.

3	5	23	3	19	17	3	13	11	3	7	5	3	1	1	3	5	7	3	11	13	3	17	19	3	23	5	3	29
	5		7			5															5			7		5		

An dieser Strecke ist beachtenswerth, dass links und rechts von den beiden untheilbaren Mittelgliedern alle Stellen in ununterbrochener Reihenfolge durch Zahlen gedeckt sind, welche alle aufeinander folgenden Primzahlen und alle aufeinander folgenden zusammengesetzten Zahlen in natürlicher Reihenfolge enthalten: denn aus jeder Primzahl p entspringt links und rechts eine Reihe in Abständen $= p$, welche sukzessiv die Produkte aus p und den aufeinander folgenden unpaaren Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. enthalten.

10) Die zweite wichtige Strecke, in deren Mitte die Zahl P steht, während links und rechts von $P \; \frac{n}{2} = \frac{p_k - 1}{2}$ Zahlen liegen, zeichnet sich vor der ersten dadurch aus, dass die Stellen, in welchen eine der k gegebenen Primzahlen zum ersten Male links und rechts von P erscheint, den doppelten Abstand haben, wie in der ersten Strecke, da ja jede Primzahl, weil sie in P enthalten ist, links und rechts von P erst in dem Abstande p wiederkehrt. Die fragliche Strecke beginnt, indem wir die Stellen, wo eine Primzahl zum ersten Male links und rechts von P auftaucht, dadurch markiren, dass wir sie in die obere Linie setzen, während wir die sich wiederholenden Zahlen in die untere Linie stellen, folgendermaassen.

17	...	13	.	11	...	7	.	5	.	3	..	P	..	3	.	5	.	7	...	11	.	13	...	17
	7		3		5 3		3					3					3		3 5		3		7 3	
												5											5	
												7												
												.												
												.												
												.												

Die denkbar kürzeste Reihe ist die für $p_k = 3$, also die von drei Gliedern. Dieselbe enthält, wo auch ihr Anfangsglied in der natürlichen unpaaren Zahlenreihe liegen möge, stets zwei ungedeckte und ein gedecktes Glied. Jede andere Reihe, worin $p_k > 3$, also $\geqq 5$ ist, enthält aber ohne Frage mindestens vier ungedeckte Glieder, da sich links und rechts von P je zwei solche Glieder befinden. Da mit wachsendem p_k, also bei dem Übergange von p_k zu der nächst höheren Primzahl p_{k+1} die für p_k vorhandenen ungedeckten Glieder unverändert bleiben; so kann ihre Anzahl für p_{k+1} nur grösser als die für p_k, oder ihr gleich sein: die Anzahl der ungedeckten Glieder muss also für die wachsenden Primzahlen stufenweise zunehmen, während sie auf den Zwischenstrecken konstant bleibt. Für die ersten Primzahlen hat man

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n + 1 = p_k =$	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
ungedeckte Glieder	2	4	4	6	6	8	8	8	8	8	10	10
gedeckte Glieder	1	1	3	5	7	9	11	15	21	23	27	31

11) Die Anzahl von zwei ungedeckten Gliedern, welche für jeden Werth von p_k in der ersten Strecke eintritt, hat den Anschein eines Minimums, welches sich möglicherweise in einer anderen Strecke von p_k Gliedern wiederholt, aber nirgends auf eine kleinere Anzahl eins oder null herabsinket, weil eine engere Lagerung der primen und der theilbaren Zahlen von den kleinsten bis zu den grössten, als die in dieser Strecke enthaltene Lagerung ohne Unterbrechung nicht möglich zu sein scheint, wogegen die Anzahl der in der zweiten Strecke mit dem Mittelgliede P vorkommenden ungedeckten Glieder den Anschein eines Maximums hat, welches sich vielleicht in einer anderen Strecke von p_k Gliedern wiederholt, aber nirgends diesen Werth überschreitet. Diese beiden Sätze

haben wegen der angeführten Begründung zwar nicht die Evidenz zahlentheoretischer Grundsätze, welche keines weiteren Beweises bedürfen, wohl aber grosse Wahrscheinlichkeit für sich. Es interessirt uns vornehmlich der erste Satz, also die Hypothese, dass das Minimum der ungedeckten Stellen einer Strecke von p Gliedern gleich 2 sei. Indem ich dieselbe vorläufig als gewiss ansehe, werde ich im Nachfolgenden die Konsequenzen entwickeln und sehen, ob sich darunter solche nachweisbaren Sätze befinden, deren Beweis jene Hypothese als Rückschluss zur Wahrheit machen würde.

12) Die Frage, wieviel verschiedene Strecken von p_k Gliedern es in der natürlichen unpaaren Zahlenreihe überhaupt geben kann und wie sie sich darstellen lassen, beantwortet sich folgendermaassen. In einer solchen Strecke erscheinen alle k Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p$ als Faktoren (auch die höchste p_k kann nicht fehlen; sie erscheint nothwendig und zwar in einem einzigen Gliede): es handelt sich also um die Ineinanderschiebung der p_k Reihen

(1) 3 . . 3 . . 3 . . 3 . . 3 . . 3 u. s. w.
(2) 5 . . . . 5 . . . . 5 . . . . 5 u. s. w.
(3) 7 . . . . . . 7 . . . . . . 7 . u. s. w.
(4) 11 . . . . 11 . . . . u. s. w.
.
.
.
(p_{k-1}) p_{k-1} . . . . . . u. s. w.
(p_k) p_k . . . . . . u. s. w.

Eine jede dieser Reihen kann über den p_k Gliedern nach Willkür rechts oder links verschoben werden, d. h. man kann jede der Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k auf ein ganz beliebiges Glied (auch mehrere Primzahlen auf dasselbe Glied) setzen, indem man von diesem Gliede aus die dieser Primzahl zugehörige Reihe vervollständigt. So kann man z. B. für $k = 3$, also $p_k = p_3 = 7$ die Reihe von $n + 1 = p_3 = 7$ Gliedern

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} & \underbrace{5} & \underbrace{6} & \underbrace{7} \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} . & 3 & . & . & 3 & . & . \\ 5 & . & . & . & . & 5 & . \\ . & 7 & . & . & . & . & . \end{array}\right\}$$

bilden, welche 4 gedeckte und 3 ungedeckte Glieder enthält. Da sich der Faktor 3 in Abständen $= 3$, der Faktor 5 in Abständen $= 5$, allgemein, der Faktor p in Abständen $= p$ wiederholt; so ergeben sich alle möglichen verschiedenen Reihen, indem man den Faktor 3 auf den ersten drei, den Faktor 5 auf den ersten fünf, allgemein, den Faktor p auf den ersten p Gliedern beliebig variiren lässt. Diess giebt $3 . 5 . 7 \ldots p_k = P$ verschiedene Reihen.

Dass thatsächlich jede Strecke der natürlichen unpaaren Zahlen aus einer der eben erwähnten Verschiebungen der Grundreihen (hinsichtlich der Theilbarkeit durch die Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k) hervorgeht und dass, umgekehrt, jede beliebige Verschiebung der Grundreihen eine natürliche unpaare Zahlenstrecke (hinsichtlich der gedachten Theilbarkeit) hervorbringt, lässt sich, wie ich weiter unten in Nr. 17 zeigen werde, streng beweisen. Vorläufig bedürfen wir dieses Beweises nicht, da die Sätze, welche für willkürliche Verschiebungen gelten, offenbar auch für abhängige oder bedingte Verschiebungen Gültigkeit haben.

13) Für gewisse Zwecke hat es ein Interesse, diejenige stets mit der Zahl 3 beginnende Reihe von $n+1 = p_k = p_1, p_2, p_3, \ldots =$ 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... Gliedern zu bilden, wobei nach der nachfolgenden Anordnung die nächst höhere Primzahl immer auf das zunächst ungedeckt gebliebene Glied geschoben ist. Die Werthe der einzelnen Glieder sind $2(n+1)+1$, also die Glieder der unpaaren Zahlenreihe, welche ich unter die Zusammenstellung gesetzt habe.

			p_1		p_2		p_3				p_4		p_5				p_6
$n+1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$n+1 = p_1 =$	3	.	.	3	.	.	3	.	.	3	.	.	3	.	.	3	.
$= p_2 =$		5	.	.	.	.	5	.	.	.	.	5	.	.	.	.	5
$= p_3 =$			7	.	.	.	.	.	.	7	.	.	.	.	.	.	7
$= p_4 =$					11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11	.
$= p_5 =$						13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$= p_6 =$								17	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$2(n+1)+1 =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35

Zwei benachbarten Primzahlen p_k und p_{k+1} der oberen Nummernfolge, welche die aufeinander folgenden Werthe von $n+1$ darstellen, entsprechen die unpaaren Zahlen $2p_k + 1$ und $2p_{k+1} + 1$ der unteren unpaaren Zahlenreihe. Beim Übergange von p_k zu p_{k+1} vermehrt sich also die Anzahl der gedeckten Glieder zunächst wegen der neu hinzutretenden Primzahl p_{k+1} um ein Glied und sodann um die Anzahl der zwischen $2p_k + 1$ exkl. und $2p_{k+1} + 1$ inkl. liegenden unpaaren, durch Faktoren $< p_{k+1}$ theilbaren Zahlen. Man kann aber die Anzahl der für $n+1 = p_k$ auf der Strecke von der Primzahl p_k exkl. bis zur Zahl $2p_k + 1$ inkl., also auf einer Strecke von $\frac{1}{2}(p_k + 1) = c_k$ Gliedern ungedeckt bleibenden Glieder sofort durch die Erwägung bestimmen, dass, wenn die Anzahl der unter p_k inkl. liegenden Primzahlen, welche $= k$ ist, mit a_k und die Anzahl der unter $2p_k + 1$ inkl. liegenden Primzahlen mit b_k bezeichnet wird, die in Rede stehende Anzahl der ungedeckten Glieder gleich $b_k - a_k$ oder gleich $b_k - k$ ist (indem jede zwischen p_k und $2p_k + 1$ liegende, durch keine der Primzahlen 3, 5, 7, 11, ... p_k theilbare Zahl nicht zwei Faktoren, welche $> p_k$ sind, haben kann, also eine Primzahl sein muss). Die Differenz $b_k - a_k$ bezeichnet hiernach ebensowohl die auf der p_k-gliedrigen Strecke von 3 bis $2p_k + 1$, als auch die auf der c_k- oder $\frac{1}{2}(p_k + 1)$-gliedrigen Strecke von p_k bis $2p_k + 1$ liegenden, durch keine der Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k gedeckten Zahlen, welche selbst Primzahlen sein müssen. Beispielsweise hat man

k	$p_k = n + 1$	$2p_k + 1$	c_k	$a_k = k$	b_k	$b_k - a_k$
1	3	7	2	1	3	2
2	5	11	3	2	4	2
3	7	15	4	3	5	2
4	11	23	6	4	8	4
5	13	27	7	5	8	3
6	17	35	9	6	10	4
7	19	39	10	7	11	4

Dass die Werthe für $b_k - a_k$ durch die vorstehende Zusammenstellung bestätigt werden, ist selbstverständlich. Wenn jeder dieser Werthe nach der obigen Hypothese wenigstens $= 2$ ist; so hat man $b_k - a_k \geqq 2$ oder $b_k \geqq a_k + 2$. Dieses Ergebniss enthält den Satz, dass unter der Zahl $2p_k + 1$ inkl. mindestens zwei Primzahlen mehr liegen müssen, als unter der Zahl p_k liegen, dass also die Strecke der $p_k + 1$ Zahlen der natürlichen Reihe der paaren und unpaaren Zahlen von $p_k + 1$ bis $2p_k + 1$ inkl. mindestens zwei unpaare Primzahlen enthalten muss: ist $2p_k + 1$ selbst eine Primzahl; so würden die p_k Zahlen von $p_k + 1$ bis $2p_k$ mindestens eine Primzahl enthalten.

14) Das vorstehende Ergebniss beruhet auf der Voraussetzung der Richtigkeit des obigen hypothetischen Satzes über das Minimum der ungedeckten Stellen. Lässt sich, umgekehrt, dieses letztere Ergebniss über das Vorhandensein von einer, bezw. zwei Primzahlen auf der Strecke von $p_k + 1$ bis $2p_k + 1$ beweisen; so ist damit auch der obige hypothetische Satz für die hier in Rede stehende spezielle Form der p_k-gliedrigen Reihe bewiesen. Das fragliche Ergebniss ist jedoch bis jetzt nicht bewiesen; der russische Mathematiker Tchebichef*) (vergl. Serret, Algèbre supérieure, 4-te Auflage, 2-ter Theil vom Jahre 1879, S. 238) hat vielmehr gezeigt, dass zwischen $p_k + 1$ und $2p_k + 1$ (ja, sogar in einer Reihe von p bis $2p - 2$) mindestens eine, nicht aber mindestens zwei Primzahlen liegen, wie nach Vorstehendem erforderlich sein würde.

15) Nach dem Satze von Tchebichef liegt zwischen der Zahl p_k exkl. und der Zahl $2p_k + 1$ inkl. mindestens eine Primzahl p_{k+1}, welche $> p_k$ ist. Dieselbe kann, wenn sie am weitesten nach links liegt, $= p_k + 2$, und wenn sie am weitesten nach rechts liegt, $= 2p_k + 1$ sein. Die Primzahl p_{k+1} bildet, wenn sie in der p_k-gliedrigen Strecke allein, d. h. mit dem Nebenfaktor 1 vorkömmt, ein ungedecktes Glied. In der Strecke, dessen Anfangsglied $G_1 = 3$ ist, findet Letzteres unzweifelhaft statt: verschiebt man nun das Anfangsglied der Reihe immer um eine Stelle nach rechts oder nach links und beachtet, dass die beiden vor der Zahl 3 stehenden Zahlen -1 und 1 zwei ungedeckte Glieder darstellen; so ergiebt sich, dass die zunächst auftretenden Strecken, welche ich niedrige Strecken nenne, eine oder zwei ungedeckte Stellen haben, und zwar sind Diess die folgenden Strecken, für welche ich das erste

*) Nach deutscher Schreibweise wahrscheinlich Tschebischef.

