Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre

par

S. Zaremba.

---

§ 1. Désignons par $f(x, y, u)$ une fonction des trois variables x, y, u définie sans ambiguité dans un certain domaine (D) et définissons les symboles $f_i(x, y, u)$ $(i = 1, 2, 3)$ par les égalités

(1) $$f_1(x, y, u) = f'_x,\ f_2(x, y, u) = f'_y,\ f_3(x, y, u) = f'_u.$$

Cela posé considérons l'équation différentielle

(2) $$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

L'intégrale singulière de cette équation est, comme on le sait, par définition, une intégrale qui vérifie, en dehors de cette équation, encore la suivante

$$f_3\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Par conséquent, lorsque l'équation (2) admet une intégrale singulière, celle-ci a pour image géométrique la courbe ou une portion de la courbe (s) dont l'équation est le résultat de l'élimination de la variable u entre les équations

(3) $$f(x, y, u) = 0 \text{ et } f_3(x, y, u) = 0.$$

Déjà Lagrange avait remarqué que, pour qu'un arc (s_1) de la courbe (s) soit une courbe intégrale de l'équation (2), il faut qu'en chaque point de (x, y) de cet arc, les équations (3) soient compatibles avec l'équation.

$$f_1(x, y, u) + u f_2(x, y, u) = 0. \tag{4}$$

Cela aurait dû l'amener à la conclusion que, normalement, une équation différentielle du premier ordre ne doit pas admettre d'intégrale singulière. Néanmoins la théorie des enveloppes avait, comme on le sait, fait adopter à Lagrange l'opinion contraire. Il y avait là un paradoxe apparent que Darboux [1]) le premier a expliqué en démontrant que, normalement, la ligne (s) est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales de l'équation (2) et que, par conséquent, Lagrange avait fait une application illégitime de la théorie des enveloppes dans sa démonstration de l'existence des solutions singulières des équations différentielles. Depuis M. Picard [2]) a établi d'une autre manière le résultat précédent.

Toutefois les considérations de Darboux comme celles de M. Picard ne se rapportent qu'au cas où la fonction $f(x, y, u)$ est une fonction analytique des trois variables dont elle dépend. Nous nous proposons de démontrer que le théoréme fondamental de Darboux subsiste aussi dans le cas où la fonction $f(x, y, u)$ n'est pas une fonction analytique et satisfait seulement à quelques conditions très générales de régularité. A cette occasion, on constatera une fois de plus la grande fécondité de la méthode des approximations successives de M. Picard.

Il va sans dire que nous envisageons *exclusivement* des quantités *réelles*.

§ 2. Voici l'hypothése dans laquelle nous allons nous placer.

1. **Hypothèse.** Nous admettrons que les circonstances suivantes sont vérifiées:

1° La fonction $f(x, y, u)$ est déterminée sans ambiguïté dans un certain domaine (D) et admet, à l'intérieur de ce domaine des dérivées partielles continues jusqu'au 3-me ordre inclusivement.

2° En un point 0, intérieur au domaine (D) et défini par le système de valeurs.

$$x = a, \quad y = b, \quad u = b' \tag{5}$$

de x, y et u, l'on a:

---

[1]) Bulletin des sciences mathématiques 1873.

[2]) E. Picard. Traité d'Analyse t. III, Paris 1896 p. 44 et suivantes.

$$f(a, b, b') = 0, \quad f_3(a, b, b') = 0 \tag{6}$$

$$f_1(a, b, b') + b' f_2(a, b, b') \neq 0 \tag{7}$$

où les caractéristiques f_1, f_2 et f_3 sont définies par les formules (2).

3° On a encore l'inégalité suivante:

$$\left(\frac{\partial^2 f(x, y, u)}{\partial u^2}\right)_0 \neq 0, \tag{8}$$

où l'indice 0 indique que l'on considère la valeur que prend l'expression enfermée dans la parenthèse au point 0.

Voici maintenant quelques indications destinées à prévenir tout malentendu. Désignons par x_0 une borne d'un intervalle (I) dans lequel une fonction $\varphi(x)$ est définie. Pour $x = x_0$ la fonction $\varphi(x)$ ne peut pas avoir de dérivée proprement dite; elle ne peut avoir, pour cette valeur de x, qu'une dérivée unilatérale du côté duquel l'intervalle (I) est situé par rapport à x_0. Toutefois, pour simplifier le langage, nous conviendrons d'appeler cette dérivée unilatérale de $\varphi(x)$, dérivée de cette fonction pour $x = x_0$. D'après cela l'assertion qu'une fonction $\varphi(x)$, définie dans un intervalle fermé (I), admet une dérivée déterminée dans tout cet intervalle, exprimera qu'en tout point intérieur à l'intervalle (I), la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée et qu'en outre, en chacune des bornes de l'intervalle considéré, elle possède une dérivée unilatérale du côté duquel se trouve l'intervalle (I) par rapport à la borne considérée. Voici une seconde convention que nous allons encore adopter: l'assertion qu'une fonction $\varphi(x)$ est une intégrale de l'équation (2) la vérifiant dans un certain intervalle (I), exprimera non seulement que, dans toute l'étendue de l'intervalle (I), l'égalité

$$y = \varphi(x) \tag{9}$$

entraîne l'équation (2), mais encore que la dérivée $\varphi'(x)$ de $\varphi(x)$ est une fonction *continue* de x dans l'intervalle considéré. Envisageons maintenant le problème suivant.

2. **Problème.** L'hypothèse 1 étant vérifiée, déterminer une fonction (bien entendu réelle) $\varphi(x)$ de la variable x pour toutes les valeurs de cette variable appartenant à un intervalle fermé de la forme $(a, a + l)$, de telle sorte que la valeur (9) de y satisfasse à l'équation (2) dans tout l'intervalle $(a, a + l)$ et que l'on ait en outre:

$$\varphi(a) = b \text{ et } \varphi'(a) = b'. \tag{10}$$

Le résultat principal de cet article peut être énoncé sous la forme du théorème suivant:

3. **Théorème.** Pour que le problème 2 soit possible, il faut que l'on ait

$$l \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0 \cdot \{f_1(a, b, b') + b' f_2(a, b, b')\} < 0, \tag{11}$$

(où à cause de (7) et (8) les deux derniers facteurs du premier membre sont différents de zéro); lorsque cette condition est remplie et lorsqu'en outre la valeur absolue du nombre l est assez petite, le problème 2 a précisément *deux* solutions; si on les désigne par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, on a, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(a, a + l)$ *non* égale à a et assez petite en valeur absolue

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x).$$

Il est à peine utile de faire remarquer que le théorème précédent constitue l'extension aux équations différentielles non analytiques, du résultat fondamental établi successivement par Darboux et M. Picard pour les équations analytiques.

