XIX.

SOPRA UNA ESTENSIONE DELLA TEORIA DI RIEMANN SULLE FUNZIONI DI VARIABILI COMPLESSE

Nota I.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4ª, vol. III_2, 1887_2; pp. 281–287 (*)

1. Il fondamento del metodo di RIEMANN per lo studio delle funzioni di variabili complesse consiste, come è ben noto, in questo:

Si prende una superficie chiusa una o più volte connessa (oppure un pezzo di superficie) e si considerano due variabili complesse f e φ funzioni continue dei punti di essa, escluso un certo numero di luoghi singolari.

Ad un punto M (non singolare) preso sulla superficie corrisponderanno due valori complessi f e φ. Ad un punto N corrisponderanno i valori $f + \Delta f$, $\varphi + \Delta\varphi$. Se coll'avvicinarsi indefinito di N ad M si ha che

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta f}$$

esiste ed è indipendente dal modo con cui N si approssima ad M, si dice, secondo RIEMANN, che φ è una funzione della variabile complessa f.

Da questa definizione RIEMANN dedusse prima di ogni altra cosa la relazione che passa fra la teoria delle funzioni di variabili complesse e quella, della equazione $\Delta^2 = 0$ il che gli servì di base alla teoria delle caratteristiche [1].

2. Le considerazioni di RIEMANN, che si riferiscono ad uno spazio a due dimensioni, possono estendersi agli spazî a tre dimensioni, purché invece di partire da funzioni dei punti dello spazio, si parta da *funzioni che dipendono dalle linee dello spazio a tre dimensioni* [2]. Mi propongo in questa Nota di esporre appunto i fondamenti di tale estensione.

3. Si abbiano due variabili complesse funzioni continue dipendenti dalle linee di un campo a tre dimensioni, tali cioè che ad ogni linea chiusa interna

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

(1) *Grundlangen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.* — Riemann's Werke, p. 4.

(2) Vedi la mia Nota: *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, pubblicata in questi Rendiconti »; [in questo vol.: XVIII, pp. 314–327].

al campo, oppure ad ogni linea che finisce al contorno del campo, corrisponda un valore di ciascuna delle due variabili complesse.

Supporremo che le due funzioni di linee siano *semplici* (3) e stabiliremo fra di esse un legame analogo a quello posto da RIEMANN per le funzioni dei punti di una superficie.

A tal fine si consideri una curva L alla quale corrispondono i valori F e Φ per le due funzioni, e si deformi un tratto della curva nel cui interno trovasi un punto M. Le variazioni di F e Φ corrispondenti a questa deformazione siano ΔF e $\Delta\Phi$. Se coll'impiccolire indefinitamente della deformazione e del tratto deformato, il limite del rapporto

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta F}$$

esiste e dipende soltanto dalla posizione del punto M, si dirà che *le due funzioni* F e Φ *sono collegate fra loro nel senso riemanniano.*

Risulta immediatamente da questa definizione che se Φ e Ψ sono collegate ad F, Φ è collegata a Ψ.

4. Vediamo di stabilire le proprietà fondamentali che si deducono da questa definizione.

Separiamo in F e in Φ la parte reale da quella immaginaria. Avremo:

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2 \quad , \quad F = F_1 + iF_2 \, ,$$

e poniamo (4):

$$\frac{dF_1}{d(y,z)} = p_1 \quad , \quad \frac{dF_1}{d(z,x)} = q_1 \quad , \quad \frac{dF_1}{d(x,y)} = r_1$$

$$\frac{dF_2}{d(y,z)} = p_2 \quad , \quad \frac{dF_2}{d(z,x)} = q_2 \quad , \quad \frac{dF_2}{d(x,y)} = r_2$$

$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1$$

$$\frac{d\Phi_2}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d(z,x)} = \chi_2 \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d(x,y)} = \rho_2 \, .$$

Affinché sia soddisfatta la condizione posta dovrà essere per uno stesso punto dello spazio

$$\frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\cos nx + (\chi_1 + i\chi_2)\cos ny + (\rho_1 + i\rho_2)\cos nz}{(p_1 + ip_2)\cos nx + (q_1 + iq_2)\cos ny + (r_1 + ir_2)\cos nz}$$

indipendente dalla direzione n (5).

Perciò sussisteranno le relazioni:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2} \, .$$

(3) Vedi Nota citata, Art. II, § 3.
(4) Vedi Nota citata, Art. II, § 4.
(5) Vedi Nota citata, Art. II. § 4.