Glied mit G_1, das letzte mit G_{n+1}, die Mindestanzahl der ungedeckten Glieder mit c bezeichne und statt der Primzahl p_k kurz p setze.

G_1	G_{n+1}	c
$-3p$	$-(p+2)$	1
. . .	. . .	. . .
$-(2p+1)$	-3	1
$-(2p-1)$	-1	1
$-(2p-3)$	1	2
. . .	. . .	. . .
-1	$2p-3$	2
1	$2p-1$	1
3	$2p+1$	1
. . .	. . .	. . .
p	$3p-2$	1
$p+2$	$3p$	1

Die offen gelassenen Strecken haben mindestens so viel ungedeckte Stellen, als die darüber und darunter angegebenen. Sobald der Anfangspunkt der Strecke unter $-3p$ hinab oder über $p+2$ hinauf oder sobald der Endpunkt unter $-(p+2)$ hinab oder über $3p$ hinauf rückt, lässt sich, wenn der Tchebichefsche Satz, nicht aber die obige Hypothese gilt, behaupten, dass die p_k-gliedrige Reihe entweder eine über p_k liegende Primzahl p_{k+1}, oder eine über p_{k+1} liegende Primzahl p_{k+2} enthalte, insofern das Endglied $G_{n+1} \geqq 2G_1+1$, also, da man $G_{n+1} = G_1 + 2p - 2$ hat, insofern $G_1 + 2p - 2 \geqq 2G_1 + 1$ oder $G_1 \leqq 2p-3$ ist. (Für die mit einem negativen Gliede $-G_1$ anfangende Reihe muss das Endglied $-G_{n+1}$ einen numerischen Werth $G_{n+1} \leqq 2p-3$ haben). Für eine p_k-gliedrige Strecke, deren positives Anfangsglied $> 2p-3$ ist, lässt sich nicht mehr auf Grund des Tchebichefschen Satzes behaupten, dass darin eine Primzahl $> p_k$ vorkomme.

Für diese höher gelegenen Strecken ist die Bemerkung wichtig, dass zwar die Reihenfolge eines Faktors p in regelmässigen Abständen von p Stellen unerschütterlich ist, dass jedoch die Reihenfolge der diesen Faktor begleitenden Nebenfaktoren sich ändert. Wenn die prime oder nicht prime Zahl p das volle Glied einer Reihe ausmacht, also ihr Nebenfaktor $= 1$ ist; so stellen sich bei der sukzessiven Wiederkehr des Faktors p im Fortschritte nach rechts die Nebenfaktoren 3, 5, 7, 9 u. s. w. ein, welche immer um zwei Einheiten wachsen (im Fortschritte nach links ergeben sich die negativen Werthe). Wenn das Glied mit dem Faktor p den Nebenfaktor q hat, also $= pq$ ist; so entstehen rechts die Nebenfaktoren $q+2$, $q+4$, $q+6$ u. s. w. und links die Nebenfaktoren $q-2$, $q-4$, $q-6$ u. s. w. Ist also a ein Faktor von q oder $q = ar$ und das gegebene Glied $= arp$; so hat man die Nebenfaktoren

$$\ldots\; ar-6 \quad ar-4 \quad ar-2 \quad ar \quad ar+2 \quad ar+4 \quad ar+6 \;\ldots$$

welche im Allgemeinen n i c h t bezw. durch

$$\ldots\; a-6 \quad a-4 \quad a-2 \quad a \quad a+2 \quad a+4 \quad a+6 \;\ldots$$

theilbar sind. Hieraus folgt, dass, wenn das fragliche Glied eine Primzahl ist, sich nach rechts immer die Nebenfaktoren 3, 5, 7, 9 u. s. w. einstellen, dass aber, wenn dieses Glied keine Primzahl ist, die in Abständen $= p$ liegenden Glieder nicht die aufeinander folgenden unpaaren Zahlen als Faktoren enthalten.

Da nach Vorstehendem die mit der Zahl 3 beginnende p_k-gliedrige Strecke mindestens eine Primzahl p_{k+1} enthält, welche $> p_k$ ist; so enthält die p_{k+1}-gliedrige Strecke mindestens eine Primzahl p_{k+2}, welche $> p_{k+1}$ ist, also mindestens zwei Primzahlen, welche $> p_k$ sind, und überhaupt enthält die p_{k+r}-gliedrige Strecke mindestens $r + 1$ Primzahlen, welche $> p_k$ sind. Diess gilt für jede Strecke von der bezeichneten Länge, deren Anfangsglied bis zur Zahl p_k hinaufrückt.

16) Jede Strecke von $p_k = n + 1$ Gliedern der natürlichen unpaaren Zahlen ist hinsichtlich der durch $p_1, p_2, \ldots p_k$ theilbaren und untheilbaren Zahlen eine Fortsetzung der vorstehenden ersten oder niedrigsten, mit der Zahl 3 beginnenden Strecke. Heben wir aus dieser natürlichen Zahlenreihe an irgend einer beliebigen Stelle $n + 1$ Glieder heraus, wovon das unterste das q-te Glied von dem durch die Primzahl 3 gedeckten ersten Gliede ist, also den Werth $2q + 1$ hat, während das letzte, also $(q + n)$-te Glied den Werth $2(q + n) + 1$ hat; so müsste diese Strecke nach der obigen Hypothese mindestens zwei Glieder enthalten, welche durch keine der k Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_k$ theilbar, welche also relativ prim zu diesen Primzahlen sind. So bildet z. B. für $k = 4$, $p_k = p_4 = 11 = n + 1$ jede Strecke von elf Gliedern die Fortsetzung der Strecke

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	5	7	3	11	.	3	.	.	3	11
						5			7	

Vom 83-sten Gliede $2 . 83 + 1 = 167$ angefangen, hat man die 11 Glieder

83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187
.	.	3	.	5	3	.	.	3	5	11
				7						

Von diesen elf Gliedern sind fünf ungedeckt, und es befinden sich darunter vier Primzahlen 167, 173, 179, 181, sowie eine zusammengesetzte, aber zu 3, 5, 7, 11 relativ prime Zahl $169 = 13 . 13$.

Giebt man jetzt der Grösse a_k die Bedeutung der Anzahl der unter irgend einer unpaaren Zahl $2q + 1$ inkl. liegenden, zu $p_1, p_2, \ldots p_k$ relativ primen Zahlen, ferner der Grösse b_k die Bedeutung der Anzahl der unter der Zahl $2(q + 1 + n) + 1 = 2(q + p_k) + 1$ inkl. liegenden, zu $p_1, p_2, \ldots p_k$ relativ primen Zahlen; so ist $b_k - a_k$ die Anzahl der auf der letzteren $(n + 1) = p_k$-gliedrigen Strecke liegenden ungedeckten Zahlen, für welche $b_k - a_k \geqq 2$, also $b_k \geqq a_k + 2$ ist. Hiernach liegen auf jeder Strecke von p_k unpaaren Gliedern, welche $2p_k - 1$ Zahlen der natürlichen Reihe der paaren und unpaaren Zahlen (und mit der davor liegenden paaren Zahl deren $2p_k$) umfassen, mindestens zwei zu p_1, p_2, ... p_k relativ prime Zahlen, sodass, wenn die letzte Zahl selbst eine solche relativ prime Zahl ist, unter ihr, also bis zur Zahl $2(q+p_k)$ oder $2(q+p_k)-1$ in jener Strecke wenigstens eine relativ prime Zahl liegt.

Dieses Ergebniss gilt, wenn die obige Hypothese gilt, und, umgekehrt, gilt die obige Hypothese allgemein für jede durch beliebige Verschiebung entstehende Strecke, wenn der Satz, welcher das letztere Ergebniss über die Existenz von zwei, bezw. einer relativ primen Zahl ausdrückt, erwiesen ist.

17) Wenn das erste Glied, mit welchem die $(n+1)$-gliedrige Strecke beginnen soll, nach seinem Werthe G_1 gegeben ist; so bestimmt sich die Reihenfolge der durch p_1, p_2, ... p_k theilbaren Glieder leicht durch die für jede dieser Primzahlen aufgestellte Formel $G_1 = px + r$, indem man beachtet, dass, weil G_1 und jedes Glied der Strecke eine unpaare Zahl ist, das Glied px nur dann der Strecke angehören kann, wenn x unpaar, also r paar ist. Versteht man also unter r den Rest von G_1 nach der Primzahl p unter der Bedingung, dass x das grösste unpaare Vielfache von p bezeichne, welches unter G_1 liegt; so hat das nächste durch p theilbare Glied der Strecke von G_1 den Abstand $p - \frac{r}{2}$. So haben z. B. die durch 3, 5, 7, 11 theilbaren Glieder von der Zahl 167 in dem obigen Beispiele, weil

$$167 = 3.55 + 2 = 5.33 + 2 = 7.23 + 6 = 11.15 + 2$$

also

$$p - \frac{r}{2} = 3 - 1 = 2 \quad 5 - 1 = 4 \quad 7 - 3 = 4 \quad 11 - 1 = 10$$

ist, die Abstände 2, 4, 4, 10, welche der obigen Reihe entsprechen.

Ist, umgekehrt, die Reihenfolge gegeben, in welcher die Primzahlen p_1, p_2, ... p_k zum ersten Male in der Strecke erscheinen sollen; so bestimmt sich das Anfangsglied G_1 aus den gegebenen Abständen oder Werthen von $p - \frac{r}{2}$. Denn sind für p_1, p_2, ... p_k die Abstände bezw. a_1, a_2, ... a_k, also allgemein für irgend ein p der Abstand $a = p - \frac{r}{2}$ gegeben; so muss $r = 2(p - a)$, also $G_1 = px + 2(p - a) = p(x + 2) - 2a$ sein: man erhält also die k unbestimmten Gleichungen

$$G_1 = p_1(x_1 + 2) - 2a_1 = p_2(x_2 + 2) - 2a_2 = \text{u.s.w.} = p_k(x_k + 2) - 2a_k$$

Dieselben sind sämmtlich möglich und für die Grössen x_1, x_2, ... x_k auflösbar, indem je zwei der x enthaltenden Gleichungen wie z. B. die zweite und dritte die lösbare Gleichung $p_1x_1 - p_2x_2 = 2(p_2 - p_1 + a_1 - a_2)$ nach sich ziehen. Die Auflösungen der $k - 1$ Gleichungen, welche je zwei der Faktoren x enthalten, also der Gleichungen mit x_1, x_2, mit x_1, x_3, mit x_1, x_4 u. s. w., zuletzt mit x_1, x_k sind von $k - 1$ Willkürlichen w_1, w_2, ... w_{k-1} abhängig: da sich aber für x_1 $k - 1$ Werthe ergeben, welche einander gleich sein müssen; so erhält man $k - 2$

Gleichungen zur Bestimmung der $k-1$ Willkürlichen, wodurch $k-2$ Willkürliche eliminirt werden können. Hierdurch werden die Auflösungen der gedachten $k-1$ Gleichungen von einer einzigen Willkürlichen abhängig, und diese bestimmt sich durch eine der Gleichungen, welche G_1 enthalten. Ohne die Berücksichtigung dieser letzten Gleichung erscheint G_1 als eine von einer Willkürlichen abhängige periodische Zahl, von welcher, als Anfangsglied, sich gleiche Strecken wiederholen.

Sind beispielsweise für die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4 = 3, 5, 7, 11$ die Abstände $a_1, a_2, a_3, a_4 = 2, 4, 4, 10$ und $G_1 = 167$ gegeben; so hat man

$$167 = 3(x_1+2)-4 = 5(x_2+2)-8 = 7(x_3+2)-8 = 11(x_3+2)-20$$

also

$$3x_1-5x_2 = 0 \qquad 3x_1-7x_3 = 4 \qquad 3x_1-11x_4 = 0$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen giebt für die Willkürlichen w_1, w_2, w_3

$$\begin{aligned} x_1 &= 5w_1 & x_1 &= 20+7w_2 & x_1 &= 11w_3 \\ x_2 &= 3w_1 & x_3 &= 8+3w_2 & x_4 &= 3w_3 \end{aligned}$$

Aus den drei Ausdrücken, welche gleich x_1 sind, folgt

$$5w_1 = 20+7w_2 = 11w_3$$

mithin
$$w_2 = \frac{5w_1-20}{7} \qquad w_3 = \frac{5w_1}{11}$$

und daher

$$x_1 = 5w_1 \quad x_2 = 3w_1 \quad x_3 = 8+\frac{3(5w_1-20)}{7} \quad x_4 = \frac{3\,.\,5w_1}{11}$$

Setzt man den Werth von x_1 in die erste oder den Werth von x_2 in die zweite oder den Werth von x_3 in die dritte oder den Werth von x_4 in die vierte der ersten Gleichungen; so ergiebt sich für w_1 stets derselbe Werth, nämlich für $x_1 = 5w_1$ wegen $167 = 3(5w_1+2)-4$ der Werth $w_1 = 11$. Hiernach ist $x_1 = 5\,.\,11 = 55$, $x_2 = 3\,.\,11 = 33$, $x_3 = 8+\frac{3(5\,.\,11-20)}{7} = 23$, $x_4 = \frac{3\,.\,5\,.\,11}{11} = 15$ und die Faktoren x_1+2, x_2+2, x_3+2, x_4+2 der durch 3, 5, 7, 11 theilbaren auf $G_1 = 167$ folgenden Glieder sind 57, 35, 25, 17, was der obigen Reihe vollkommen entspricht.