§ 3. Le lemme suivant va nous permettre de simplifier beaucoup l'écriture:

4. **Lemme.** On peut, sans nuire à la généralité, admettre dans la démonstration du théorème 3 que l'on ait

$$a = b = b' = 0 \tag{12}$$

et qu'en outre l'on ait encore.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\ y=u\\ u=0}} < 0. \tag{13}$$

En effet, désignons par ε le nombre défini par l'ensemble des relations

$$\varepsilon^2 = 1 \text{ et } \varepsilon(f_1(a, b, b') + b' f_2(a, b, b')) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0 < 0$$

Le nombre ε existera et sera déterminé sans ambiguité par les relations précédentes ainsi que cela résulte de (7) et (8). Posons

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \varepsilon(x - a) \\ y_1 = y - b - b'(x - a) \\ u_1 = \varepsilon(u - b') \end{array}\right. \tag{14}$$

Cette substitution transformera la fonction $f(x, y, u)$ en une fonction $F(x_1, y_1, u_1)$ des variables x_1, y_1, u_1. Si l'on regarde y comme une fonction dérivable de x, les équations (14) définiront y_1 comme une fonction de x_1 et l'on aura

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \varepsilon\left(\frac{dy}{dx} - b'\right).$$

Donc en vertu de (14), on aura identiquement:

$$F\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

et l'équation (2) équivaudra à la suivante:

$$F\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0$$

D'ailleurs les égalités (14) et la définition de la fonction $F(x_1, y_1, u_1)$ donnent:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x} + b'\frac{df}{dy}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Or les équations (14) font correspondre des valeurs nulles de x_1, y_1, et u_1 aux valeurs a, b et b' de x, y et u. Il est donc aisé de voir que, après avoir effectué la substitution (14), il suffirait de faire le changement de notations qui consiste à remplacer les symboles x_1, y_1, u_1 et F par x, y, u et f pour ramener le cas général du théorème 3 au cas particulier où les relations (12) et (13) sont vérifiées. En résumé le lemme 4 est complètement démontré.

Nous adopterons donc l'hypothèse suivante:

5. Hypothèse. Les égalités (12) et l'inégalité (13) sont vérifiées.

Pour rendre les considérations ultérieures plus faciles à suivre, observons explicitement que l'ensemble des hypothèses **1** et **5** équivaut à la suivante:

6. **Hypothèse.** On admet ce qui suit:

1° La fonction $f(x, y, u)$ est définie sans ambiguité dans un certain domaine (D) et admet, à l'intérieur de ce domaine des dérivées partielles continues jusqu'au 3-me ordre inclusivement.

2° Le point 0 défini par les égalités

$$x = y = u = 0 \tag{15}$$

est situé à l'intérieur du domaine (D).

3° Étant convenu de représenter d'une façon générale par $(\Phi)_0$ la valeur que prend une fonction Φ des variables x, y, u pour les valeurs nulles de ces variables, nous avons :

$$f(0, 0, 0) = 0, \left(\frac{df}{du}\right)_0 = 0 \tag{16}$$

ainsi que

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0 < 0. \tag{17}$$

En vertu de l'hypothèse précédente, le problème 2 prend la forme suivante :

7. **Problème.** L'hypothèse 6 étant vérifiée, déterminer une fonction (réelle) $\varphi(x)$ de la variable x dans un intervalle fermé de la forme $(0, l)$ de telle sorte que la valeur

$$y = \varphi(x) \tag{18}$$

de y satisfasse à l'équation (2) dans tout l'intervalle $(0, l)$ et que l'on ait en outre

$$\varphi(0) = 0 \tag{19}$$

ainsi que

$$\varphi'(0) = 0. \tag{20}$$

§ 4. Avant d'aborder le problème 7, notons quelques conséquences de l'hypothèse 6.

Il existera évidemment un nombre positif d tel que l'ensemble des relations

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |u| \leqq d \tag{21}$$

constitue une condition suffisante pour que le point (x, y, u) soit intérieur au domaine (D) considéré dans l'hypothèse 6. Dans tout ce qui va suivre, nous regarderons le nombre d comme donné et nous n'envisagerons que les valeurs de x, y, u vérifiant les conditions (21).

Eu égard aux égalités (16), on pourra déterminer des constantes $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, telles que la fonction $R(x, y, u)$, définie par la formule

$$\begin{aligned}(22)\qquad R(x, y, u) = f(x, y, u) - (a_1x + a_2y + b_1x^2 + b_2y^2 + b_3u^2 + \\ + 2c_1yu + 2c_2ux + 2c_3xy)\end{aligned}$$

s'annule avec toutes ses dérivées partielles jusqu'au 2-me ordre inclusivement pour

$$x = y = u = 0$$

J' ajoute qu'en vertu de (17), on aura,

$$(23)\qquad a_1 \cdot b_3 < 0.$$

Il résulte encore de l'hypothèse **6** que, dans le domaine défini par les relations (21), les dérivées partielles d'ordre 3 de la fonction $R(x, y, u)$ (identiques évidemment à celles de la fonction $f(x, y, u)$) seront bornées. Si l'on désigne par C une limite supérieure commune des valeurs absolues de ces dérivées, on aura.

$$(24)\qquad |R(x, y, u)| \leqq \tfrac{1}{6} C(|x| + |y| + |u|)^3$$

ainsi que

$$(25)\qquad \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial R}{\partial u}\right| \leqq \tfrac{1}{2} C(|x| + |y| + |u|)^2$$

dans tout le domaine (21); c' est ce qui résulte immédiatement du théorème de Taylor et de ce que, pour

$$x = y = u = 0,$$

la fonction $R(x, y, u)$ s'annule avec toutes ses dérivées jusqu'au 2-me ordre inclusivement.

§ 5. En abordant le problème **7**, posons pous abréger l'écriture

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

et observons qu'en remplaçant $f(x, y, u)$ par sa valeur tirée de (22), on pourra mettre l'équation (2) sous la forme suivante:

$$b_3 y'^2 + 2(c_2 x + c_1 y) y' + a_1 x + a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + 2c_3 xy + \\ + R(x, y, y') = 0. \tag{26}$$

8. **Lemme.** Lorsque le probléme 7 est possible, on a

$$\lim_{x=0} \frac{y'^2}{x} = -\frac{a_1}{b_3} \tag{27}$$

en supposant que x tende vers zéro en restant intérieur à l'intervalle $(0, l)$.

