Sur les trois classifications des fonctions représentables analytiquement.

Par

S. Kempisty.

(Résumé d'un mémoire publié en langue polonaise dans le supplément au présent numéro des Annales de la Société mathématique polonaise).

A côté de la classification de Baire, je considère celles de Young et de Sierpiński. On les obtient en se limitant soit aux suites monotonnes (cl. de Young) soit aux séries absolument convergentes (cl. de Sierpiński). Les definitions exactes se trouvent dans ma Note „Sur les séries itérées de fonctions continues" [1].

Au sujet de toutes ces classes d'espèces différentes je demontre les trois nouveaux théorèmes suivants, en étendant les théorèmes de M. M. Sierpiński [2], Hahn [3] et Mazurkiewicz [4]) aux classes supérieures:

I. Pour qu' une fonction soit de la classe α de Sierpiński il faut et il suffit qu' elle soit une différence de deux fonctions de classe $\leqslant \alpha$ de Young et du même type.

II. Soit $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions de la classe $\alpha+1$ de Young la première étant du type l, la seconde du type u. Si

$$g(x) > h(x),$$

---

[1]) S. Kempisty: Fund. Math. II (1920) p. 64.

[2]) W. Sierpiński: Sur les fonctions développables... F. M. II (1920) p. 18.

[3]) H. Hahn: Über halbstetige u. unstetige Funktionen Bericht. Akad. 126 (1912) p. 103.

[4]) S. Markiewicz: Sur les fonctions de la classe 1... F. M. II (1920) p. 32.

il existe une fonction $f(x)$ qui est la différence de deux fonctions de la classe $\leqq \alpha$ de Young du même type et remplit la condition

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x).$$

III. Si $F(x)$ est une fonction de la classe α de Baire et ε un nombre positif, il existe une fonction $f(x)$ qui est la différence de deux fonctions de la classe $\leqslant \alpha$ de Young du même type et qui est égale à $F(x)$ à moins de ε près.

Comme conséquence immédiate j'obtiens le théorème.

IV. Pour qu' une fonction soit de la classe α de Baire il faut et il suffit qu'elle soit développable en une série uniformément convergente de fonctions de la classe α de Sierpiński.

De plus je donne une nouvelle démonstration d'uu théorème de M. Young, étendu par Hahn[1]) aux classes d'ordre transfini.

V. Toute fonction de la classe α de Young des deux types appartient à la classe $\leqslant \alpha$ de Baire.

C'est la réciproque d'un autre théorème de M. Young que j'ai genéralisé dans la note citée et qui n'était demontré qu'au moyen des ensembles de Borel par M. M. Young[2]) et Hahn[3]).

Wilno, janvier 1922.

---

[1]) H. Hahn: Théorie d. reellen Functionen (1921) p. 346.

[2]) W. H. Young: On functions and their associated sets of points. Proc. Lond. Math. Soc. 12 (1913) p. 260.

[3]) H. Hahn loc. cit. p. 347 (généralisation de la démonstration de Young aux classes transfinies).