Da questa si deducono le altre:

$$
(1)\quad \begin{cases} q_1\,\tilde\omega_1 - q_2\,\tilde\omega_2 = p_1\,\chi_1 - p_2\,\chi_2 \;, & q_2\,\tilde\omega_1 + q_1\,\tilde\omega_2 = p_2\,\chi_1 + p_1\,\chi_2 \\ r_1\,\chi_1 - r_2\,\chi_2 = q_1\,\rho_1 - q_2\,\rho_2 \;, & r_2\,\chi_1 + r_1\,\chi_2 = q_2\,\rho_1 + q_1\,\rho_2 \\ p_1\,\rho_1 - p_2\,\rho_2 = r_1\,\tilde\omega_1 - r_2\,\tilde\omega_2 \;, & p_2\,\rho_1 + p_1\,\rho_2 = r_2\,\tilde\omega_1 + r_1\,\tilde\omega_2 \end{cases}
$$

e risolvendole rispetto a $\tilde\omega_2$, χ_2, ρ_2 otterremo:

$$
(1')\quad \begin{cases} \tilde\omega_2 = \dfrac{(p_1^2+p_2^2)\,\chi_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\,\tilde\omega_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2} = - \dfrac{(p_1^2+p_2^2)\,\rho_1 - (p_1 r_1 + p_2 r_2)\,\tilde\omega_1}{r_2 p_1 - p_2 r_1} \\[2ex] \chi_2 = \dfrac{(q_1^2+q_2^2)\,\rho_1 - (q_1 r_1 + q_2 r_2)\,\chi_1}{q_2 r_1 - q_1 r_2} = - \dfrac{(q_1^2+q_2^2)\,\tilde\omega_1 - (q_1 p_1 + q_2 p_2)\,\chi_1}{p_2 q_1 - q_2 p_1} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{(r_1^2+r_2^2)\,\tilde\omega_1 - (r_1 p_1 + r_2 p_2)\,\rho_1}{r_2 p_1 - r_1 p_2} = - \dfrac{(r_1^2+r_2^2)\,\chi_1 - (r_1 q_1 + r_2 q_2)\,\rho_1}{q_2 r_1 - r_2 q_1}\,. \end{cases}
$$

Porremo

$$
(2)\quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = E_{11} \;, & q_1^2 + q_2^2 = E_{22} \;, & r_1^2 + r_2^2 = E_{33} \\ q_1 r_1 + q_2 r_2 = E_{23} = E_{32} \;, & r_1 p_1 + r_2 p_2 = E_{31} = E_{13} \;, & p_1 q_1 + p_2 q_2 = E_{12} = E_{21} \\ q_2 r_1 - q_1 r_2 = D_1 \;, & r_2 p_1 - r_1 p_2 = D_2 \;, & p_2 q_1 - p_1 q_2 = D_3 \end{cases}
$$

e avremo le relazioni

$$
(3)\quad \begin{cases} E_{11} D_1 + E_{12} D_2 + E_{13} D_3 = 0 \\ E_{21} D_1 + E_{22} D_2 + E_{23} D_3 = 0 \\ E_{31} D_1 + E_{32} D_2 + E_{33} D_3 = 0 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} D_1^2 = E_{22} E_{33} - E_{23}^2 \\ D_2^2 = E_{33} E_{11} - E_{31}^2 \\ D_3^2 = E_{11} E_{22} - E_{12}^2 \end{cases}
$$

$$
(4')\quad \begin{cases} D_2 D_3 = E_{12} E_{13} - E_{11} E_{23} \\ D_3 D_1 = E_{23} E_{21} - E_{22} E_{31} \\ D_1 D_2 = E_{31} E_{32} - E_{33} E_{12} \end{cases}
$$

e le equazioni (1′) diverranno

$$
\tilde\omega_2 = \frac{E_{11}\,\chi_1 - E_{12}\,\tilde\omega_1}{D_3} = - \frac{E_{11}\,\rho_1 - E_{13}\,\tilde\omega_1}{D_2}
$$

$$
\chi_2 = \frac{E_{22}\,\rho_1 - E_{23}\,\chi_1}{D_1} = - \frac{E_{22}\,\tilde\omega_1 - E_{21}\,\chi_1}{D_3}
$$

$$
\rho_2 = \frac{E_{33}\,\tilde\omega_1 - E_{31}\,\rho_1}{D_2} = - \frac{E_{33}\,\chi_1 - E_{32}\,\rho_1}{D_1}\,.
$$