Die unbedingte Lösbarkeit der in Rede stehenden unbestimmten Gleichungen bestätigt zugleich den in Nr. 12 ausgesprochenen Satz, dass jede willkürliche Verschiebung der Grundreihen für die aufeinander folgenden natürlichen Primzahlen eine in der natürlichen Reihe der unpaaren Zahlen wirklich vorkommende Strecke liefert, und dass es keine Strecke geben kann, welche nicht durch eine solche Verschiebung zu erzielen wäre.

18) Wenn bekannt ist, wie viel Glieder in der $(n+1)$-gliedrigen Reihe $G_1, G_2, \ldots G_{n+1}$ von den k Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_k$ durch jede einzelne, sowie durch das Produkt von je zwei, je drei u. s. w. gedeckt werden, wenn also die in Nr. 6 mit $m_1, m_2, \ldots m_{12}, m_{13}, \ldots m_{123} \ldots$

bezeichneten Grössen bekannt sind, ergiebt die dortige Formel die Anzahl der gedeckten Glieder. Ich habe in Nr. 4 diese Grössen m mittelst der Werthe von a, b, r bestimmt, welche für jede der gegebenen Primzahlen den Gleichungen $n + 1 = ap + b$ und $G_1 = sp + r$ entsprechen. Nachstehend will ich die Grössen m mittelst eines einfacheren Verfahrens durch die Werthe bestimmen, welche die beiden Faktoren s_1 und s_2 in den Gleichungen $G_1 = s_1 p + r_1$ und $G_{n+1} = s_2 p + r_2$ besitzen, ohne dass man die Reste r_1 und r_2 zu kennen braucht. Ich stelle für diese beiden Gleichungen die Bedingung auf, dass s_1 und s_2 die grössten unpaaren Faktoren seien, welche die Division von p in G_1 und G_{n+1} ergiebt, dass sie also die grössten unpaaren Zahlen darstellen, welche unter den Quotienten $\frac{G_1}{p}$ und $\frac{G_{n+1}}{p}$ liegen, dass aber, wenn p in dem ersten Gliede G_1 aufgeht, für s_1 die zunächst unter $\frac{G_1}{p}$ liegende unpaare Zahl, also, da $\frac{G_1}{p}$ dann jedenfalls unpaar ist, die Zahl $\frac{G_1}{p} - 2$ genommen werde. Die Theilbarkeit des letzten Gliedes G_{n+1} durch p erfordert eine solche Berücksichtigung nicht, vielmehr ist alsdann $s_2 = \frac{G_{n+1}}{p}$ zu setzen. Alsdann kömmt irgend eine unpaare Zahl p (gleichviel, ob sie prim ist, oder nicht) dann und nur dann als Faktor in der Strecke vor, wenn $s_2 > s_1$ ist, und sie kömmt nicht darin vor, wenn $s_2 \leq s_1$ ist, und zwar kömmt sie $\frac{s_2 - s_1}{2}$-mal darin vor. So hat man z. B. für die 11-gliedrige Strecke von $G_1 = 167$ bis $G_{n+1} = G_{11} = 187$ für alle aufeinander folgenden unpaaren Zahlen p

schliesslich

p	s_1	s_2	$\frac{s_2 - s_1}{2}$	p	s_1	s_2	$\frac{s_2 - s_1}{2}$
3	55	61	3	163	1	1	—
5	33	37	2	165	1	1	—
7	23	25	1	167	—1	1	1
9	17	19	1	169	—1	1	1
11	15	17	1	171	—1	1	1
13	11	13	1	173	—1	1	1
15	11	11	—	175	—1	1	1
17	9	11	1	177	—1	1	1
19	7	9	1	179	—1	1	1
21	7	7	—	181	—1	1	1
23	7	7	—	183	—1	1	1
25	5	7	1	185	—1	1	1
27	5	5	—	187	—1	1	1
29	5	5	—				
31	5	5	—				
33	5	5	—				
35	3	5	1				
37	3	5	1				
39	3	3	—				
41	3	3	—				
	u. s. w.						

Dieses Ergebniss wird durch die in die Primfaktoren ihrer Glieder zerlegte Reihe

167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187
	13	3		5	3			3	5	11
	13	3		5	59			61	37	17
		19		7						

vollkommen bestätigt. Man hat für die vier Primzahlen 3, 5, 7, 11 $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $m_4 = 1$, $m_{23} = 1$, also $(3+2+1+1)-1 = 6$ gedeckte und $11 - 6 = 5$ ungedeckte Glieder (indem das Glied $169 = 13 \,.\, 13$ ein ungedecktes ist).

Ich bemerke, dass die vorstehenden unpaaren Faktoren s der aufeinander folgenden unpaaren Zahlen für irgend einen Divisor p eine Reihe bilden, in welcher je p aufeinander folgende Glieder gleichen Werth haben. Eine solche Gruppe beginnt, wenn G durch p theilbar, also $= sp$ ist, bei dem Dividend $G + 2 = sp + 2$ mit dem Faktor s und endigt bei dem Dividend $(s+2)p$ mit demselben Faktor s, sodass mit $G' = (s+2)p + 2$ die folgende Gruppe mit dem Faktor $s + 2$ beginnt. Die nachstehende Zusammenstellung zeigt diese Gruppen für die Divisoren 3, 5, 7, 9, 11.

	$G =$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
$p = 3$	$s =$	−1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	7	7	7	9	9	9	11	11	11	13	13
$= 5$	$=$	−1	−1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	7	7	7	7
$= 7$	$=$	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5
$= 9$	$=$	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
$= 11$	$=$	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3

Wenn für die durch p theilbaren Zahlen $G = sp$ nicht der unpaare Faktor $s - 2$, sondern der unpaare Faktor s zugelassen wird; so verrückt sich in der vorstehenden Tafel die Reihe für jeden Divisor p um ein Glied nach links.

19) In der von der Zahl 1 nach rechts und links sich erstreckenden natürlichen Reihe der unpaaren Zahlen bilden für irgend eine Primzahl p_k die p_k Glieder, von welchen $\frac{p_k - 1}{2}$ links und $\frac{p_k + 1}{2}$ rechts liegen, eine auf der rechten Seite mit der Primzahl p_k schliessende Reihe, welche zwei ungedeckte (durch keine der Primzahlen $3, 5, 7, \ldots p_k$ theilbare) Glieder enthält und in welcher das letzte Glied p_k, weil es eine Primzahl ist, keinen Faktor $3, 5, 7, \ldots p_{k-1}$ hat. Versetzt man also die Zahl p_k von dem letzten Gliede auf eine der mittleren leeren Stellen; so bleibt in der Mitte eine leere Stelle und am Ende entsteht eine leere Stelle, es stellt sich also eine Reihe von $p_k - 1$ Gliedern dar, welche ein ungedecktes Glied enthält.

Von der ersten Reihe von p_k Gliedern macht die Reihe von p_{k-1} Gliedern einen Bestandtheil aus, in welchem die Primzahl p_{k-1} zweimal ohne Faktor vorkömmt. Setzt man daher die Primzahl p_{k-1} auf die erste und die Primzahl p_k auf die zweite der beiden mittleren leeren Stellen; so entsteht eine kontinuirliche Reihe von gedeckten Gliedern von der Gliederzahl $p_{k-1} - 1$ oder, wenn man $p_{k-1} = p_k - 2r$ setzt, von der

Gliederzahl $p_k - 1 - 2r$. Hiernach bezeichnet $p_{k-1} - 1 = p_k - 1 - 2r$ die längste symmetrische, in den beiden Mittelgliedern jedoch durch die beiden Primzahlen p_k und p_{k-1} ausgefüllte Reihe, deren Glieder sämmtlich durch irgend eine der Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k theilbar sind, während die symmetrische Reihe von $p_k - 1$ Gliedern, in deren einem Mittelgliede die Primzahl p_k steht, ein, und die symmetrische Reihe von $p_k + 1$ Gliedern, in deren beiden Mittelgliedern weder p_k, noch p_{k-1} steht (sowie auch die nicht völlig symmetrische Reihe von p_k Gliedern), zwei untheilbare Glieder enthält. Beispielsweise hat für $p_k = 11$, $p_{k-1} = 7 = 11 - 2 . 2$ die längste kontinuirliche symmetrische Reihe theilbarer Glieder die Länge von $7 - 1 = 6$ Gliedern, in deren Mitte 11 und 7 steht (sie ist 5 3 7 11 3 5), während die symmetrische Reihe von $11 - 1 = 10$ Gliedern (nämlich die Reihe 3 7 5 3 . 11 3 5 7 3) ein und die symmetrische Reihe von $11 + 1 = 12$ Gliedern (nämlich 11 3 7 5 3 . . 3 5 7 3 11, sowie auch die 11-gliedrige Reihe 3 7 5 3 . . 3 5 7 3 11) zwei untheilbare Glieder enthält.

20) Da das Minimum der ungedeckten Glieder das Maximum der gedeckten Glieder, also die dichtest mögliche Lagerung der gedeckten Glieder voraussetzt; so werden die vorstehenden Sätze, welche für die von den beiden Mittelgliedern aus symmetrisch geordnete Reihe gelten, wahrscheinlich auch für jede unsymmetrische Reihe, also überhaupt für jede Strecke der natürlichen Reihe der unpaaren Zahlen Gültigkeit haben; bewiesen ist Diess jedoch durch Vorstehendes noch nicht.

Fassen wir für die k Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k eine Strecke (A) von p_k Gliedern und die nach einer oder nach zwei Seiten vorgenommene Verlängerung (B) dieser Strecke auf p_{k+1} Glieder, worin p_{k+1} die zunächst auf p_k folgende Primzahl bezeichnet, ins Auge. Es sei M das Minimum der ungedeckten Stellen aller möglichen Strecken (A) und $M + x$ das Minimum der ungedeckten Stellen aller möglichen Strecken (B). Lässt sich dann beweisen, dass $x = 1$ ist, dass also das Minimum der um $p_{k+1} - p_k$ Glieder zu Reihen (B) verlängerten Reihen (A) um eine Einheit grösser ist, als das Minimum der Reihen (A); so folgt aus diesem vorläufig als Hypothese aufgestellten Satze der Beweis aller obigen fundamentalen Sätze durch folgende Erwägungen.

Jede Reihe (A) enthält die Primzahl p_k in einem einzigen Gliede und zwar entweder ohne einen Faktor 3, 5, 7, ... p_{k-1}, oder mit einem solchen. Im letzteren Falle enthält die Reihe (A) jedenfalls mindestens ein gedecktes Glied mehr, als das Minimum M. Denn verschiebt man die Primzahl p_k auf ein ungedecktes Glied der Reihe (A); so würde, wenn diese Reihe nur M ungedeckte Glieder besässe, eine Reihe (A) von $M - 1$ ungedeckten Gliedern entstehen, was der Voraussetzung widerspricht.

Betrachten wir jetzt die durch Verlängerung der Reihe (A) entstehende Reihe (B). Dieselbe wird, da sie p_{k+1} Glieder umfasst, die nächst höhere Primzahl p_{k+1} in einem einzigen Gliede enthalten. Diese Primzahl p_{k+1} ist durch keine andere Primzahl theilbar, spielt also, wenn sie allein steht, die Rolle eines ungedeckten Gliedes, und bildet nur dann ein gedecktes Glied, wenn sie mit einem der Primfaktoren 3, 5, 7, . . . p_k verbunden ist. Angenommen nun, alle Reihen (B) von p_{k+1} Gliedern besitzen nach der vorausgeschickten Hypothese mindestens $M + 1$ ungedeckte Glieder; so müssen, wenn p_k darin allein steht, mindestens $M + 1$, und wenn p_k mit einem Faktor 3, 5, 7, . . . p_{k-1} behaftet ist, $M + 2$ ungedeckte Glieder vorhanden sein, weil weniger als $M + 2$ ungedeckte Glieder durch Verschiebung der Zahl p_k eine Anzahl ungedeckter Glieder erzeugen würde, welche kleiner als $M + 1$ ist, was der vorausgesetzten Hypothese widerspricht. Ferner folgt, dass, wenn p_k und p_{k+1} allein stehen, da p_{k+1} ein ungedecktes Glied vertritt, mindestens noch M ungedeckte Glieder vorhanden sein müssen, ferner, dass, wenn p_k mit einem Faktor 3, 5, 7, . . . p_{k-1}, dagegen p_{k+1} allein vorkömmt, mindestens noch $M + 1$ ungedeckte Glieder vorhanden sein müssen, ferner, dass, wenn p_k allein steht, p_{k+1} aber mit einem jener Faktoren behaftet ist, mindestens $M + 1$ ungedeckte Glieder da sein müssen, und endlich, dass, wenn p_k und p_{k+1} zugleich mit einem jener Faktoren verbunden ist, mindestens noch $M + 2$ ungedeckte Glieder vorhanden sein müssen. Wenn man einmal für das Minimum M den Werth 2 annimmt; so stellt sich die Voraussetzung, indem man alle Glieder, welche irgend einen oder mehrere der Faktoren 3, 5, 7, . . . p_{k-1}, aber nicht den Faktor p_k enthalten, weglässt, den etwaigen Faktor von p_k mit darüber gesetztem a und das Minimum der ungedeckten Glieder durch zugefügte Punkte bezeichnet, durch die beiden Formeln für (A) und (B) dar:

$$(A_1) = p_k\ .\ . \qquad (B_1) = p_k\ .\ .\ .$$

Die Konsequenzen aber sind aus (A_1) und (B_1) bezw. die folgenden (A_2) und (B_2)

$$(A_2) = \overset{a}{p_k}\ .\ .\ . \qquad (B_2) = \overset{a}{p_k}\ .\ .\ .\ .$$

ferner aus (B_1) und (B_2) die folgenden (B_3) und (B_4)

$$(B_3) = p_k\, p_{k+1}\ .\ . \qquad (B_4) = \overset{a}{p_k}\, p_{k+1}\ .\ .\ .$$

und aus (B_3) und (B_4) die folgenden (B_5) und (B_6)

$$(B_5) = p_k\, \overset{b}{p_{k+1}}\ .\ .\ . \qquad (B_6) = \overset{a}{p_k}\, \overset{b}{p_{k+1}}\ .\ .\ .\ .$$