En effet, par les conditions mêmes du probléme 7, nous avons

$$\lim_{x=0} y' = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x=0} y = 0, \tag{28}$$

lorsque x tend vers zéro par valeurs intérieures à l'intervalle $(0, l)$. Donc, dans les mêmes conditions, nous avons

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = 0. \tag{29}$$

Il résulte de (28) qu'il existera un nombre positif δ tel que pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(0, l)$ et vérifiant la condition:

$$|x| \leqq \delta,$$

les relations (21) soient satisfaites au cas où l'on poserait:

$$u = y'$$

Nous admettrons dorénavant que la variable x satisfasse aux conditions précédentes. Cele nous permettra d'appliquer la relation (24) au cas où y est défini par la formule (18) et u par

$$u = y' = \varphi'(x).$$

Nous aurons donc:

$$|R(x\,y\,y')| = \tfrac{1}{6}\,\Theta\, C(|x| + |y| + |y'|)^3 \tag{30}$$

où Θ représente une fonction qui vérifie la condition

$$|\Theta| \leqq 1 \tag{31}$$

Posons

$$\Phi = (|x| + |y|)^2 + 3(|x| + |y|)\,y' + 3y'^2. \tag{31,1}$$

La formule (30) pourra s'écrire comme il suit:

$$R(x, y, y') = \tfrac{1}{6}\,\Theta\,C(|x| + |y|)\,\Phi + \tfrac{1}{6}\,\Theta C y'^3 \tag{32}$$

Portons la valeur (32) de $R(x, y, y')$ dans l'équation (26) et divisons ensuite l'équation obtenue par x. Le résultat pourra s'écrire de la façon suivante:

$$(b_3 + \tfrac{1}{6}\,\Theta C y')\frac{y'^2}{x} + 2\left(c_2 + c_1\frac{y}{x}\right)y' + a_1 + a_2\frac{y}{x} + b_1 x + b_2 y\frac{y}{x} + \\ + 2c_3 y + \tfrac{1}{6}\,\Theta C\left(\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{x}\right)\Phi = 0. \tag{33}$$

Or il résulte de (28) et (31,1) que l'on a:

$$\lim_{x=0} \Phi = 0.$$

Cela posé, il suffit de se reporter aux égalités (28) et (29) ainsi qu' à la relation (31) pour déduire de (33) que l'égalité (27) a bien lieu comme il s'agissait de le démontrer.

9. **Lemme.** Pour que le probléme 7 soit possible, il faut que l'on ait

$$l > 0 \tag{34}$$

En effet, supposons que le problème en question soit possible. En vertu du lemme **8** nous aurons l'égalité (27) en supposant que x tende vers zéro par valeurs intérieures à l'intervalle $(0, l)$. Or, à cause de (23), on a

$$-\frac{a_1}{b_3} > 0.$$

Donc c'est par valeurs positives que x doit tendre vers zéro dans (27). Cela prouve que l'on a bien l'inégalité (34) comme nous voulions l'établir.

10. **Lemme.** Lorsq'une fonction y de x représente une solution du problème 7, il lui correspond une constante positive A telle que, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(0, l)$, où [lemme 9] on a nécessairement $l > 0$), l'on ait:

$$(35) \qquad \begin{cases} |y'| \leqq A x^{\frac{1}{2}} \\ |y| \leqq \frac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

On déduira ce lemme avec la plus grande facilité des lemmes 8 et 9.

11. **Remarque.** Lorsqu'une fonction y de x, définie dans un intervalle $(0, l)$ est une solution du problème 7 et vérifie par conséquent dans cet intervalle l'équation différentielle (26), il correspond à toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(0, l)$ un nombre ε vérifiant l'équation

$$(35,1) \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

tel que, pour la valeur considérée de x, l'on ait

$$(35,2) \qquad y' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \varepsilon \sqrt{Q(x, y, y')}$$

où l'on doit prendre la valeur non négative du radical, la fonction

$$\alpha_1 x + \beta_1 y$$

et la caractéristique Q étant définies par les formules:

$$(35,3) \qquad \alpha x + \beta y = -\frac{c_2 x + c_1 y}{b_3}$$

et

$$(35,4) \quad Q(x, y, u) =$$

$$= \frac{(c_2 x + c_1 y)^2 - b_3 \{a_1 x + a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + 2c_3 xy + R(x, y, u)\}}{b_3^2} =$$

$$= -\frac{a_1}{b_3} x + \frac{(c_2 x + c_1 y)^2 - b_3 \{a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + 2c_3 xy + R(x, y, u)\}}{b_3^2}$$

§ 6. Avant de continuer l'étude du problème 7, il est utile d'établir quelques propositions auxiliaires.

12. **Lemme.** La caratéristique Q étant définie par la formule (35,4) regardons pour un moment la lettre u comme représentant une fonction de x continue avec sa dérivée première y' dans un intervalle fermé $(0, l)$ où l représente un nombre positif et posons $u = y'$; supposons en outre que l'on ait:

$$(35,5) \qquad (y)_{x=0} = 0$$

et que, dans tout l'intervalle $(0, l)$, la dérivée y' de y satisfasse à la relation

$$|y'| \leqq Ax.^{\frac{1}{2}} \tag{35,6}$$

Je dis que l'on aura

$$\lim_{x=0} \frac{Q(x, y, y')}{x} = -\frac{a_1}{b_3}. \tag{36}$$

lorsque x tendra vers zéro par valeurs positives.