Tenendo conto delle (3) esse possono scriversi ancora

$$
(A_1)\quad \begin{cases} \tilde\omega_2 = \dfrac{E_{12}\,\rho_1 - E_{13}\,\chi_1}{D_1} = \dfrac{E_{13}\,\tilde\omega_1 - E_{11}\,\rho_1}{D_2} = \dfrac{E_{11}\,\chi_1 - E_{12}\,\tilde\omega_1}{D_3} \\[2ex] \chi_2 = \dfrac{E_{22}\,\rho_1 - E_{23}\,\chi_1}{D_1} = \dfrac{E_{23}\,\tilde\omega_1 - E_{21}\,\rho_1}{D_2} = \dfrac{E_{21}\,\chi_1 - E_{22}\,\tilde\omega_1}{D_3} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{E_{32}\,\rho_1 - E_{33}\,\chi_1}{D_1} = \dfrac{E_{33}\,\tilde\omega_1 - E_{31}\,\rho_1}{D_2} = \dfrac{E_{31}\,\chi_1 - E_{32}\,\tilde\omega_1}{D_3}\,. \end{cases}
$$

Se si risolvessero le (1) rispetto a $\tilde{\omega}_1$, χ_1, ρ_1 si otterrebbe invece

$$
(\mathrm{A}_2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 &= \frac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1} = \frac{E_{11}\rho_2 - E_{13}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \frac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D_3} \\
\chi_1 &= \frac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1} = \frac{E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \frac{E_{22}\tilde{\omega}_2 - E_{21}\chi_2}{D_3} \\
\rho_1 &= \frac{E_{33}\chi_2 - E_{32}\rho_2}{D_1} = \frac{E_{31}\rho_2 - E_{33}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \frac{E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{32}\chi_2}{D_3}.
\end{aligned}
\right.
$$

5. Dalle (A_2) si ha

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 D_1 &= E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2 \\
\chi_1 D_2 &= E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2 \\
\rho_1 D_3 &= E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{31}\chi_2,
\end{aligned}
$$

quindi sommando

$$
(\mathrm{B}_1)\qquad D_1\tilde{\omega}_1 + D_2\chi_1 + D_3\rho_1 = 0.
$$

Analogamente si avrebbe

$$
(\mathrm{B}_2)\qquad D_1\tilde{\omega}_2 + D_2\chi_2 + D_3\rho_2 = 0.
$$

Abbiamo poi dalle (A_1) e (A_2), tenendo conto delle (3),

$$
\Theta = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2, \rho_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{vmatrix} = \frac{E_{22}\rho_1^2 - 2E_{23}\rho_1\chi_1 + E_{33}\chi_1^2}{D_1^2} = \frac{E_{22}\rho_2^2 - 2E_{23}\rho_2\chi_2 + E_{33}\chi_2^2}{D_1^2}
$$

$$
= \frac{1}{D_1 D_2 D_3}\left[D_1 E_{11}\chi_1\rho_1 + D_2 E_{22}\rho_1\tilde{\omega}_1 + D_3 E_{33}\tilde{\omega}_1\chi_1\right]
$$

$$
= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\left[D_1 E_{11}\chi_2\rho_2 + D_2 E_{22}\rho_2\tilde{\omega}_2 + D_3 E_{33}\rho_2\tilde{\omega}_2\right].
$$

Quindi, ponendo

$$
\chi_2\rho_1 - \chi_1\rho_2 = \Delta_1 \quad , \qquad \rho_2\tilde{\omega}_1 - \rho_1\tilde{\omega}_2 = \Delta_2 \quad , \qquad \tilde{\omega}_2\chi_1 - \tilde{\omega}_1\chi_2 = \Delta_3,
$$