Wenn man die Reihen (B) nach der Theilbarkeit durch die Primfaktoren 3, 5, 7, . . . p_{k+1} betrachtet und sie dann mit (B') bezeichnet (während sie im Vorstehenden nach der Theilbarkeit durch die Primfaktoren 3, 5, 7, . . . p_k betrachtet waren); so übernimmt die Zahl p_k die Rolle einer der unter der höchsten p_{k+1} liegenden Primzahlen an. Scheidet man dieselbe also aus den Formen (B_3), (B_4), (B_5), (B_6) ganz aus; so werden dieselben

$$(B_3') = p_{k+1}\ .\ . \qquad (B_4') = p_{k+1}\ .\ .\ .$$

$$(B_5') = \overset{b}{p_{k+1}}\ .\ .\ . \qquad (B_6') = \overset{b}{p_{k+1}}\ .\ .\ .\ .$$

Durch Verschiebung der nur einmal vorkommenden Primzahl p_{k+1} auf ein ungedecktes Glied werden die letzten beiden Formen (B_5') und (B_6') den ersten beiden (B_3') und (B_4') gleich. (Dass die Verschiebung einer nur einmal vorkommenden Primzahl keine andere Veränderung, als die in dem alten und in dem neuen Gliede entstehende hervorbringt, leuchtet ein). Hieraus geht hervor, dass, wenn für k Primzahlen sowohl die erste Hypothese, wonach M das Minimum für alle p_k-gliedrigen Reihen (A) ist, als auch die zweite Hypothese, wonach $M + 1$ das Minimum für alle p_{k+1}-gliedrige Reihen (B) ist, Geltung haben, für die $k + 1$ Primzahlen die p_{k+1}-gliedrigen Reihen (B') das Minimum M haben. Ob aber die auf p_{k+2} Glieder verlängerten Reihen (B'), welche ich nun mit (C) bezeichne, wiederum das Maximum $M + 1$ aufweisen, ist hiermit noch nicht konstatirt. Wäre jedoch die zweite Hypothese durch die erste bedingt; so würde die Konstanz des Minimums M für alle möglichen Werthe von k erwiesen sein, insofern dieses Minimum für den kleinstmöglichen Werth von k nachweisbar ist. Diess ist thatsächlich für $k = 1$, nämlich für die niedrigste Primzahl $p_k = 3$ der Fall, wie die Reihe

$$\text{in inf.} \lll \;.\;.\;3\;.\;.\;3\;.\;.\;3\;.\;.\;3 \ggg \text{in inf.}$$

lehrt. Es ist auch für $k = 2$, nämlich für $p_k = 5$ erfüllt durch die Reihe

$$\text{in inf.} \lll 5\;3\;.\;.\;3\;5\;.\;3\;.\;.\;\underset{5}{3}\;.\;.\;3\;.\;5\;3\;.\;.\;3\;5\;.\;3\;.\;.\;\underset{5}{3} \ggg \text{in inf.}$$

21) Die Aufgabe dreht sich jetzt um den Beweis, dass das Minimum M für die Reihen (A) das Minimum $M + 1$ für die Reihen (B) bedingt.

Die Reihe (B) muss, da sie p_{k+1} Glieder besitzt, nothwendig den Faktor p_{k+1} und zwar nur in einem einzigen Gliede enthalten. Dieses Glied kann nun zugleich mit einer der Primzahlen 3, 5, 7, . . . p_k oder mit einem Produkte a solcher und höherer Primzahlen behaftet sein, oder nicht, d. h. sein Nebenfaktor ist entweder a, oder 1, oder eine Zahl q, welche nur aus Primfaktoren $> p_{k+1}$ zusammengesetzt ist. Hat die Reihe (B) eine Anzahl ungedeckter Stellen; so wird, wenn $a = 1$, oder $= q$ ist, eine Verschiebung des Faktors p_{k+1} auf eine solche Stelle die Anzahl der ungedeckten Stellen nicht verändern, weil durch diese Verschiebung die Stelle, an welcher p_{k+1} stand, gleich 1, oder gleich q, also relativ prim zu allen in Betracht kommenden Primzahlen, mithin ein ungedecktes Glied wird. Nur wenn der Nebenfaktor gleich a ist, bewirkt diese Verschiebung eine Verminderung der ungedeckten Stellen um eine, indem auf der früheren Stelle von p_{k+1} eine Zahl a zurückbleibt, welche zu den theilbaren gehört. Ist daher das Minimum der ungedeckten Stellen gleich M; so muss (B), wenn p_{k+1} darin allein oder mit dem Nebenfaktor q steht, mindestens M, und wenn p_{k+1} den Nebenfaktor a hat, mindestens $M + 1$ ungedeckte Stellen haben. Da der zweite Fall sich durch Verschiebung der Zahl p_{k+1} stets auf den ersten reduziren lässt; so braucht man, da es sich lediglich um die Minimen der ungedeckten Stellen handelt, nur den ersten in Betracht zu ziehen. Es entsteht demnach die Frage: kann die p_{k+1}-gliedrige Reihe (B), welche die Primzahl p_{k+1} mit dem Nebenfaktor 1 oder q und M ungedeckte Stellen enthält, den Faktor p_{k+2} in sich bergen, sodass durch Verschiebung dieses Faktors auf eine der M ungedeckten Stellen möglicherweise eine p_{k+1}-stellige Reihe entstehen könnte, in welcher die beiden Faktoren p_{k+1} und p_{k+2} mit den Nebenfaktoren 1 oder q_1 oder q_2 und ausserdem $M - 1$ ungedeckte Stellen vorkämen? Um zu zeigen, dass Diess unmöglich ist, hat man vier Fälle zu unterscheiden: 1) dass p_{k+1} und p_{k+2} mit dem Nebenfaktor 1 behaftet sind, 2) dass p_{k+1} mit dem Nebenfaktor 1 und p_{k+2} mit dem Nebenfaktor q_2 behaftet ist, 3) dass p_{k+1} mit dem Nebenfaktor q_1 und p_{k+2} mit dem Nebenfaktor 1 behaftet ist, 4) dass p_{k+1} mit dem Nebenfaktor q_1 und p_{k+2} mit dem Nebenfaktor q_2 behaftet ist.

Haben im ersten Falle p_{k+1} und p_{k+2} den Nebenfaktor 1, enthält also die p_{k+1} - gliedrige Reihe zwei Zahlen von dem absoluten Werthe der beiden Primzahlen p_{k+1} und p_{k+2}; so ist sie eine der in Nr. 15 erwähnten niedrigen Strecken, welche die beiden Primzahlen p_{k+1} und p_{k+2}, also zwei zu 3, 5, 7, ... p_k relativ prime Zahlen oder ungedeckte Stellen enthält. Wäre nun das Minimum für die Reihe (A), also $M = 1$; so würde das Minimum für die eben bezeichnete Reihe (B) gleich 2, also um 1 Einheit grösser sein, als M, der zu beweisende Satz wäre daher für eine solche niedrige Strecke nachgewiesen. (Wäre $M = 2$; so würde, da dann M für (B) gleich M bleibt, der fragliche Satz hierdurch nicht nachgewiesen sein: nur, wenn für $M = 2$ zwischen jeder Primzahl p exkl. und der Zahl $2p + 1$ inkl. nachweisbar mindestens zwei Primzahlen lägen, würde der fragliche Satz hierdurch bewiesen).

Der zweite und dritte Fall, wo eine der beiden Zahlen p_{k+1} und p_{k+2} den Nebenfaktor 1 und die andere den Nebenfaktor q_1 oder q_2 hat, ist nicht möglich. Denn ein Faktor q, welcher durch keine der Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k theilbar ist, ist grösser als das Produkt $3 . 5 . 7 \ldots p_k = P$, also $\geq P p_{k+1}$, bezw. $\geq P p_{k+2}$. Eine so grosse Zahl kann aber mit der Zahl p_{k+2}, bezw. p_{k+1} nicht zusammen in einer p_{k+1} - gliedrigen Reihe liegen. Denn hat p_{k+1} den Nebenfaktor 1 und p_{k+2} den Nebenfaktor $q_2 > P$; so ist die Differenz der beiden Zahlen $q_2 p_{k+2}$ und p_{k+1}, also $q_2 p_{k+2} - p_{k+1} > 2 p_{k+1}$ oder $q_2 p_{k+2} > 3 p_{k+1}$, da schon $q_2 p_{k+1} > 3 p_{k+1}$ oder $q_2 > 3$ ist. Hat aber p_{k+2} den Nebenfaktor 1 und p_{k+1} den Nebenfaktor $q_1 > P$; so muss dieser Nebenfaktor $\geq P p_{k+3}$ sein, weil p_{k+2} nur ein einziges Mal in der betrachteten Reihe vorkommen, also q_1 nicht den Faktor p_{k+2} enthalten kann: alsdann ist aber die Differenz $q_1 p_{k+1} - p_{k+2}$ und noch mehr die Differenz $P p_{k+1} p_{k+3} - p_{k+2} > 2 p_{k+1}$ oder $P p_{k+1} p_{k+3} > 2 p_{k+1} + p_{k+2}$, da schon $P p_{k+1} p_{k+2} > 2 p_{k+2} + p_{k+2}$ oder $P p_{k+1} > 3$ ist.

Es bleibt hiernach nur noch der vierte Fall zu betrachten, wonach p_{k+1} den Nebenfaktor q_1 und p_{k+2} den Nebenfaktor q_2 hat. Da sowohl q_1, als auch $q_2 > P$ sind; so müssen die fraglichen beiden Glieder über die Zahl P hinaus liegen. Nun hat aber jede Strecke, von welcher ein Glied die Zahl P oder eine grössere Zahl enthält, hinsichtlich ihrer Theilbarkeit durch die Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k ihr Gegenbild in einer niedrigeren, sich unterhalb P ausdehnenden Strecke, worin die gedeckten und die ungedeckten Glieder die entgegengesetzte Reihenfolge beobachten. Diese Gegenstrecke kann jedoch an den beiden Stellen, welche den Faktoren p_{k+1} und p_{k+2} entsprechen, und welche beide unter P liegen, wenn sie in der ersten Strecke über P liegen, keine Nebenfaktoren enthalten, welche $> P$ sind, solange noch das niedrigste Glied G der ersten Strecke unter $2P + 1$ liegt. Demnach ist die Gegenstrecke für $G \leq 2P + 1$ unmöglich. Eine Strecke, deren niedrigstes Glied $G > 2P + 1$ ist, kömmt aber überall nicht in Betracht, da sich hinsichtlich der Theilbarkeit von

$2P + 1$ an die natürlichen unpaaren Zahlen wiederholen. Nebenbei bemerke ich, dass jede Strecke, in welcher die Zahl P liegt, mindestens zwei ungedeckte Stellen hat, da unmittelbar auf P sowohl nach links als auch nach rechts zwei solche Stellen folgen.

22) Durch Vorstehendes ist der Beweis erbracht, dass, wenn für eine p_k - gliedrige Reihe (A) das Minimum M der durch 3, 5, 7, ... p_k ungedeckt bleibenden oder zu der Zahl $3 . 5 . 7 \ldots p_k = P_k$ relativ primen Glieder $M = 1$ ist, die p_{k+1} - gliedrige Reihe (B) für P_k das Minimum 2 und für $P_{k+1} = 3 . 5 . 7 \ldots p_{k+1}$ wieder das Minimum 1 hat. Da für $k = 1$ oder $p_k = 3$ das Minimum $M = 1$ besteht; so folgt, dass jede p_k - gliedrige Reihe für jeden Werth der Primzahl p_k mindestens eine ungedeckte Stelle für P_k hat.

Dieser Beweis stützt sich auf den Tchebichefschen Satz, wonach zwischen a inkl. und $2a - 1$ inkl. oder zwischen a exkl. und $2a + 1$ inkl. wenigstens eine Primzahl liegt. Könnte bewiesen werden, dass, wenn a eine Primzahl ist, zwischen a exkl. und $2a + 1$ inkl. wenigstens zwei Primzahlen liegen; so würde durch Vorstehendes, wie ich bereits bemerkt habe, bewiesen sein, dass jede p_k - gliedrige Reihe für jeden Werth der Primzahl p_k mindestens zwei ungedeckte Stellen für P_k hat, weil für $k = 1$ oder $p_k = 3$ das Minimum M thatsächlich $= 2$ ist. In diesem Falle würde die eine der beiden ungedeckten Stellen durch eine Primzahl, welche $> p_k$ ist, also auch durch p_{k+1} gedeckt werden können, und das gewonnene Resultat würde dann darin bestehen, dass jede p_k - gliedrige Reihe mindestens eine ungedeckte Stelle für P_{k+1} hat.

Während der Satz hinsichtlich der zwischen a und $2a - 1$ liegenden Primzahlen den Satz über das Minimum der ungedeckten Stellen der Reihe (A) nach sich zieht, so zieht, umgekehrt, der Satz über dieses Minimum den Satz hinsichtlich der zwischen a und $2a - 1$ liegenden Primzahlen nach sich.