En effet, en vertu de l'équation (35,4) servant de définition à la caractéristique Q, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{(Q\, x, y, y')}{x} = -\frac{a_1}{b_3} + \frac{1}{b_3^2}(c_2 x + c_1 y)\left(c_2 + c_1 \frac{y}{x}\right) + \\ - \frac{1}{b_3}\left\{b_1 x + 2c_3 y + (a_2 + b_2 y)\frac{y}{x}\right\} + \\ - \frac{1}{b_3}\frac{R(x, y, y')}{x} \end{aligned} \tag{37}$$

D'autre part, il résulte de (35,5) et (35,6) que dans tout l'intervalle $(0, l)$ l'on aura:

$$|y| \leqq \tfrac{2}{3} Ax^{\frac{3}{2}}. \tag{38}$$

Il résulte de (35,6) et (38) qu'il existera un nombre positif δ, non supérieur à l, tel que les relations

$$0 \leqq x \leqq \delta \tag{39}$$

entraînent les relations

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d \tag{40}$$

où d représente le second membre des relations (21). Mais ces dernières entraînent la relation (24). Par conséquent les relations (39), entraîneront la suivante

$$|R(x, y, y')| \leqq \tfrac{1}{6} C(|x| + |y| + |y'|)^3,$$

d'où, en s'appuyant sur (35,6) et (38), l'on déduit que

$$\lim_{x=0} \frac{R(x, y, y')}{x} = 0 \tag{41}$$

lorsque x tend vers zéro par valeurs positives. Mais il résulte de (38) que, dans les mêmes conditions, l'on a:

(42) $$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = 0.$$

En s'appuyant sur (41) et (42), on conclut immédiatement de (37) à l'existence de (36) lorsque x tend vers zéro par valeurs positives. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

13. **Lemme.** La fonction y de x vérifiant les hypothèses du lemme 12, il correspondra au nombre A, figurant au second membre de (35,6) et à tout système de deux nombres g et G, assujettis seulement à vérifier les relations:

(43) $$o < g < -\frac{a_1}{b_3} < G$$

un nombre positif δ, non supérieur au second membre d des relations (21) et indépendant de l, tel que l'ensemble des relations

(44) $$o \leqq x \leqq \delta \quad \text{et} \quad o \leqq x \leqq l$$

entraîne les suivantes

(45) $$gx \leqq Q(x, y, y') \leqq Gx$$

Pour s'assurer de l'exactitude de ce lemme, il suffit de se rappeler qu'en vertu de (23) l'on aura

(46) $$-\frac{a_1}{b_3} > 0,$$

de se rapporter au lemme 12 et de considérer que la valeur de δ qui conviendrait au cas où l'on aurait $l = d$ conviendrait aussi à tous les autres cas.

14. **Lemme.** Continuons à supposer qu'une fonction y de x satisfasse aux hypothèses du lemme 12, désignons par ε une constante vérifiant l'équation

(47) $$\varepsilon^2 = 1,$$

par c le nombre défini par les relations

(48) $$c^2 = -\frac{a_1}{b_3}, \quad c > 0,$$

nombre qui existera à cause de (46), et soit v la fonction définie par la formule:

$$(49) \qquad v = \alpha_1 x + \beta_1 y + \varepsilon \sqrt{Q(x, y, y')}$$

où le radical doit être pris avec la détermination non négative et où la fonction linéaire $\alpha_1 x + \beta_1 y$ de x et y est définie par la formule (35,3). Dans ces conditions les circonstances suivantes vont se présenter:

1° Il existe un nombre positif δ, non supérieur au second membre d des relations (21) et indépendant de l, tel que la formule (49) définisse la fonction v de x comme une fonction réelle et continue de x dans l'intervalle fermé commun aux intervalles $(0, l)$ et $(0, \delta)$.

2° Lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, on a

$$(50) \qquad \lim \frac{v}{x^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon c$$

En effet, il résulte du lemme 13 qu'il existera un nombre positif δ, indépendant de l, tel que l'ensemble des relations (44) entraîne la suivante:

$$(51) \qquad Q(x, y, y') \geqq 0.$$

D'autre part, en diminuant au besoin le nombre δ, sans pourtant l'annuler et sans avoir à tenir compte de la valeur de l, on pourra encore faire en sorte que (44) entraînent non seulement (51) mais encore (40). Le nombre δ vérifiant les conditions précédentes, la formule (49) définira la fonction v comme une fonction réelle et continue de x dans l'intervalle fermé $(0, \delta)$ commun aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$ car, dans cet intervalle, on aura (51) ce qui assure la réalité de v et, d'autre part, comme dans l'intervalle $(0, \delta)$ on a (40) et comme dans le domaine (21) la fonction $R(x, y, u)$ est continue, il résulte de la continuité des fonctions y et y' dans l'intervalle $(0, \delta)$ qu'il en sera de même de $R(x, y, y')$ et par suite aussi de la fonction v. En résumé la 1-re partie du lemme est établie.

Pour reconnaître l'exactitude de la 2-me partie du lemme, il suffit de se reporter à la formule (49), à la relation (38) ainsi qu' aux relations (48) qui définissent le nombre c et de considérer qu'en vertu du lemme 12, on a la relation (36). En résumé le lemme est complètement démontré.

15. Remarque. Conservons les hypothèses et les notations du lemme précédent et désignons par B un nombre donné arbitrairement à cela près que l'on ait

$$B > c,$$

on pourra alors, comme cela résulte de l'égalité (50), assurée par le lemme **14**, donner au nombre positif δ, considéré dans ce lemme, une valeur non nulle et indépendante de l mais assez petite pour que, dans l'intervalle fermé $(0, \delta')$, commun aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$, la fonction v définie par la formule (49) avec n'importe laquelle des deux valeurs de ε vérifiant (47), soit non seulement réelle et continue mais qu'en outre, dans tout cet intervalle, l'on ait

$$|v| \leqq Bx^{\frac{1}{2}};$$

j'ajoute que pour calculer une valeur de δ satisfaisant aux conditions précédentes, il suffit évidemment de connaître en dehors du nombre B et de la constante A figurant au second membre de (35,6), encore la valeur du second membre d des relations (21), les valeurs des constantes $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ entrant au second membre de l'équation (22) ainsi que la valeur de la constante C qui entre dans le second membre des relations (24) et (25).

16. Lemme. Lorsque deux fonctions y et z de la variable x, définies sans ambiguité dans un intervalle fermé $(0, l)$ dont la borne l est positive, sont continues avec leurs dérivées respectives y' et z' dans l'intervalle $(0, l)$ et s'annulent l'une et l'autre pour $x = 0$, lorsqu'il existe en outre une constante positive A telle que dans tout l'intervalle $(0, l)$ l'on ait

$$(51) \qquad |y'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |z'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}},$$

lorsqu' enfin, après avoir désigné par ε une constante vérifiant l'équation

$$(52) \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

l'on aura adopté pour définitions respectives des fonctions v et w de x, la formule (49) et la formule:

$$(53) \qquad w = \alpha_1 x + \beta_1 z + \varepsilon \sqrt{Q(x, z, z')}$$

où, comme dans la formule (49), c'est avec la détermination non négative que le radical doit être pris, il sera possible de faire correspondre au nombre A, deux nombres positifs δ et B_1, indépendants de la valeur de l et du signe de ε, jouissant de la propriété suivante: si l'on désigne par r un nombre positif choisi arbitrairement dans l'intervalle $(0, \delta')$ commun aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$, et par M' la borne supérieure de la fonction

$$|y' - z'| \tag{54}$$

dans l'intervalle $(0, r)$, l'on aura

$$|v - w| \leqq B_1 r^{\frac{1}{2}} M' \tag{55}$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$.