si avrà per la simmetria delle ultime formule

$$
(\mathrm{C})\quad \left\{
\begin{aligned}
\Theta &= \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{\Delta_2}{D_2} = \frac{\Delta_3}{D_3} = \frac{E_{22}\rho_1^2 - 2E_{23}\rho_1\chi_1 + E_{33}\chi_1^2}{D_1^2} \\
&= \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1^2 - 2E_{31}\tilde{\omega}_1\rho_1 + E_{11}\rho_1^2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\chi_1^2 - 2E_{12}\chi_1\tilde{\omega}_1 + E_{22}\tilde{\omega}_1^2}{D_3^2} \\
&= \frac{E_{22}\rho_2^2 - 2E_{23}\rho_2\chi_2 + E_{33}\chi_2^2}{D_1^2} = \frac{E_{33}\tilde{\omega}_2^2 - 2E_{31}\tilde{\omega}_2\rho_2 + E_{11}\rho_2^2}{D_2^2} \\
&= \frac{E_{11}\chi_2^2 - 2E_{12}\chi_2\tilde{\omega}_2 + E_{22}\tilde{\omega}_2^2}{D_3^2} = \frac{(q_1\rho_1 - r_1\chi_1)^2 + (q_2\rho_1 - r_2\chi_1)^2}{D_1^2} \\
&= \frac{(r_1\tilde{\omega}_1 - p_1\rho_1)^2 + (r_2\tilde{\omega}_1 - p_2\rho_1)^2}{D_2^2} = \frac{(p_1\chi_1 - q_1\tilde{\omega}_1)_2 + (p_2\chi_1 - q_2\tilde{\omega}_1)^2}{D_3^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

6. Il parametro Θ funziona nella presente teoria da *parametro differenziale del primo ordine*. Esso potrà scriversi, usando le notazioni adottate nella Nota già citata,

$$\Theta = \frac{E_{22}\left(\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\right)^2 - 2E_{23}\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\cdot\frac{d\Phi_1}{d(z,x)} + E_{33}\left(\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\right)^2}{D_1^2} = \text{ecc.}$$

$$= \frac{E_{22}\left(\frac{d\Phi_2}{d(x,y)}\right)^2 - 2E_{23}\frac{d\Phi_2}{d(x,y)}\cdot\frac{d\Phi_2}{d(z,x)} + E_{33}\left(\frac{d\Phi_2}{d(z,x)}\right)^2}{D_1^2} = \text{ecc.}$$

Dalle formule (C) risulta immediatamente che il parametro Θ è una quantità *positiva*.

Dimostriamo che esso è *invariante* per un cambiamento delle variabili x, y, z. A tal fine dalle x, y, z passiamo alle x', y', z'. Poniamo un apice a tutte le quantità analoghe a quelle considerate relative a x, y, z, quando ci si riferisce invece alle x', y', z'. Come è stato trovato nella Nota citata (Art. II, § 6) avremo:

$$(5)\quad \begin{cases} p_1' = p_1\dfrac{d(y,z)}{d(y',z')} + q_1\dfrac{d(z,x)}{d(y',z')} + r_1\dfrac{d(x,y)}{d(y',z')} \\[2mm] q_1' = p_1\dfrac{d(y,z)}{d(z',x')} + q_1\dfrac{d(z,x)}{d(z',x')} + r_1\dfrac{d(x,y)}{d(z',x')} \\[2mm] r_1' = p_1\dfrac{d(y,z)}{d(x',y')} + q_1\dfrac{d(z,x)}{d(x',y')} + r_1\dfrac{d(x,y)}{d(x',y')}, \end{cases}$$

onde, con un calcolo che non presenta difficoltà,

$$(6)\quad \begin{cases} D_1' = \dfrac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(D_1\dfrac{dx}{dx'} + D_2\dfrac{dy}{dx'} + D_3\dfrac{dz}{dx'}\right) \\[2mm] D_2' = \dfrac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(D_1\dfrac{dx}{dy'} + D_2\dfrac{dy}{dy'} + D_3\dfrac{dz}{dy'}\right) \\[2mm] D_3' = \dfrac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(D_1\dfrac{dx}{dz'} + D_2\dfrac{dy}{dz'} + D_3\dfrac{dz}{dz'}\right), \end{cases}$$

ove $\frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}$ rappresenta il determinante funzionale delle x, y, z rispetto alle x', y', z'. Analogamente si ottiene:

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta_1' = \dfrac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(\Delta_1\dfrac{dx}{dx'} + \Delta_2\dfrac{dy}{dx'} + \Delta_3\dfrac{dz}{dx'}\right) \\[2mm] \Delta_2' = \dfrac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(\Delta_1\dfrac{dx}{dy'} + \Delta_2\dfrac{dy}{dy'} + \Delta_3\dfrac{dz}{dy'}\right) \\[2mm] \Delta_3' = \dfrac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(\Delta_1\dfrac{dx}{dz'} + \Delta_2\dfrac{dy}{dz'} + \Delta_3\dfrac{dz}{dz'}\right), \end{cases}$$

onde a cagione delle (C)

$$\frac{\Delta_1'}{D_1'} = \frac{\Delta_1\dfrac{dx}{dx'} + \Delta_2\dfrac{dy}{dx'} + \Delta_3\dfrac{dz}{dx'}}{D_1\dfrac{dx}{dx'} + D_2\dfrac{dy}{dx'} + D_3\dfrac{dz}{dx'}} = \frac{\Delta_1}{D_1},$$

quindi

$$\frac{\Delta'_1}{D'_1}=\frac{\Delta'_2}{D'_2}=\frac{\Delta'_3}{D'_3}=\frac{\Delta_1}{D_1}=\frac{\Delta_2}{D_2}=\frac{\Delta_3}{D_3};$$

ciò dimostra che

$$\Theta'=\Theta.$$

7. Teniamo ora conto (vedi Nota cit., Art. II, § 5) che le $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ debbono soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial x}+\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x}+\frac{\partial\chi_2}{\partial y}+\frac{\partial\rho_2}{\partial z}=0;$$

avremo quindi la equazione (vedi formule (A_1))

$$\text{(D)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\,\rho_1-E_{13}\,\chi_1}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\,\tilde{\omega}_1-E_{21}\,\rho_1}{D_2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\,\chi_1-E_{32}\,\tilde{\omega}_1}{D_3}\right)=0,$$

la quale potrà scriversi sotto varie altre forme tutte equivalenti tenendo conto delle relazioni (A_1). Ad una analoga relazione dovranno soddisfare le $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. La (D) potrà scriversi ancora

$$\text{(D')}\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}-E_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}-E_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}}{D_2}\right)\\&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}-E_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}}{D_3}\right)=0\end{aligned}\right.$$

o sotto altra forma tenendo conto delle (A_1). Alla stessa equazione differenziale dovrà soddisfare Φ_2. Potremo dunque stabilire che tanto la parte reale quanto la parte immaginaria debbono soddisfare alle seguenti condizioni (vedi formule (B_1) (B_2)):

$$\text{(E)}\quad \left\{\begin{aligned}&D_1\frac{d\Psi}{d(y,z)}+D_2\frac{d\Psi}{d(z,x)}+D_3\frac{d\Psi}{d(x,y)}=0\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}-E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}-E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2}\right)\\&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}-E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Reciprocamente, se Ψ è una funzione reale semplice delle linee di un campo a tre dimensioni, la quale soddisfa alle precedenti condizioni, essa potrà considerarsi come la parte reale o come la parte immaginaria di una funzione *collegata ad* F nel senso riemanniano. Infatti per la seconda delle (E) avremo (vedi Nota cit., Art. II, § 5) che dovrà esistere una funzione reale P delle linee, tale che

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dP}{d(y,z)} &= \frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\\
\frac{dP}{d(z,x)} &= \frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2}\\
\frac{dP}{d(x,y)} &= \frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}
\end{aligned}
\right.
$$

Da queste formule, tenendo conto della prima delle (E), e con un calcolo inverso a quello eseguito nel § 4, si giunge alle relazioni

$$
\frac{\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} + i\dfrac{dP}{d(y,z)}}{p_1 + ip_2} = \frac{\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} + i\dfrac{dP}{d(z,x)}}{q_1 + iq_2} = \frac{\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} + i\dfrac{dP}{d(x,y)}}{r_1 + ir_2}
$$

onde, posto $\Psi + iP = \Lambda$, avremo che il rapporto

$$
\frac{\dfrac{d\Lambda}{d(y,z)}\cos nx + \dfrac{d\Lambda}{d(z,x)}\cos ny + \dfrac{d\Lambda}{d(x,y)}\cos nz}{\dfrac{dF}{d(y,z)}\cos nx + \dfrac{dF}{d(z,x)}\cos ny + \dfrac{dF}{d(x,y)}\cos nz}
$$

sarà indipendente dalla direzione n, il che dimostra la proposizione enunciata.

La presente teoria è quindi intimamente legata allo studio delle equazioni (E), le quali appunto nel nostro caso funzionano come la equazione differenziale $\Delta^2 = 0$ nella teoria di RIEMANN.