23) Ich habe bislang unter den k Primzahlen, welche in die p_k - gliedrige Reihe eintreten, die k aufeinander folgenden, also niedrigsten Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k verstanden. Setzt man dafür jetzt k beliebige Primzahlen; so bedeutet Diess, dass aus der natürlichen Reihe 3, 5, 7, ... p_k eine beliebige Anzahl, etwa die Primzahlen p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3} ..., durch Primzahlen p_{y_1}, p_{y_2}, p_{y_3} ..., welche $> p_k$ sind, ersetzt werden. In einer p_k - gliedrigen Reihe, welche zu den niedrigen Reihen gehört, kömmt jede Primzahl, welche $\leq p_k$ ist, mindestens einmal alleinstehend vor. Die Primzahl p_k kömmt ein einziges Mal vor, und jede grössere Primzahl p_{y_1}, p_{y_2}, p_{y_3} ... kann überhaupt höchstens einmal, möglicherweise aber gar nicht darin vorkommen. Wird also eine der Primzahlen 3, 5, 7, ... p_k, etwa die Primzahl p_{x_1}, ausgeschieden; so entsteht wenigstens ein ungedecktes Glied mehr. Diese leer gewordene Stelle kann durch eine Primzahl, welche $> p_k$ ist, etwa durch die Primzahl p_{y_1}, ausgefüllt werden, wenn diese überhaupt in der gegebenen Reihe vorkömmt. Da die letztere aber nur höchstens einmal in der Strecke vorkömmt; so können durch sie nicht mehr als eine leere Stelle gedeckt werden. In Folge der Vertauschung der Primzahl p_{x_1} mit p_{y_1} nimmt also die Anzahl der ungedeckten

Stellen entweder den bestehenden, oder einen grösseren, niemals aber einen kleineren Werth an. Dasselbe gilt von der Vertauschung der übrigen Primzahlen. Für die obige Beweisführung sind die niedrigen Strecken die entscheidenden; es leuchtet daher ein, dass die Mindestzahl der in der p_k - gliedrigen Strecke ungedeckt bleibenden Glieder für k Primzahlen von der Grösse und Reihenfolge dieser Primzahlen unabhängig ist, indem die wachsende Grösse derselben die Anzahl der ungedeckten Glieder nur vergrössern, nicht aber verkleinern kann.

24) Nach dem Früheren gelten die für die natürliche Reihe der unpaaren Zahlen dargestellten Gesetze für jede arithmetische Progression, deren Glieder nach der Formel $x A - C$ mit zwei relativ primen Zahlen A und C gebildet sind. Das aus dem Tchebichefschen Satze sich ergebende Resultat besteht also darin, dass eine Strecke von p_k Gliedern einer solchen Progression mindestens ein Glied besitzt, welches durch keine der k Primzahlen theilbar ist. Da unser Symbol p_k dem von Legendre gebrauchten Symbole $\pi^{(k)}$ entspricht; so enthält dieses Resultat nicht den von Legendre aufgestellten Satz, welcher das eine untheilbare Glied schon in der kürzeren Strecke von $\pi^{(k-1)} = p_{k-1}$ Gliedern als anwesend behauptet. Wenn aber der Tchebichefsche Satz eine Ergänzung dahin fände, dass zwischen einer Primzahl p exkl. und der Zahl $2p + 1$ inkl. mindestens zwei Primzahlen lägen; so würde daraus folgen, dass eine Progressionsstrecke von p_k Gliedern mindestens ein Glied besitze, welches durch keine von $k + 1$ gegebenen Primzahlen theilbar ist, oder, was Dasselbe sagt, dass eine Strecke von $p_{k-1} = \pi^{(k-1)}$ Gliedern mindestens ein Glied besitze, welches durch keine von k gegebenen Primzahlen theilbar wäre. Nur in dieser Voraussetzung, also bei der Unzulänglichkeit des Tchebichefschen Satzes, würde sich Legendre's Satz bestätigen. Thatsächlich ist der Tchebichefsche Satz nach Ausweis der Primzahlentafeln für Zahlen bis 1 000 000, welche etwa 78 500 Primzahlen umfassen, und mit grösster Wahrscheinlichkeit für Zahlen, welche den Werth von vielen Millionen überschreiten, unvollständig, indem bis auf diese Höhe hinauf zwischen p exkl. und $2p + 1$ inkl. mindestens zwei Primzahlen liegen, deren Menge auf den Zwischenraum von 500 000 bis 1 000 000 sogar auf nahezu 37 000 wächst. Trotz dieses starken Anwachsens der Menge der Primzahlen auf der Strecke von p bis $2p + 1$ kann doch von einem grösseren Minimum als zwei keine Rede sein, da die drei kleinsten Primzahlen $p = 3, 5, 7$ nur zwei Primzahlen auf diesem Zwischenraume ergeben. (Auch für die Anzahl der ungedeckten Stellen einer p_k - gliedrigen Strecke kann ein grösseres Minimum als 2 nicht in Frage kommen, da es für jeden noch so hohen Werth von p_k stets eine solche Strecke mit nur zwei ungedeckten Stellen giebt, nämlich die symmetrische Anfangsstrecke mit der Zahl p_k an der Anfangs- oder Endstelle).

Thatsächlich hat hiernach Legendre's Satz bis zu Primzahlen $p_k \leq 1\,000\,000$ oder für Progressionsstrecken von mindestens $k = 78\,500$ Gliedern unbedingte Gültigkeit. Als nachgewiesen kann jedoch durch Vorstehendes nur der Satz gelten, dass eine Progressionsstrecke von

p_k Gliedern mindestens ein Glied enthalte, welches durch keine von k Primzahlen theilbar ist.

25) Die Anzahl der Thatsachen, welche bestätigen, dass zwischen einer positiven Primzahl p exkl. und der Zahl $2p + 1$ inkl. mindestens zwei Primzahlen liegen, ist so überwältigend gross, dass an der Allgemeingültigkeit dieses Satzes nicht gezweifelt werden kann. Da jedoch Millionen bestätigende Thatsachen, überhaupt Thatsachen als Erfahrungsresultate niemals logische und mathematische Gewissheit verbürgen; so ist im wissenschaftlichen Interesse ein strenger Beweis jenes Satzes wünschenswerth. Ich führe denselben folgendermaassen.

Nach Serret's höherer Algebra, 4-te Auflage, 2-ter Theil, Nr. 402, S. 238, liegen nach der Theorie von Tchebichef zwischen den Zahlen l und L mehr als k Primzahlen, wenn l und L die Gleichung

$$l = \frac{5}{6} L - 2\sqrt{L} - \frac{25}{16 A \log 6} \log^2 L - \frac{5}{6A}\left(\frac{25}{4} + k\right) \log L - \frac{25}{6A}$$

erfüllen, worin $A = \log \dfrac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{,}92129 \ldots$ ist. In ähnlicher Weise, wie dort in Nr. 403 für $k = 0$ gezeigt wird, dass zwischen a und $2a - 2$ wenigstens eine Primzahl liegt, ergiebt sich nun für $k = 1$, dass zwischen a und $2a + 1$ wenigstens zwei Primzahlen liegen, wenn die beiden Bedingungen $2a + 1 > L$ und $a < l$ erfüllt sind. Die erste wird durch $L = 2a$ erfüllt, und die zweite erfordert, indem man in dem Ausdrucke für l die Koeffizienten berechnet und $L = 2a$ setzt, die Ungleichheit

$$a < \frac{5}{3} a - 2\sqrt{2a} - 0{,}94655 \log^2 2a - 6{,}55783 \log 2a - 4{,}52264$$

oder

$$a > 3\sqrt{2a} + 1{,}41982 \log^2 2a + 9{,}83679 \log 2a + 6{,}78396$$

Dieser Bedingung wird genügt, wenn $a > 166{,}594 \ldots$, also, in ganzen Zahlen, ≥ 167 ist. Für alle solche Werthe liegen zwischen a und $2a$ und noch gewisser zwischen a und $2a + 1$ wenigstens zwei Primzahlen (gleichviel, ob a selbst eine Primzahl ist, oder nicht). Was aber die Werthe von a betrifft, welche < 167 sind; so lehren die Tafeln der Primzahlen, dass für alle kleineren Werthe von a zwischen a exkl. und $2a + 1$ inkl. wenigstens zwei Primzahlen liegen. (Für die kleinsten Werthe von $a = 2, 3, 4, 5$ ist $2a + 1$ bezw. $= 5, 7, 9, 11$, $2a$ dagegen $= 4, 6, 8, 10$, sodass selbst für die kleinsten unser Satz für a und $2a + 1$, nicht aber für a und $2a$ gilt).

Hierdurch ist Legendre's Satz streng bewiesen und die in Nr. 11 aufgestellte Hypothese zur Gewissheit geworden. Die Unzulänglichkeit von Legendre's Beweise in dessen Zahlentheorie, 2-ter Theil, §. 9, Nr. 403 bis 410, besteht darin, dass er die obige Hypothese wie einen selbstverständlichen Grundsatz behandelt hat, indem er die symmetrische Anfangsstrecke der Zahlenreihe hinsichtlich des Minimums der ungedeckten Glieder ohne Weiteres als maassgebend für jede folgende Strecke von gleicher Gliederzahl betrachtete.

26) Die Erkenntniss, dass von einer bestimmten Gliederzahl mindestens eins durch keine von k gegebenen Primzahlen theilbar ist, hat unzweifelhaft einen wissenschaftlichen Werth: die sehr grosse Abweichung, welche die wirkliche Anzahl der untheilbaren Glieder von jenem Minimum erfahren kann, verleihet jedoch der Frage nach dieser wirklichen Anzahl für praktische Zwecke eine vorwiegende Bedeutung. Diese Frage ist bereits in Nr. 17 allgemein für eine beliebige Gliederzeit und eine beliebige Anzahl k von Primzahlen gelös't werden. Ich habe nur hinzuzufügen, dass, wenn die k gegebenen Primzahlen nicht die natürliche Reihenfolge $3, 5, 7, \ldots p_k$ bilden, sondern beliebige Werthe haben, diese Werthe an die Stelle jener k Primzahlen treten, was für die Berechnung der gesuchten untheilbaren Glieder ganz gleichgültig ist.

Wenn es sich nicht um eine Strecke der natürlichen unpaaren Zahlenreihe, sondern um eine Strecke der aus dem allgemeinen Gliede $xA - C$ (oder $xA + C$) entspringenden arithmetischen Progression handelt; so habe ich gezeigt, dass eine solche Strecke hinsichtlich der Theilbarkeit durch k Primzahlen immer einer ebenso langen Strecke der natürlichen unpaaren Zahlen (welche der Progression mit dem allgemeinen Gliede $2x - 1$ oder $2x + 1$ angehört) äquivalent ist. Diese Strecke ist nach der dafür gegebenen Regel leicht darzustellen: es ist jedoch beachtenswerth, dass man auch ohne Darstellung der äquivalenten natürlichen Strecke die Anzahl der untheilbaren Glieder einer gegebenen arithmetischen Reihe mit dem Koeffizienten A durch ein Verfahren, welches dem in Nr. 17 angewandten ganz gleich ist, bestimmen kann, indem man in den Formeln $G = sp + r$ für s nicht den grössten unter $\frac{G}{p}$ liegenden unpaaren, sondern den grössten unter $\frac{G}{p}$ liegenden Faktor von der Form $xA + 1$ und falls das Anfangsglied G_1 durch p theilbar sein sollte, den um A Einheiten verminderten Werth von $\frac{G_1}{p}$, also den Werth $(x-1)A + 1$, ausserdem aber die für die Grössen $m_1, m_2, \ldots m_{12} \ldots m_{123} \ldots$ nicht die Werthe von $\frac{s_2 - s_1}{2}$, sondern die Werthe von $\frac{s_2 - s_1}{A}$ nimmt. So hat man z. B. für die Primzahlen $3, 5, 7$ in der in Nr. 8 angeführten 11-gliedrigen Reihe von $G_1 = 335$ bis $G_{11} = 375$, für welche $A = 4$ ist,

$$\frac{335}{3} = 109 \qquad \frac{375}{3} = 125 \qquad \frac{125 - 109}{4} = 4 = m_1$$

$$\frac{335}{5} = 61 \qquad \frac{375}{5} = 73 \qquad \frac{73 - 61}{4} = 3 = m_2$$

$$\frac{335}{7} = 45 \qquad \frac{375}{7} = 53 \qquad \frac{53 - 45}{4} = 2 = m_3$$

$$\frac{335}{3 \cdot 5} = 21 \qquad \frac{375}{3 \cdot 5} = 25 \qquad \frac{25 - 21}{4} = 1 = m_{12}$$

Die Reihe hat mithin $m_1 + m_2 + m_3 - m_{12} = 4 + 3 + 2 - 1 = 8$ gedeckte und daher $11 - 8 = 3$ ungedeckte Glieder, was den obigen Thatsachen entspricht.

27) Legendre bestimmt in Nr. 423 seiner Zahlentheorie ebenfalls die Anzahl der in einer gegebenen Progressionsstrecke liegenden ungedeckten Glieder in einer dem Verfahren in Nr. 4 ähnlichen Weise, ein Verfahren, welches gegen die in Nr. 18 entwickelte Regel an Einfachheit sehr zurücksteht. Ausserdem giebt er gleich anderen Schriftstellern Näherungsformeln für die Anzahl der zwischen gegebenen Grenzen liegenden Primzahlen. Auch ich habe mir gestattet, in den „Beiträgen zur Zahlentheorie", §. 16, sowie in der „quadratischen Zerfällung der Primzahlen", Nr. 71, mehrere allgemeine Sätze über Primzahlen zu entwickeln, insbesondere an letzterer Stelle ein Kennzeichen einer Primzahl und ein direktes Verfahren zur Zerlegung einer theilbaren Zahl in ihre Faktoren und ausserdem in beiden Schriften einige Formeln zur Vorausbestimmung von Primzahlen anzugeben.