En effet, les relations (51) étant verifiées dans l'intervalle $(0, l)$ et les fonctions y et z s'annulant pour $x = 0$, on aura aussi dans le même intervalle

$$|y| \leqq \tfrac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}}, \quad |z| \leqq \tfrac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}}, \tag{56}$$

on pourra donc faire correspondre au nombre A une valeur positive de δ, indépendante de l, telle que l'ensemble des relations

$$0 \leqq x \leqq \delta \quad \text{et} \quad 0 \leqq x \leqq l \tag{57}$$

entraîne à la fois les deux systèmes de relations

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y^1| \leqq d, \tag{58}$$

et

$$|x| \leqq d, \quad |z| \leqq d, \quad |z'| \leqq d. \tag{59}$$

Supposons que δ satisfasse à la condition précédente et donnons-nous un nombre g vérifiant les inégalités (43).

On pourra {lemme **13**}, en diminuant au besoin le nombre δ, sans pourtant l'annuler et sans tenir compte de la valeur de l, faire en sorte que les relations (57) entraînent, en dehors des relations (58) et (59), encore les deux suivantes

$$\begin{cases} Q(x, y, y') \geqq gx, \\ Q(x, z, z') \geqq gx, \end{cases} \tag{60}$$

Le nombre δ vérifiant cette condition, les formules (49) et

(53) définiront, pour les valeurs de x vérifiant l'ensemble des relations (57), les fonctions v et w comme fonctions réelles et continues de x; pour les valeurs de x vérifiant, en dehors des relations (57), encore la condition

(60,1) $$x > 0,$$

l'on aura :

(61) $$v - w = \beta (y - z) + \varepsilon \frac{Q(x, y, y') - Q(x, z, z')}{\sqrt{Q(x, y, y')} + \sqrt{Q(x, z, z')}}$$

En se reportant à la formule (35,4) qui sert de définition à la caractéristique Q, on trouve:

(62) $$Q(x, y, y') - Q(x, z, z') = \frac{c_1 \{2c_2 x + c_1 (y + z)\}(y - z)}{b_3^2} +$$
$$- \frac{1}{b_3} \Big\{ [a_2 + 2c_3 x + b_2 (y + z)] (y - z) + R(x, y, y') - R(x, z, z') \Big\}$$

Regardons pour un moment le symbole x comme représentant quelque nombre déterminé vérifiant (57). Les relations (57) entraînant à la fois (58) et (59), les deux suites de trois nombres:

$$x, y, y' \quad \text{et} \quad x, z, z'$$

représenteront deux points du domaine défini par les relations (21). Nous pourrons donc appliquer à la différence

$$R(x, y, y') - R(x, z, z')$$

le théorème des accroissements finis sous sa forme classique. Les caractéristiques R_2 et R_3 étant définies par les formules

$$R_2 (x, y, u) = R'_y (x, y, u), R_3 (x, y, u) = R'_u (x, y, u),$$

nous trouverons :

(63) $$R(x, y, y') - R(x, z, z') = R_2 (x, \eta, \eta')(y - z) + R_3 (x, \eta, \eta')(y' - z')$$

en posant:

(64) $$\eta = y + \Theta (z - y), \eta' = y' + \Theta (z' - y')$$

où Θ représente un nombre intérieur à l'intervalle (0, 1). Il résulte de (58) et (59) que l'on aura

$$|x| \leqq d, \quad |\eta| \leqq d, \quad |\eta'| \leqq d.$$

Donc, en vertu de (25) on aura:

(65) $$|R_2(x,\eta,\eta')| \leqq |\tfrac{1}{2}C\{|x|+|\eta|+|\eta'|\}^2$$

et si l'on désigne par M_2 une limite supérieure de la fonction

$$|R_2(x,y,u)|$$

lorsque le point (x,y,u) varie dans le domaine (21), on aura

(66) $$|R_2(x,\eta,\eta')| \leqq M_2$$

D'autre part, comme Θ est compris dans l'intervalle (0, 1) il résulte de (51), (56) et (64) que l'on aura:

(67) $$|\eta| \leqq \tfrac{2}{3}Ax^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad |\eta'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}}$$

En s'appuyant sur (65) et (67) et en tenant compte de (57), on constatera qu'il est aisé de calculer au moyen des nombres A, C et δ un nombre positif M_3, indépendant de l, tel que l'on ait:

(68) $$|R_2(x,\eta,\eta')| \leqq M_3 x$$

pour toute valeur de x vérifiant (57).

Les relations (63), (66) et (68) nous donneront:

$$|R(x,y,y') - R(x,z,z')| \leqq M_2|y-z| + M_3 x|y'-z'|.$$

En s'appuyant sur cette relation et en tenant compte de (56) et de (51) on déterminera aisément au moyen des constantes qui entrent dans le second membre de (62) et des nombres δ, A, M_2 et M_3, deux nomhres positifs M_2' et M_3' tels que (57) entraîne la relation:

(69) $$|Q(x,y,y') - Q(x,z,z')| \leqq M_2'|y-z| + M_3'x|y'-z'|.$$

Mais (61) a lieu pour toute valeur de x vérifiant à la fois (57) et (60,1) et d'autre part, pour toute valeur de x vérifiant l'ensemble des relations (57), on a les relations (60). Par conséquent, il résulte de ce que les relations (57) entraînent (69) que l'ensemble des relations (57) et (60,1) entraîne la suivante:

$$|v-w| \leqq |\beta| \, |y-z| + \frac{M_2'|y-z_1| + M_3'x|y'-z'|}{2\sqrt{g}\, x^{\frac{1}{2}}}$$

Il suit de là que les relations (57) et (60,1) entraîneront a fortiori la suivante:

(71) $$|v-w| \leqq B_3 \frac{|y-z|}{x^{\frac{1}{2}}} + B_2 x^{\frac{1}{2}} |y'-z'|$$

où l'on a posé

$$B_2 = \frac{2\sqrt{g}\,|\beta|\,\delta^{\frac{1}{2}} + M_2'}{2\sqrt{g}}, \quad B_3 = \frac{M_2'}{2\sqrt{g}}.$$

Soit maintenant r un nombre positif choisi arbitrairement dans la partie commune aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$ et M' la borne supérieure de l'expression

$$|y'-z'|$$

dans l'intervalle $(0, r)$. Les fonctions y et z s'annulant pour $x = 0$, la relation

$$|y-z| \leqq M'x$$

sera vérifiée dans tout l'intervalle $(0, r)$. Par conséquent, pour les valeurs de x vérifiant les relations

$$0 < x \leqq r,$$

la relation (71) nous donnera:

(72) $$|v-w| \leqq B_1 M' x^{\frac{1}{2}}$$

en posant

(73) $$B_1 = B_2 + B_2.$$

En réalité, la relation (72) subistera dans tout l'intervalle $(0, r)$ parce que, pour $x = 0$, les fonctions v et w, ainsi que cela résulte de (49) et (53), s' annulent l'une et l'autre. Or puisque (72) a lieu dans tout l'intervalle $(0, r)$, on a, dans tout cet intervalle, a fortiori la relation (55).