Alle Formeln und Rechnungsvorschriften, welche nicht die Zerlegung einer Zahl in ihre Faktoren oder welche nicht wenigstens die gegebene Zahl als eine theilbare oder untheilbare erkennen lassen, welche sich also auf die Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Grenzen liegenden theilbaren und untheilbaren Zahlen beschränken, haben im Wesentlichen nur ein wissenschaftliches Interesse. Die praktische Anwendung kann sich nicht mit der Kenntniss dieser Anzahl und noch weniger mit der angenäherten Kenntniss derselben begnügen, sondern muss die genaue Kenntniss der Eigenschaften aller zwischen gegebenen Grenzen liegenden Zahlen verlangen. Für eine einzelne gegebene Zahl erfüllt das soeben bezeichnete, bei Gelegenheit der quadratischen Zerfällung der Primzahlen von mir angegebene Verfahren den bezeichneten Zweck: für eine längere Reihe hoher Zahlen würde die Anwendung auf jede einzelne Zahl umständlich werden und hinsichtlich der Leichtigkeit der Ausführung dem Verfahren weichen, welches sich auf die geometrische Anschauung der Wiederholung einunddesselben Faktors in gleichen Abständen stützt. Es kömmt dann nur darauf an, auf einfachstem Wege in der gegebenen Strecke die Angriffspunkte für die einzelnen Faktoren zu bestimmen. Hierbei kann man immer von der Voraussetzung ausgehen, dass die unter der Quadratwurzel der gegebenen oberen Grenzzahl liegenden theilbaren und untheilbaren Zahlen bekannt seien, da man, wenn diese Kenntniss nicht vorhanden wäre, mit der Bestimmung der unter dieser Quadratwurzel liegenden Zahlen zu beginnen hätte

Ist also die Aufgabe gegeben, alle zwischen den Zahlen G_1 und G_n liegenden unpaaren Zahlen in ihre Faktoren zu zerlegen; so sei g die grösste unpaare Zahl, welche $\leq \sqrt{G_n}$ ist. Setzt man die Kenntniss aller Primzahlen 3, 5, 7, 11 . . . bis g, sowie die Kenntniss der Faktoren aller bis g hinaufreichenden theilbaren Zahlen voraus; so muss jede zwischen G_1 und G_n liegende theilbare Zahl einen Faktor $\leq g$ haben, und jede Zahl, welche einen solchen Faktor nicht hat, ist eine Primzahl. Bezeichnet man die k Primzahlen $3, 5, 7 \ldots$ bis g bezw. mit $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ und setzt man das Produkt aller, also $p_1 p_2 p_3 \ldots p_k = P$; so beginnt man zunächst damit, die Grösse P in Theilfaktoren P_1, P_2, P_3 u. s. w. zu zerlegen, welche eine möglichst grosse Anzahl der Primfaktoren p_1, p_2, p_3 ... der Reihe nach enthalten, sodass $P_1 = p_1 p_2 \ldots p_x$, $P_2 = p_{x+1} p_{x+2} \ldots p_y$, $P_3 = p_{y+1} p_{y+2} \ldots p_z$ u. s. w. ist, und die Werthe von x, y, z ... grösstmöglich, aber so genommen werden, dass ein Vielfaches von P_1, P_2, P_3 u. s. w. zwischen die Grenzen G_1 und G_n fällt, dass also, wenn q_1 eine unpaare Zahl $< p_{x+1}$, ferner $q_2 < p_{y+1}$, ferner $q_3 < p_{z+1}$ u. s. w. ist, $Q_1 = q_1 P_1$, $Q_2 = q_2 P_2$, $Q_3 = q_3 P_3$ u. s. w. lauter Zahlen sind, welche zwischen G_1 und G_n liegen. (Dass diese Operation durch Division mit P_1, P_2, P_3 ... in G_1 und G_n leicht auszuführen ist, liegt auf der Hand). Hierdurch ist der Angriffspunkt Q_1 für alle Primzahlen p_1, p_2, ... p_x, ferner der Angriffspunkt Q_2 für alle Primzahlen p_{x+1}, p_{x+2}, ... p_y, ferner der Angriffspunkt Q_3 für alle Primzahlen p_{y+1}, p_{y+2}, ... p_z u. s. w. innerhalb der Grenzen G_1 und G_2 bestimmt, von wo aus man alle diese Primzahlen nach links und rechts über die ganze gegebene Strecke vertheilen kann. Diese Vertheilung lässt die in jeder getroffenen, also theilbaren Zahl die darin enthaltenen verschiedenen Primfaktoren und in jeder nicht getroffenen Zahl eine Primzahl erkennen.

Beispielsweise sind zur Zerlegung aller Zahlen zwischen 500 und 1000, da $g = 31$ ist, die neun Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31 erforderlich, und man hat $Q_1 = 5 \times 3 . 5 . 7 = 525$, $Q_2 = 5 \times 11 . 13 = 715$, $Q_3 = 3 \times 17 . 19 = 969$, $Q_4 = 1 \times 23 . 29 = 667$, $Q_5 = 17 \times 31 = 527$. Hiernach sind von der Zahl 525 aus die Primfaktoren 3, 5, 7, von der Zahl 715 aus die Primfaktoren 11, 13, von der Zahl 969 aus die Primfaktoren 17, 19, von der Zahl 667 aus die Primfaktoren 23, 29 und von der Zahl 527 aus der Primfaktor 31 zu vertheilen.

28) Schliesslich bemerke ich, dass sich durch das in Nr. 18 vorgeführte Verfahren, für die volle Reihe der unpaaren Zahlen 3, 5, 7, 9, ... P, welche bis zu dem Produkte $P = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$ von k beliebigen Primzahlen hinaufreicht, welche also $\frac{P-3}{2} + 1 = \frac{P-1}{2}$ Glieder umfasst, die Anzahl der durch die Primzahlen p_1, p_2, ... p_k gedeckten und nicht gedeckten Glieder durch eine allgemeine Formel bestimmen lässt. Man hat nämlich, da jetzt $G_1 = 3$ und $G_{n+1} = P$ ist, für alle einfachen und mehrfachen Divisoren $s_1 = -1$ und erhält für alle s_2 ganze Zahlen. Es ist nämlich

$$\frac{P}{p_1} = p_2 p_3 \ldots p_k \qquad \frac{P}{p_2} = p_1 p_3 p_4 \ldots p_k \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{P}{p_1 p_2} = p_3 p_4 \ldots p_k \qquad \frac{P}{p_1 p_3} = p_2 p_4 \ldots p_k \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{P}{p_1 p_2 p_3} = p_4 p_5 \ldots p_k \qquad \frac{P}{p_1 p_2 p_4} = p_3 p_5 \ldots p_k \text{ u. s. w.}$$

u. s. w. Hiernach ist mit Bezug auf Nr. 6

$$m_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{p_1} + 1\right) \qquad m_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{p_2} + 1\right) \text{ u. s. w.}$$

$$m_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{p_1 p_2} + 1\right) \qquad m_{13} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{p_1 p_3} + 1\right) \text{ u. s. w.}$$

$$m_{123} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{p_1 p_2 p_3} + 1\right) \qquad m_{124} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{P}{p_1 p_2 p_4} + 1\right) \text{ u. s. w.}$$

u. s. w. und daher für die allgemeine Formel der gedeckten Glieder in Nr. 6

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{P}{p_1} + 1\right) + \left(\frac{P}{p_2} + 1\right) + \ldots\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{P}{p_1} + \frac{P}{p_2} + \ldots + \frac{P}{p_k} + k_1\right\}$$

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{P}{p_1 p_2} + 1\right) + \left(\frac{P}{p_1 p_3} + 1\right) + \ldots\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{P}{p_1 p_2} + \frac{P}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{P}{p_{k-1} p_k} + k_2\right\}$$

$$S_3 = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{P}{p_1 p_2 p_3} + 1\right) + \ldots\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{P}{p_1 p_2 p_3} + \ldots \frac{P}{p_{k-2} p_{k-1} p_k} + k_3\right\}$$

u. s. w., worin k_1, k_2, k_3 . . . die Anzahl der Kombinationen zu je 1, 2, 3 . . . Gliedern von k Elementen darstellen, also $k_1 = k$, $k_2 = \frac{1}{2}(k-1)k$, $k_3 = \frac{1}{2}\{(k-2)(k-1) + (k-3)(k-2) + \ldots + 1 . 2\}$, $k_4 = \frac{1}{2}\{(k-3)(k-2) + (k-4)(k-3) + \ldots + 1 . 2\}$ u. s. w. ist.

Beispielsweise hat man für die drei Primzahlen 3, 5, 7, also für die unpaare Zahlenreihe 3, 5, 7, 9, . . . 105 von 52 Gliedern, da $k_1 = 3$, $k_2 = \frac{1}{2} . 2 . 3 = 3$, $k_3 = \frac{1}{2} . 1 . 2 = 1$ ist,

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2}(3 . 5 + 3 . 7 + 5 . 7 + 3) &= 37 \\ S_2 &= \tfrac{1}{2}(3 + 5 + 7 + 3) &= 9 \\ S_3 &= \tfrac{1}{2}(1 + 1) &= 1 \end{aligned}$$

mithin die Anzahl der gedeckten Glieder $S_1 - S_2 + S_3 = 37 - 9 + 1 = 29$ und die Anzahl der ungedeckten Glieder $52 - 29 = 23$. Die ungedeckten Glieder sind relativ prim zu 3, 5, 7; im vorliegenden Falle, wo $\sqrt{105} < 11$ ist und zwischen 7 und 11 nur die theilbare unpaare Zahl 9 liegt, müssen diese 23 relativ primen Zahlen sogar lauter Primzahlen sein.

Anhang.

Die Sichtung der Zahlen nach ihrer Zusammensetzung.

Die vorstehend in Nr. 27 erwähnten, in meinen Beiträgen zur Zahlentheorie und in der Schrift über die quadratische Zerfällung der Primzahlen enthaltenen Sätze über Primzahlen, sowie alle sonst bekannten Sätze, welche die genaue Bestimmung der zwischen zwei gegebenen Grenzen liegenden Primzahlen bezwecken, gehen von der Annahme aus, dass ein gewisses Anfangsstück der natürlichen Primzahlenreihe bereits bekannt geworden sei. Durch den nachfolgenden Aufsatz beabsichtige ich, die Theorie der Primzahlen in zwei Richtungen zu erweitern: einmal, eine Regel zur Bestimmung aller unter einer beliebig gegebenen Grenze liegenden Primzahlen ohne die Bekanntschaft irgend einer Primzahl aufzustellen, sodann, ein Verfahren zur Ermittlung der unter dieser Grenze liegenden zusammengesetzten Zahlen, getrennt nach den Zusammensetzungen aus 2, 3, 4 u. s. w. Primzahlen anzugeben. Zu diesem Ende schicke ich einige Hülfssätze voraus.

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ seien n verschiedene, in beliebiger Ordnung aufgestellte, prime oder zusammengesetzte, unpaare Zahlen, also n unpaare Zahlen, deren wesentliches Merkmal die numerische Verschiedenheit ist. Nimmt man aus diesen Grundzahlen mit Zulassung der Wiederholung jeder einzelnen Zahl n Faktoren eines Produktes, welches ich eine n-fache Zahl nennen will; so hat dieses Produkt, wenn $a, b, c \ldots$ die gewählten Grundzahlen sind, die Form $a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \ldots z^{n_n}$, worin $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_n = n$ und jeder folgende der Exponenten $n_1, n_2, n_3, \ldots n_n$ kleiner als der vorhergehende, oder ihm gleich ist. So giebt es z. B. aus fünf Grundzahlen folgende sieben Formen 5-facher Zahlen

$$a^5, \quad a^4 b, \quad a^3 b^2, \quad a^3 b c, \quad a^2 b^2 c, \quad a^2 b c d, \quad a b c d e$$

In den Gliedern, welche nicht alle n Zahlen enthalten, kann man, wenn man will, die fehlenden Faktoren durch Potenzen vom Grade 0 ergänzen, also z. B. $a^5 b^0 c^0 d^0 e^0$ statt a^5 setzen.

Die Formen, welche sich bei der Erhöhung der Exponentensumme n um eine Einheit, also auf $n + 1$ ergeben, gehen aus den Formen für n

durch Multiplikation der Letzteren mit einer **einfachen** Zahl hervor, wobei jedoch die Multiplikation der verschiedenen Stellen einer Zahl mit einem gleichnamigen Faktor mehrere neue Formen erzeugen kann. So erhält man z. B. aus den vorstehenden sieben 5-fachen Zahlen die zehn 6-fachen Zahlen a^6, $a^5 b$, $a^4 b^2$, $a^3 b^3$, $a^4 b c$, $a^3 b^2 c$, $a^2 b^2 c^2$, $a^3 b c d$, $a^2 b^2 c d$, $a b c d e$.