En résumé, il suffit de déterminer le nombre δ de façon que les relations (57) entraînent à la fois (58), (59) et (60), en ayant soin de calculer le nombre B_1 au moyen de (73), opérations qui pourront toutes être effectuées sans que le nombre l soit connu mais à condition que le nombre A soit donné, pour que les nombres δ et B_1 jouissent de la propriété énoncée dans le lemme; celui-ci est donc démontré.

§ 7. Revenons à l'étude du problème 7.

17. **Lemme.** Lorsqu'une fonction y de x est une solution du problème 7, il lui correspond une constante ε parfaitement déterminée, vérifiant dans tous les cas l'équation

$$\varepsilon^2 = 1, \tag{74}$$

telle qu'il soit possible de déterminer une constante positive de δ de façon que, pour l'ensemble de toutes les valeurs de x vérifiant les relations

$$0 < x \leqq \delta, \tag{75}$$

la fonction y satisfasse à l'équation (35,2) et que l'on ait, en outre, dans tout l'intervalle $(0, \delta)$:

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d \tag{76}$$

où d est le second membre des relations (21).

En effet, la fonction y de x ne pouvant être une solution du problème 7 {lemme 9} que dans un intervalle de la forme $(0, l)$, où l représente un nombre positif, il résulte du lemme 13 ainsi que de la continuité de la fonction y et de sa dérivée y' dans l'intervalle $(0, l)$ et de ce que chacune des fonctions y et y' s'annule pour $x = 0$, qu'il existera un nombre positif δ, appartenant bien entendu à l'intervalle $(0, l)$, tel que les relations (75) entraînent à la fois les relations (76) et l'inégalité

$$Q(x, y, y') > 0. \tag{77}$$

D'autre part {remarque **11**}, il correspondra à toute valeur de x vérifiant (75) une valeur de ε satisfaisant à l'équation (74) et telle que, pour la valeur considérée de x, l'équation (35,2) soit vérifiée. Reste à prouver que cette valeur de ε reste la même pour toutes les valeurs de x vérifiant (75) lorsque δ est déterminé de la façon indiquée plus haut. Or, la fonction y de x étant donnée et (75) entraînant (77), l'équation (35,2) définira ε comme une fonction continue de x pour toutes celles des valeurs de cette variable qui satisfont à (75); mais on a dans tous les cas l'équation (74). Donc, la fonction ε de x se réduira bien à une constante et notre lemme est démontré.

18. **Définition.** Les notations du lemme précédent étant conservées, la constante ε s'appellera *indice* de la solution y du problème 7.

19. **Théorème.** Supposons qu'une fonction donnée y de x soit une solution du problème 7, désignons par ε l'indice {déf. **18**} de cette solution et soit δ le nombre positif dont l'existence est assurée par le lemme **17**.

Lorsqu'une seconde fonction z de x est aussi une solution du problème 7, de même indice ε que la solution y, elle se confond avec cette dernière dans l'intervalle $(0, \delta')$ constitué par l'ensemble des points communs à l'intervalle $(0, \delta)$ et à l'intervalle (J) dans lequel la fonction z de x vérifie les conditions du problème 7. Pour démontrer ce théorème, observons {lemme **9**} que l'intervalle (J) sera nécessairement de la forme $(0, m)$ où m représente un nombre positif. Cela prouve que l'ensemble des points communs aux intervalles $(0, \delta)$ et (J) constituera, comme l'implique l'énoncé du théorème, un intervalle de la forme $(0, \delta')$ où δ' représente un o mbre positif. Les solutions y et z du problème 7 étant de même indice ε {déf. **18**}, il résulte du lemme **17** qu'il se trouvera un nombre positif δ'', non supérieur à δ', tel que, dans l'intervalle $(0, \delta'')$, la fonction y vérifie l'équation (35,2) et la fonction z la suivante:

$$z' = \alpha_1 x + \beta_1 z + \varepsilon \sqrt{Q(x, z, z')}. \tag{78}$$

Cela posé, il résulte du lemme **10** que les fonctions y et z considérées actuellement, satisfont aux hypothèses du lemme **16**. Donc, en vertu de ce lemme, il existera un système de deux nombres positifs δ''' et B_1 jouissant de la propriété suivante: si l'on désigne par r un nombre positif quelconque appartenant à l'intervalle $(0, \delta''')$ et par M' la borne supérieure de l'expression

$$|y' - z'|$$

dans l'intervalle $(0, r)$, la valeur absolue de la différence des seconds membres des équations (35,2) et (78) ne deviendra supérieure à l'expression

$$B_1\, r^{\frac{1}{2}}\, M'$$

pour aucune valeur de x appartenant à l'intervalle $(0, r)$. Par conséquent, il résulte des équations (35,2) et (78) que, dans tout cet intervalle, on aura

$$|y' - z'| \leqq B_1\, r^{\frac{1}{2}}\, M' \tag{79}$$

Mais la fonction

$$|y' - z'|$$

est continue dans l'intervalle $(0, r)$. Elle atteindra donc sa borne supérieure M' dans cet intervalle pour une certaine valeur x_0 de x dans l'intervalle considéré. En écrivant la relation (79) pour le point x_0 de l'intervalle $(0, r)$ on trouvera

$$M' \leqq B_1\, r^{\frac{1}{2}}\, M'$$

ou bien

$$M' (1 - B_1\, r^{\frac{1}{2}}) \leqq 0. \tag{80}$$

Donnons à r, ce qui est permis, une valeur assez petite pour avoir

$$1 - B_1\, r^{\frac{1}{2}} > 0.$$

La relation (80) nous donnera

$$M' = 0.$$

On aura donc

$$y' - z' = 0$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$ et, puisque les fonctions y et z s'annulent pour $x = 0$, on aura par conséquent aussi

$$y - z = 0$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$. Nous arrivons donc à la conclusion suivante: il existe un ensemble (E) de nombres positifs constitué par l'ensemble de tous les nombres positifs tels que si r est l'un quelconque d'entre eux, il jouit des deux propriétés suivantes:

1° On a

$$r \leqq \delta'''$$

et par suite aussi

$$r \leqq \delta'$$

2° Dans l'intervalle $(0, r)$ les fonctions y et z se confondent. Soit R la borne supérieure des nombres appartenant à l'ensemble (E). Le nombre R appartiendra à l'intervalle $(0, \delta')$ et à cause de la continuité des fonctions y et z, il appartiendra lui-même à l'ensemble (E). D'autre part, lorsqu'un nombre x_0, intérieur à l'intervalle $(0, \delta')$ fait partie de l'ensemble (E), il n'est pas une borne superiéure des nombres de cet ensemble. En effet supposons que le nombre x_0 soit intérieur à l'intervalle $(0, \delta')$ et fasse partie de l'ensemble (E). Il existera alors un nombre positif η tel que les fonctions y et z satisfassent respectivement aux équations (35,2) et (78) dans l'intervalle $(x_0 - \eta,\ x_0 + \eta)$ et qu'en outre l'on ait:

$$(y)_{x=x_0} = (z)_{x=x_0}$$
$$(y')_{x=x_0} = (z')_{x=x_0}$$

Donc, en vertu du théorème classique relatif à la détermination de l'intégrale d'une équation différentielle du 1-er ordre par sa valeur initiale, on aura

$$y = z$$

dans tout l'intervalle $(x_0 - \eta,\ x_0 + \eta)$, du moins lorsque η, sans être nul, sera assez petit.

Cele prouve bien qu'un nombre intérieur à l'intervalle $(0, \delta')$ ne peut pas constituer la borne supérieure R de l'ensemble E. Mais

$$R > 0,$$

donc R se confond avec δ' et notre théorème est démontré.

20. Théorème. Il existe un nombre positif l tel que, à chacun des deux nombres

(81) $$+1 \quad \text{et} \quad -1,$$

il corresponde une solution du problème **7**, admettant ce nombre pour indice {déf. 18} et vérifiant dans l'intervalle $(0, l)$ les conditions du problème considéré.

Pour démontrer ce théoréme, désignons par ε l'un des nombres (81).

Nous aurons à prouver que, pour une valeur assez petite mais indépendante du signe de ε et positive de l, l'équation (35,2), c'est à dire l'équation différentielle

(82) $$y' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \varepsilon \sqrt{Q(x, y, y')},$$

admet une intégrale vérifiant cette équation dans l'intervalle $(0, l)$ et s'annulant avec sa dérivée première pour $x = 0$. Pour établir l'existence du nombre l, nous allons nous servir d'une forme appropriée de la méthode des approximations successives.

21. **Lemme.** Ayant choisi un nombre A vérifiant l'inégalité

(83) $$A > c,$$

où c représente le nombre défini par les relations (48), on pourra lui faire correspondre un nombre positif δ tel qu'il existe une suite infinie

(84) $$y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots$$

de fonctions réelles de x, définies dans l'intervalle formé $(0, \delta)$, jouissant des propriétés suivantes:

1° chacune des fonctions y_n ainsi que sa dérivée première y'_n sont continues dans l'intervalle fermé $(0, \delta)$.

2° Chacune des fonctions y_n s'annule pour $x = 0$.

3° Dans tout l'intervalle $(0, \delta)$ on a

(85) $$|y'_n| \leqq A x^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots\ldots)$$

4° La fonction y_1 satisfait dans l'intervalle $(0, \delta)$ à l'équation

(86) $$y'_1 = \alpha_1 x + \varepsilon \sqrt{Q(x, 0, 0)} \quad .$$

5° Pour toute valeur entière et positive de n, on a

(87) $$y'_{n+1} = \alpha_1 x + \beta_1 y_n + \varepsilon \sqrt{Q(x, y_n, y'_n)}$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$.

Pour démontrer ce lemme, faisons l'observation suivante: le nombre A vérifiant l'inégalité (83), il existera une valeur de δ vérifiant les conditions de la remarque 15, en particulier dans le cas où l'on prendrait

(88) $$B = A.$$

Supposons que le nombre δ ait une valeur satisfaisant aux conditions de la remarque **15** pour la valeur (88) de B.

Je dis que cette valeur de δ satisfera aussi aux conditions du lemme **21** qu'il s'agit précisément de démontrer. En effet, appliquons la remarque **15** au cas où l'on aurait posé

$$y = y' = 0$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. On aura $l = \delta$, et la fonction v, définie par la formule (49), se confondra alors comme cela résulte de (86), avec la fonction y_1'. Par conséquent, la formule (86) définira la fonction y_1', dans tout l'intervalle $(0, \delta)$, comme une fonction réelle et continue de x, vérifiant dans cet intervalle la relation

$$|y_1'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}}$$

Donc la fonction y_1 satisfera à toutes les conditions du lemme.

Supposons provisoirement que tous les termes de la suite (84) jusqu'au terme y_n inclusivement, satisfassent aux conditions du lemme. **21**. La fonction y_n', dérivée première de la fonction y_n, sera réelle et continue dans l' intervalle $(0, \delta)$; en outre, on aura

$$|y_n'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}} \tag{88,1}$$

dans tout cet intervalle. Donc, puisque la fonction y_n s'annule pour $x = 0$, on aura

$$|y_n| \leqq \tfrac{2}{3} Ax^{\frac{3}{2}} \tag{88,2}$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. Nous pourrons dès lors appliquer la remarque **15** au cas où $l = \delta$ et où l'on a (87), la fonction y étant remplacée par y_n. En se reportant à la formule (87), on constatera de cette façon que, conjointement avec la condition

$$(y_{n+1})_{x=0} = 0,$$

cette formule définit la fonction y_{n+1} comme une fonction vérifiant les conditions du lemme dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. Donc, en définitive, le lemme (21) est vrai en vertu du principe d'induction mathématique.

Supposons que le nombre δ ait une valeur vérifiant toutes les conditions du lemme **21**. En appliquant le lemme **16** au cas où l'on substituerait les fonctions y_{n+1} et y_n aux fonctions y et z, on s'assurera aisément qu'en diminuant au besoin la valeur précédente de δ, on pourra attribuer à ce nombre une valeur positive vérifiant la condition suivante: si l'on désigne par r un nombre positif appartenant à l'intervalle $(0, \delta)$ et par M_k la borne supérieure de l'expression

$$|y'_{k+1} - y'_k|$$

dans l'intervalle $(0, r)$, l'on aura:

$$M'_{n+1} \leqq B_1 r^{\frac{1}{2}} M'_n \tag{89}$$

pour toute les valeurs entières et positives de n avec une valeur constante et positive de B_1. Désignons par θ un nombre positif mais plus petit que l'unité et choisissons le nombre positif r, dans l'intervalle $(0, \delta)$, de façon à avoir

$$B_1 r^{\frac{1}{2}} \leqq \theta .$$

La relation (89) nous donnera

$$M'_{n+1} \leqq \theta M'_n$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Mais nous avons

$$0 < \theta < 1.$$

Donc la série

$$y'_1 + \sum_{k=1}^{\varphi} (y'_{k+1} - y'_k) \tag{90}$$

est absolument et uniformément convergente dans tout l'intervalle $(0, r)$. Mais on a

$$(y_n)_{x=0} = 0$$

pour toute valeur entière et positive de n. Par conséquent la série.

$$y_1 + \sum_{u=1}^{\varphi} (y_{n+1} - y_n \tag{91}$$

est aussi absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $(0, r)$. Il résulte de la convergence uniforme des séries (90) et (91) qu'il existe une fonction y de x continue avee sa dérivée première y' dans tout l'intervalle $(0, r)$ telle que

(92)
$$\begin{cases} y' = \lim\limits_{\frac{1}{n}=0} y'_n \\ y = \lim\limits_{\frac{1}{n}=0} y_n \end{cases}$$

la convergence étant uniforme dans tout l'intervalle $(0, r)$.

Il résulte des relations (88,1) et (88,2) que l'on pent attribuer au nombre positif r une valeur assez petite, pour que pour toute valeur entière et positive de n l'on ait, dans tout l'intervalle $(0, r)$:

(93)
$$|x| \leqq d, \quad |y_n| \leqq d, \quad |y'_n| \leqq d,$$

où d est le second membre des relations (21).

Supposons que r satisfasse aussi à cette condition. A cause de (92) on aura alors

(94)
$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$ et les égalités (92) et (87) entraîneront la conséquence suivante: la fonction y définie par la seconde des équations (92), continue avec sa dérivée première y' dans l'intervalle fermé $(0, r)$, satisfait à l'équation différentielle (82) dans tout cet intervalle et, pour $x = 0$, elle s'annule ainsi que sa dérivée première y'. Donc la valeur

$$l = r$$

de l satisfait à toutes les conditions du théorème **20** lequel, par conséquent, est complétement démontré.

22. Remarque Si l'on désigne par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les deux intégrales de l'équation (82) qui ont les nombres $+1$ et -1 pour indices (déf. **18**) respectifs et dont l'existence est assurée par le théorème **20**, on a:

$$\lim \frac{\varphi'_1(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = e \quad \text{et} \quad \lim \frac{\varphi'_2(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = -c$$

lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, comme on le démontre trés aisément au moyen du lemme **14**; par conséquent, pour des valeurs positives mais assez petites de x, on a certainement

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x).$$

§ 8. Actuellement il est très aisé de démontrer le théorème **3**. En effet, les théorèmes **19** et **20**, conjointement avec la remarque **22**, entraînent l'exactitude du théorème **3** dans le cas particulier où l'on a

$$a = b = b' = 0.$$

Or, en vertu du lemme **4**, cette circonstance entraîne l'exactitude du théorème **3** lui-même. Celui-ci est donc démontré.

Pour terminer indiquons rapidement comment le théorème **3** permet de localiser avec précision le défaut du raisonnement par lequel Lagrange a cru avoir prouvé que, normalement, une équation différentielle du 1-er ordre devait admettre une intégrale singulière. A cet effet, supposons qu'une fonction $f(x, y, u)$ des trois variables x, y, u satisfasse à l'hypothèse 1. En général le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f, f'_u)}{D(x, y)} \tag{93}$$

ne s'annulera pas au point défini par les valeurs (5) des variables x, y, u. On pourra donc trouver un nombre positif ϱ tel que, dans le domaine

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (u - b')^2 \leqq \varrho^2, \tag{94}$$

le système d'équations

$$f(x, y, u) = 0$$
$$f'_u(x, y, u) = 0$$

définisse x et y sans ambiguité comme fonctions de u dans un certain intervalle (u_1, u_2) comprenant à son intérieur le nombre b′. Ces fonctions, soit $\lambda(u)$ et $\mu(u)$, seront continues dans l'intervalle (u_1, u_2) et chacune d'elles aura une dérivée première continue. Si donc on rapporte le plan à un système de coordonnées cartésiennes (x, y), les équations

$$x = \lambda(u), \quad y = \mu(u) \tag{95}$$

définiront un certain arc (S). Supposons ce qui, à cause de (7) et (8) est permis, que le nombre ϱ, sans être nul, soit assez petit pour que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \neq 0 \tag{92}$$

en tout point de l'arc (S).

La seconde de ces inégalités entraînera cette conséquence que les dérivées $\lambda'(u)$ et $\mu'(u)$ ne s'annuleront à la fois en aucun point de l'arc (S). Cet arc admettra donc une tangente déterminée en chacun de ses points.

Cela posé, le raisonnement de Lagrange implique les deux hypothèses suivantes:

1° Si x_0, y_0 et u_0 représentent les valeurs de x, y et u en un point de l'arc (S), il existe une branche de courbe intégrale particulière (C) de l'équation (2) passant par le point (x_0, y_0) et telle que, en ce point, l'on ait

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = u_0.$$

2° Il résulterait de la théorie des enveloppes que l'arc (C) serait tangent au point (x_0, y_0) à l'arc (S).

La première hypothèse est confirmée par le théorème **3** car, dans l'énoncé de ce théorème, on pourra substituer, comme cela résulte de l'existence des inégalités (92) en chaque point de l'arc (S), les nombres x_0, y_0, u_0 aux nombres a, b et b'. La deuxième hypothèse au contraire est contredite par le théorème **3**, car la branche (C) de courbe intégrale se compose de deux arcs dont l'ensemble donne lieu à un point de rebroussement au point (x_0, y_0). C'est donc l'adoption de cette hypothèse illégitime qui constitue le défaut du raisonnement de Lagrange.