Alle höheren Zahlformen, nämlich die 2-fachen, 3-fachen, 4-fachen u. s. w. können hiernach aus der einfachen Zahl a durch fortgesetzte Multiplikation mit je einer einfachen Zahl gewonnen werden. Man hat

1-fach	a							
2-fach	a^2	$a b$						
3-fach	a^3	$a^2 b$	$a b c$					
4-fach	a^4	$a^3 b$	$a^2 b^2$	$a^2 b c$	$a b c d$			
5-fach	a^5	$a^4 b$	$a^3 b^2$	$a^3 b c$	$a^2 b^2 c$	$a^2 b c d$	$a b c d e$	
6-fach	a^6	$a^5 b$	$a^4 b^2$	$a^3 b^3$	$a^4 b c$	$a^3 b^2 c$	$a^2 b^2 c^2$	$a^3 b c d$
	$a^2 b^2 c d$	$a b c d e$						

u. s. f. Nennt man eine aus m verschiedenen Zahlen $a, b, c \ldots$ oder deren Potenzen bestehende Zahl eine m-**stellige**, sodass also $a b c$, $a^2 b c$, $a^3 b c$, $a^2 b^2 c$, $a^4 b c$ u. s. w. 3-stellige Zahlen sind; so kann jede n-fache Zahl auf verschiedene Weise durch Kombination ihrer einfachen Elemente a, b, c ... als m-stellige Zahlform dargestellt werden, insofern $m < n$ ist. Die einzelnen Faktoren einer solchen m-stelligen Zahlform sind im Allgemeinen selbst mehrfache und mehrstellige Zahlen und zwei dieser m-stelligen Zahlformen gelten nur dann als gleich, wenn sie aus lauter gleichen Faktoren bestehen: die Verschiedenheit der in Rede stehenden m-stelligen Zahlformen, in welchen eine n-fache Zahl erscheinen kann, bedingt also die Ungleichheit mindestens zweier ihrer Faktoren. So erscheint die 5-fache Zahl a^5 in

zwei 2-stelligen	Zahlen	$a^4 . a$, $a^3 . a^2$
zwei 3- „	„	$a^3 . a . a$, $a^2 . a^2 . a$
einer 4- „	Zahl	$a . a . a . a^2$

Die 5-fache Zahl $a^2 b^2 c$ erscheint in

acht 2-stelligen	Zahlen	$a^2 . b^2 c$, $a . a b^2 c$, $a b . a b c$, $a b^2 . a c$, $a^2 b . b c$, $a^2 c . b^2$, $a^2 b^2 . c$, $a^2 b c . b$
neun 3- „	„	$a^2 . b . b c$, $a^2 . b^2 . c$, $a . b . a b c$, $a . b^2 . a c$, $a . c . a b^2$, $a . a b . b c$, $a b . a b . c$, $a b . a c . b$, $a^2 b . b . c$
fünf 4- „	„	$a^2 . b . b . c$, $a . a . b^2 . c$, $a b . a . b . c$, $a c . a . b . b$, $a . a . b . b c$

Die Anzahl der m-stelligen Zahlformen, in welchen eine n-fache Zahl auftreten kann, ist eine Funktion der Exponenten n_1, n_2, n_3 ..., welche nach den Prinzipien der Kombinationslehre ermittelt werden kann, jedoch in ihrer allgemeinen Gestalt eine komplizirte Form annimmt. Ich lasse diese allgemeine Formel um so mehr auf sich beruhen, als es sich im Folgenden nicht nur um die Anzahl der möglichen Zahlformen, sondern auch um die Herstellung dieser Formen selbst handelt, wozu sich leicht eine praktische Kombinationsregel aufstellen lässt. Zur sicheren Feststellung der Begriffe nenne ich eine n-fache Zahl, wenn alle darin enthaltenen Grundzahlen a, b, c . . . Primzahlen sind, eine absolut n-fache Zahl, und wenn sich unter den Zahlen a, b, c . . . auch zusammengesetzte befinden können, eine relativ n-fache Zahl (die absolut einfachen Zahlen sind dann die Primzahlen). Ausserdem heisse eine in allgemeinen Zahlzeichen a, b, c . . . dargestellte m-stellige Zahl wie $a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$ . . . eine generelle, eine in speziellen Zahlwerthen $A = a^{n_1}$, $B = b^{n_2}$, $C = c^{n_3}$ u. s. w. dargestellte m-stellige Zahl ABC . . . eine spezielle (sodass also z. B. $3^2 . 15 . 7^3$ in der Gestalt $9 . 15 . 343$ eine spezielle 3-stellige Zahl ist).

Wenn man beabsichtigt, alle unpaaren Zahlen 3, 5, 7, 9, . . . z bis hinauf zu der unpaaren Zahl z einschliesslich zu sichten; so ist die gesammte in Betracht kommende Anzahl von Zahlen oder die Summe aller relativ einfachen Zahlen $\alpha_1 = \frac{1}{2}(z - 3) + 1$.

Durch die in meinen Beiträgen zur Zahlentheorie S. 188 und 189 vorgeführte einfache Rechnung, welche für die jetzt als Anfangsgrenze angenommene Zahl 3 und unter Zulassung aller unpaaren Faktoren auszuführen ist, ergiebt sich die Summe α_2 aller relativ 2-fachen Zahlen, ferner die Summe α_3, α_4, α_5 . . . bezw. aller relativ 3-, 4-, 5- u. s. w. fachen Zahlen.

Unter den α_2 relativ 2-fachen Zahlen erscheint jede aus zwei Primzahlen bestehende, also jede absolut 2-fache Zahl nur ein einziges Mal, und ihr spezieller Werth kann nicht unter den 3- und mehrfachen Zahlen vorkommen: eine relativ 2-fache Zahl jedoch, welche einen zusammengesetzten Faktor hat, kann unter den α_2 Zahlen mehrmals erscheinen, und sie erscheint nothwendig ein oder mehrere Male unter den mehr als 2-fachen Zahlen. Eine relativ 3-fache Zahl, welche aus drei Primfaktoren besteht, kömmt unter den α_3 Zahlen nur einmal und unter den mehr als 3-fachen Zahlen gar nicht vor: eine relativ 3-fache Zahl jedoch, welche einen zusammengesetzten Faktor hat, kann unter den α_3 mehrmals, im Allgemeinen s_1-mal erscheinen, und sie erscheint nothwendig ein oder mehrere Male unter den mehr als 3-fachen Zahlen. Diese Schlussfolgerung ist leicht auf die 4- und mehrfachen Zahlen auszudehnen, und es ergiebt sich daraus, dass man zur Sichtung der α_1 Zahlen verschiedene Wege einschlagen kann.

Der erste Weg besteht in der Berechnung der speziellen Werthe aller 2-, 3-, 4- u. s. w. fachen Zahlen und in der Ausscheidung derjenigen, welche unter den α_2, α_3, α_4 . . . Zahlen mehr als einmal vorkommen. Ist die Anzahl der auszuscheidenden Zahlen bezw. β_2, β_3, β_4 . . .; so enthalten die gegebenen α_1 unpaaren Zahlen $\alpha_2 - \beta_2$ zusammengesetzte Zahlen, also $\alpha_1 - (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2$ Primzahlen. Durch diese Ausscheidungen identischer Zahlwerthe reduziren sich die 2-, 3-, 4- . . . fachen Zahlen bezw. auf $\alpha_2 - \beta_2$, $\alpha_3 - \beta_3$, $\alpha_4 - \beta_4$ u. s. w.

Zahlen. Die $\alpha_2 - \beta_2$ zusammengesetzten Zahlen enthalten absolut 2-fache, 3-fache, 4-fache u. s. w. Fasst man alle 2-, 3-, 4- . . . fachen Zahlen zusammen ins Auge und scheidet aus den $\alpha_2 - \beta_2$ verschiedenen 2-fachen Zahlen alle γ_2 Zahlen aus, welche sich unter den 3-, 4- . . . fachen Zahlen vorfinden; so bleiben $\alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2$ absolut 2-fache Zahlen zurück. Scheidet man ferner aus den $\alpha_3 - \beta_3$ verschiedenen 3-fachen Zahlen alle γ_3 Zahlen aus, welche sich unter den 4- . . . fachen Zahlen vorfinden; so bleiben $\alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3$ absolut 3-fache Zahlen übrig. Auf diese Weise werden die zusammengesetzten Zahlen in absolut 2-, 3-, 4- . . . fache Zahlen gesichtet.

Wenn man auf die unmittelbare Darstellung des speziellen Werthes der zusammengesetzten Zahlen verzichtet, bedarf es der vorstehenden umständlichen Berechnung nicht. Man kann die 2-fachen Zahlen, deren Anzahl α_2 ist, in dieser Form beibehalten, muss aber alle 3- und mehrfachen Zahlen als spezielle 2-fache darstellen. Hierdurch erscheint eine 3-fache Zahl $a.b.c$, wenn die drei Faktoren a, b, c verschieden sind, in den Formen $a.bc$, $b.ac$, $c.ab$, deren spezielle Werthe durch Berechnung der Produkte bc, ac, ab sich ergeben. Eine andere 3-fache Zahl $a'b'c'$ ergebe unter den 3-fachen die 2-fachen Zahlen $a'.b'c'$, $b'.a'c'$, $c'.a'b'$, eine dritte 3-fache Zahl $a''.b''.c''$ liefere die 2-fachen Zahlen $a''.b''c''$, $b''.a''c''$, $c''.a''b''$, überhaupt liefern m 3-fache Zahlen die Gruppe von m Reihen 2-facher Zahlen

$$\begin{array}{lll} a.bc & b.ac & c.ab \\ a'.b'c' & b'.a'c' & c'.a'b' \\ a''.b''c'' & b''.a''c'' & c''.a''b'' \end{array}$$

u. s. w. Erscheint dann irgend eine Zahl irgend einer Reihe mit irgend einer Zahl einer anderen Reihe identisch; so haben alle Zahlen dieser beiden Reihen gleichen Werth.

Eben Dasselbe gilt, wenn alle 4- und mehrfachen Zahlen als spezielle 2-fache dargestellt sind. Man kann hiernach aus der Gesammtheit der auf die 2-fache Form gebrachten 3- und mehrfachen Zahlen die Gruppen ausheben, welche aus Reihen mit lauter gleichen Zahlwerthen bestehen. Wenn eine solche Gruppe r identische 2-fache Zahlen (d. h. Zahlen von zwei gleichen Faktoren) enthält; so folgt daraus, dass die anfänglich gegebenen α_2 2-fachen Zahlen die fragliche Zahl r-mal (mit verschiedenen Faktoren) enthält, dass also $r - 1$ Zahlen aus der Summe α_2 auszuscheiden sind. Auf diese Weise erhält man durch Ausscheidung die gesuchte Anzahl $\alpha_2 - \beta_2$ verschiedener zusammengesetzter Zahlen und daher auch die Anzahl $\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2$ der Primzahlen.

Beispielsweise möge unter den 3-fachen Zahlen die Zahl $3 . 3 . 25$ herausgegriffen werden. Dieselbe liefert die Reihe von zwei 2-fachen Zahlen $3 . 75$, $9 . 25$. Da die 3-fache Zahl $3 . 5 . 15$ die drei 2-fachen $3 . 75$, $5 . 45$, $15 . 15$ liefert, unter welchen die mit $3 . 75$ identische vorkömmt; so bilden diese drei Zahlen die zweite Reihe in der gesuchten Gruppe. Nun erhält man aus der 3-fachen Zahl $5 . 5 . 9$ die zwei 2-fachen Zahlen $5 . 45$, $9 . 25$, welche wegen der Identität der Zahl $9 . 25$ aus der ersten Reihe oder der Zahl $5 . 45$ aus der zweiten Reihe die dritte

Reihe der Gruppe bilden. Endlich liefert die 4-fache Zahl 3 . 3 . 5 . 5 die vier 2-fachen Zahlen 3 . 75, 9 . 25, 5 . 45, 15 . 15, welche wegen der Identität mehrerer Glieder der früheren Reihen als die vierte Reihe der Gruppe

3 . 75	9 . 25		
3 . 75		5 . 45	15 . 15
	9 . 25	5 . 45	
3 . 75	9 . 25	5 . 45	15 . 15

erscheinen. Hiernach kommen unter den α_2 2-fachen Zahlen vier gleiche vor, es sind also drei Zahlen auszuscheiden.

Wenn man nur die Anzahl der unter einer gegebenen Grenze liegenden primen und zusammengesetzten Zahlen bestimmen will, ist die Absicht durch die vorstehende Rechnung erreicht. Die dargestellten 2-fachen Zahlen genügen aber, um alle absolut 1-, 2-, 3- und mehrfachen Zahlen zu bestimmen, indem der Ausschluss der übereinstimmenden 2-fachen Zahlen, welche die 3- und mehrfachen Zahlen ergeben (bis auf je eine), aus den ursprünglich 2-fachen Zahlen die verschiedenen 2-fachen zurücklässt, ferner der Ausschluss der übereinstimmenden 2-fachen Zahlen, welche die 4- und mehrfachen Zahlen ergeben (bis auf je eine), aus den ursprünglich 3-fachen Zahlen die verschiedenen 3-fachen zurücklässt, u. s. f.

Ich bemerke noch, dass, wenn m die grösstmögliche Anzahl von Faktoren ist, welche die unter einer gegebenen Grenze liegenden Zahlen haben können, die m-fachen Zahlen nur aus P r i m f a k t o r e n bestehen können: denn wäre irgend einer dieser Faktoren eine zusammengesetzte Zahl; so würde sich durch Zerlegung dieses Faktors sofort eine $(m+1)$-fache Zahl ergeben, was der Voraussetzung widerspricht.

Durch das bezeichnete Verfahren erfolgt die Sichtung der unter einer gegebenen Grenze liegenden absolut 1-, 2-, 3- und mehrfachen Zahlen, o h n e d a s s d i e B e k a n n t s c h a f t e i n e r p r i m e n o d e r z u s a m m e n g e s e t z t e n Z a h l e r f o r d e r l i c h w ä r e.

Zur Erläuterung seien die unpaaren Zahlen, welche unter $z = 300$ liegen, deren Anzahl also $\frac{1}{2}(299 - 3) + 1 = 149$ ist, zu sichten. Da die grösste unpaare Zahl, welche $\leqq \sqrt{299}$ ist, $= 17$ ist; so hat man folgende 2-, 3-, 4- und 5-fachen Zahlen

		Anzahl
2-fache	$3 \times 3, \ldots 99$	49
	$5 \times 5, \ldots 59$	28
	$7 \times 7, \ldots 41$	18
	$9 \times 9, \ldots 33$	13
	$11 \times 11, \ldots 27$	9
	$13 \times 13, \ldots 23$	6
	$15 \times 15, \ldots 19$	3
	17×17	1
		127

			Anzahl
3-fache	3 . 3 × 3, . . . 33		16
	3 . 5 × 5, . . . 19		8
	3 . 7 × 7, . . . 13		4
	3 . 9 × 9, . . . 11		2
	5 . 5 × 5, . . . 11		4
	5 . 7 × 7		1
			35
4-fache	3 . 3 . 3 × 3 . . . 11		5
	3 . 3 . 5 × 5		1
			6
5-fache	3 . 3 . 3 . 3 × 3		1

Es sind 35 + 6 + 1 = 42 3- und mehrfache Zahlen vorhanden. Indem jede derselben als 2-fache Zahl so vielmal als thunlich dargestellt, auch der spezielle Werth der beiden Faktoren sogleich berechnet wird, ergeben sich folgende 42 Reihen, welche durch die davor gesetzten eingeklammerten Nummern numerirt sind.

(1)	3.3.3	=	3.9			
(2)	3.3.5	=	3.15	5.9		
(3)	3.3.7	=	3.21	7.9		
(4)	3.3.9	=	3.27	9.9		
(5)	3.3.11	=	3.33	9.11		
(6)	3.3.13	=	3.39	9.13		
(7)	3.3.15	=	3.45	9.15		
(8)	3.3.17	=	3.51	9.17		
(9)	3.3.19	=	3.57	9.19		
(10)	3.3.21	=	3.63	9.21		
(11)	3.3.23	=	3.69	9.23		
(12)	3.3.25	=	3.75	9.25		
(13)	3.3.27	=	3.81	9.27		
(14)	3.3.29	=	3.87	9.29		
(15)	3.3.31	=	3.93	9.31		
(16)	3.3.33	=	3.99	9.33		
(17)	3.5.5	=	3.25	5.15		
(18)	3.5.7	=	3.35	5.21	7.15	
(19)	3.5.9	=	3.45	5.27	9.15	
(20)	3.5.11	=	3.55	5.33	11.15	
(21)	3.5.13	=	3.65	5.39	13.15	
(22)	3.5.15	=	3.75	5.45	15.15	
(23)	3.5.17	=	3.85	5.51	15.17	
(24)	3.5.19	=	3.95	5.57	15.19	
(25)	3.7.7	=	3.49	7.21		
(26)	3.7.9	=	3.63	7.27	9.21	
(27)	3.7.11	=	3.77	7.33	11.21	
(28)	3.7.13	=	3.91	7.39	13.21	
(29)	3.9.9	=	3.81	9.27		
(30)	3.9.11	=	3.99	9.33	11.27	
(31)	5.5.5	=	5.25			
(32)	5.5.7	=	5.35	7.25		
(33)	5.5.9	=	5.45	9.25		
(34)	5.5.11	=	5.55	11.25		
(35)	5.7.7	=	5.49	7.35		
(36)	3.3.3.3	=	3.27	9.9		
(37)	3.3.3.5	=	3.45	9.15	5.27	
(38)	3.3.3.7	=	3.63	9.21	7.27	
(39)	3.3.3.9	=	3.81	9.27		
(40)	3.3.3.11	=	3.99	9.33	11.27	
(41)	3.3.5.5	=	3.75	9.25	5.45	15.15
(42)	3.3.3.3.3	=	3.81	9.27		

Eine Zusammenstellung der übereinstimmenden Zahlen liefert folgende 29 Gruppen, eine jede mit der daneben bemerkten Anzahl übereinstimmender Zahlen.

Gruppe	Reihe					
1	(1)	3.9				1
2	(2)	3.15	5.9			2
3	(3)	3.21	7.9			2
4	(4)	3.27	9.9			2
	(36)	3.27	9.9			
5	(5)	3.33	9.11			2
6	(6)	3.39	9.13			2
7	(7)	3.45	9.15			3
	(19)	3.45	9.15	5.27		
	(37)	3.45	9.15	5.27		
8	(8)	3.51	9.17			2
9	(9)	3.57	9.19			2
10	(10)	3.63	9.21			3
	(26)	3.63	9.21	7.27		
	(38)	3.63	9.21	7.27		
11	(11)	3.69	9.23			2
12	(12)	3.75	9.25			4
	(22)	3.75		5.45	15.15	
	(33)		9.25	5.45		
	(41)	3.75	9.25	5.45	15.15	
13	(13)	3.81	9.27			2
	(19)	3.81	9.27			
	(39)	3.81	9.27			
	(42)	3.81	9.27			
14	(14)	3.87	9.29			2
15	(15)	3.93	9.31			2
16	(16)	3.99	9.33			3
	(30)	3.99	9.33	11.27		
	(40)	3.99	9.33	11.27		
17	(17)	3.25	5.15			2
18	(18)	3.35	5.21	7.15		3
19	(20)	3.55	5.33	11.15		3
20	(21)	3.65	5.39	13.15		3
21	(23)	3.85	5.51	15.17		3
22	(24)	3.95	5.57	15.19		3
23	(25)	3.49	7.21			2
24	(27)	3.77	7.33	11.21		3
25	(28)	3.91	7.39	13.21		3
26	(31)	5.25				1
27	(32)	5.35	7.25			2
28	(34)	5.55	11.25			2
29	(35)	5.49	7.35			2
						68

Diese 29 Gruppen entsprechen ebenso vielen, also 29 verschiedenen relativ 3-fachen Zahlen (indem sie alle verschiedenen 3-, 4- und 5-fachen Zahlen enthalten). Dieselben müssen nothwendig den in den 127 2-fachen

Zahlen vorkommenden übereinstimmenden Zahlen entsprechen. Schliesst man also, da für jede Gruppe nur eine Zahl beizubehalten ist, von der Gesammtsumme 68 der in den einzelnen Gruppen vorkommenden übereinstimmenden Zahlen 68 — 29 = 39 Zahlen von der Gesammtmenge 127 aus; so bleiben 127 — 39 = 88 verschiedene zusammengesetzte Zahlen zurück. Hiernach giebt es 149 — 88 = 61 Primzahlen bis zur oberen Grenze 300.

Fasst man nunmehr die 4- und mehrfachen Zahlen ins Auge; so hat man folgende sieben Reihen

(1)	3 . 3 . 3 . 3	=	3 . 27	9 . 9		
(2)	3 . 3 . 3 . 5	=	3 . 45	5 . 27	9 . 15	
(3)	3 . 3 . 3 . 7	=	3 . 63	7 . 27	9 . 21	
(4)	3 . 3 . 3 . 9	=	3 . 81	9 . 27		
(5)	3 . 3 . 3 . 11	=	3 . 99	9 . 33	11 . 27	
(6)	3 . 3 . 5 . 5	=	3 . 75	5 . 45	9 . 25	15 . 15
(7)	3 . 3 . 3 . 3 . 3	=	3 . 81	9 . 27		

Dieselben enthalten folgende sechs Gruppen:

Gruppe	Reihe					
1	(1)	3 . 27	9 . 9			2
2	(2)	3 . 45	5 . 27	9 . 15		3
3	(3)	3 . 63	7 . 27	9 . 21		3
4	(4)	3 . 81	9 . 27			2
	(7)	3 . 81	9 . 27			
5	(5)	3 . 99	9 . 33	11 . 27		3
6	(6)	3 . 75	5 . 45	9 . 25	15 . 15	4
						17

Diese sechs Gruppen entsprechen sechs verschiedenen relativ 4-fachen Zahlen (welche alle absolut 4- und mehrfachen Zahlen enthalten). Die Differenz 29 — 6 = 23 zeigt also die 3-fachen Zahlen an, welche nicht in 4- und mehrfacher Form erscheinen können, also absolut 3-fach sind.

Die 5-fachen Zahlen bilden die eine Reihe

(1) 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3 . 81 9 . 27 . . . 2

Dieselbe stellt auch nur eine Gruppe, also eine 5-fache Zahl dar, welche, als eine der höchsten, eine absolut 5-fache ist.

Unter 300 liegen hiernach 61 Primzahlen, 88 relativ 2-fache, 29 relativ 3-fache, 6 relativ 4-fache und 1 relativ 5-fache. Hierunter befinden sich 1 absolut 5-fache, 6 — 1 = 5 absolut 4-fache, 29 — 6 = 23 absolut 3-fache, 88 — 29 = 59 absolut 2-fache Zahlen. Die eine 5-fache ist 3^5, die 5 4-fachen sind 3^4, $3^2\,5^2$, $3^3\,5$, $3^3\,7$, $3^3\,11$, die 23 3-fachen sind 3^3, $3^2\,5$, $3^2\,7$, $3^2\,11$, $3^2\,13$, $3^2\,17$, $3^2\,19$, $3^2\,23$, $3^2\,29$, $3^2\,31$, $3 . 5^2$, $3 . 7^2$, $5 . 7^2$, $7 . 5^2$, $11 . 5^2$, 5^3, 3 . 5 . 7, 3 . 5 . 11, 3 . 5 . 13, 3 . 5 . 17, 3 . 5 . 19, 3 . 7 . 11, 3 . 7 . 13.

Von dem Verfasser sind folgende Werke erschienen:

Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur. 2 Bde. Auf Grundlage des englischen Werkes von M o s e l e y.

Die Prinzipien der Hydrostatik und Hydraulik. 2 Bde., enthaltend die Statik und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Die Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken.

Die Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken.

Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren, welche einem hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind.

Über Gitter- und Bogenträger.

Über die Festigkeit der Gefässwände, insbesondere über die Haltbarkeit der Dampfkessel.

Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Z e n t r i f u g a l - und G y r a l k r a f t, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytropes, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens.

Die Ursachen der Dampfkesselexplosionen und das Dampfkesselthermometer als Sicherheitsapparat.

Über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen.

Der Situationskalkul, eine arithmetische Darstellung der Geometrie auf Grund abstrakter Auffassung der räumlichen Grössen.

Die unbestimmte Analytik, enthaltend die diophantischen Gleichungen des ersten und zweiten Grades, die endlichen und die periodischen Kettenbrüche, die Theorie der Ungleichheiten, die Kongruenz der Zahlen, die Zahlentheorie u. s. w. in reellen und komplexen Zahlen.

Die Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten in reellen und komplexen Zahlen.

Methodus nova aequationem indeterminatam secundi gradus duas incognitas implicantem per numeros integros solvendi. Dissertatio inauguralis.

Die Umbildung der deutschen Rechtschreibung mit Bemerkungen über die Umgestaltung der deutschen **Maassordnungen.**

Körper und Geist. Betrachtungen über den menschlichen Organismus und sein Verhältniss zur Welt.

Die physiologische Optik. Eine Darstellung der Gesetze des Auges. 2 Bde.
Die Gesetze des räumlichen Sehens. Supplement der physiologischen Optik.
Die Theorie der Augenfehler und der Brille.
Sterblichkeit und Versicherungswesen.
Betheiligung am Gewinne und Nationalversorgung.
Die Regelung der Steuer-, Einkommen- und Geldverhältnisse.
Vorschläge für die Alters- und Invalidenversicherung.
Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.
Die magischen Figuren.

Die Naturgesetze. 4 Theile und 3 Supplemente:

1. Theil die Theorie der Anschauung oder die mathematischen Gesetze.
2. „ „ „ „ Erscheinung „ „ physischen „
3. „ „ „ „ Erkenntniss „ „ logischen „
4. „ „ „ des Bewusstseins „ „ philosophischen „

1. Supplement. Wärme und Elastizität.
2. „ Elektrizität, Galvanismus und Magnetismus.
3. „ Die Theorie des Lichtes.

Die Welt nach menschlicher Auffassung.
Die Grundlagen der Wissenschaft.
Die Hydraulik auf neuen Grundlagen.
Die Vorbildung für das Staatsbaufach und die Schulreform.
Beiträge zur Theorie der Gleichungen.
Beiträge zur Zahlentheorie.
Die quadratische Zerfällung der Primzahlen.
Die Äquivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz.

Druck von Friedr. Scheel, Cassel.

Von dem Verfasser sind folgende Werke erschienen:

Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur. 2 Bde. Auf Grundlage des englischen Werkes von Moseley.

Die Prinzipien der Hydrostatik und Hydraulik. 2 Bde., enthaltend die Statik und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Die Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken.

Die Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken.

Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren, welche einem hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind.

Über Gitter- und Bogenträger.

Über die Festigkeit der Gefässwände, insbesondere über die Haltbarkeit der Dampfkessel.

Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Zentrifugal- und Gyralkraft, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytropes, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens.

Die Ursachen der Dampfkesselexplosionen und das Dampfkesselthermometer als Sicherheitsapparat.

Über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen.

Der Situationskalkul, eine arithmetische Darstellung der Geometrie auf Grund abstrakter Auffassung der räumlichen Grössen.

Die unbestimmte Analytik, enthaltend die diophantischen Gleichungen des ersten und zweiten Grades, die endlichen und die periodischen Kettenbrüche, die Theorie der Ungleichheiten, die Kongruenz der Zahlen, die Zahlentheorie u. s. w. in reellen und komplexen Zahlen.

Die Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten in reellen und komplexen Zahlen.

Methodus nova aequationem indeterminatam secundi gradus duas incognitas implicantem per numeros integros solvendi. Dissertatio inauguralis.

Die Umbildung der deutschen Rechtschreibung mit Bemerkungen über die Umgestaltung der deutschen **Maassordnungen.**

Körper und Geist. Betrachtungen über den menschlichen Organismus und sein Verhältniss zur Welt.

Die physiologische Optik. Eine Darstellung der Gesetze des Auges. 2 Bde.
Die Gesetze des räumlichen Sehens. Supplement der physiologischen Optik.
Die Theorie der Augenfehler und der Brille.
Sterblichkeit und Versicherungswesen.
Betheiligung am Gewinne und Nationalversorgung.
Die Regelung der Steuer-, Einkommen- und Geldverhältnisse.
Vorschläge für die Alters- und Invalidenversicherung.
Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.
Die magischen Figuren.
Die Naturgesetze. 4 Theile und 3 Supplemente:

1. Theil die Theorie der Anschauung oder die mathematischen Gesetze.
2. „ „ „ „ Erscheinung „ „ physischen „
3. „ „ „ „ Erkenntniss „ „ logischen „
4. „ „ „ des Bewusstseins „ „ philosophischen „

1. Supplement. Wärme und Elastizität.
2. „ Elektrizität, Galvanismus und Magnetismus.
3. „ Die Theorie des Lichtes.

Die Welt nach menschlicher Auffassung.
Die Grundlagen der Wissenschaft.
Die Hydraulik auf neuen Grundlagen.
Die Vorbildung für das Staatsbaufach und die Schulreform.
Beiträge zur Theorie der Gleichungen.
Beiträge zur Zahlentheorie.
Die quadratische Zerfällung der Primzahlen.
Die Äquivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz.

Druck von Friedr. Scheel, Cassel.