Nota III.

Ibidem, pp. 196–202 (*).

1. Nella Nota precedente su questo argomento venne esposta la estensione della teoria delle caratteristiche alle funzioni di linee collegate fra loro nel senso riemanniano. Nella Nota che ho l'onore di presentare viene brevemente trattata la teoria delle operazioni di derivazione e di integrazione relative alle funzioni stesse.

Per questo studio è necessario introdurre delle funzioni complesse dei punti dello spazio collegate opportunamente alle funzioni fin qui considerate.

Riprendiamo pertanto la definizione di RIEMANN relativa alle funzioni di variabili complesse. Due variabili complesse φ e ψ (funzioni dei punti di un piano, i quali si riferiscono alle coordinate cartesiane x, y) sono funzioni l'una dell'altra quando

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial(-x)}=0.$$

Questa definizione è equivalente a quella enunciata nella Nota I, ed essa può estendersi allo spazio. Infatti si abbiano due variabili complesse F e f, la prima delle quali sia funzione delle linee e la seconda sia funzione dei punti dello spazio. Diremo che F è collegata ad f nel senso riemanniano, quando

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Stabiliremo di rappresentare le funzioni di linee mediante delle lettere maiuscole e quelle di punti colle lettere minuscole.

2. Ciò premesso, si possono dimostrare facilmente le seguenti proposizioni:

1ª Se una funzione f è collegata ad F essa lo sarà a tutte le funzioni Φ collegate ad F nel senso riemanniano (vedi la Nota I).

Infatti, posto

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)}=p\quad,\quad\frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)}=q\quad,\quad\frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)}=r,$$

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)}=\tilde{\omega}\quad,\quad\frac{d\Phi}{d(z,x)}=\chi\quad,\quad\frac{d\Phi}{d(x,y)}=\rho,$$

avremo

$$\frac{\tilde{\omega}}{p}=\frac{\chi}{q}=\frac{\rho}{r},$$

onde:

$$\tilde{\omega}\frac{\partial f}{\partial x}+\chi\frac{\partial f}{\partial y}+\rho\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

2ª Le condizioni affinché più funzioni f_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, siano collegate ad una stessa funzione F sono date da

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x}, & \frac{\partial f_r}{\partial x}, & \frac{\partial f_s}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i}{\partial y}, & \frac{\partial f_r}{\partial y}, & \frac{\partial f_s}{\partial y} \\ \frac{\partial f_i}{\partial z}, & \frac{\partial f_r}{\partial z}, & \frac{\partial f_s}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0 \qquad (i, r, s = 1, 2, \cdots n).$$

Infatti dalle

$$p\frac{\partial f_i}{\partial x} + q\frac{\partial f_i}{\partial y} + r\frac{\partial f_i}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

risultano come conseguenze le (2).

Se, mantenendo fissi i ed r (supposto f_i e f_r indipendenti) e dando ad s tutti i valori $1, 2, \cdots, n$, esclusi i ed r, è sempre soddisfatta la (2), essa sarà soddisfatta evidentemente per una combinazione qualunque di i, r, s.

3. Quando si avrà un sistema di funzioni f_i che soddisfano alle (2) si dirà che esse sono *collegate fra loro nel senso riemanniano*.

Si giustifica facilmente la ragione di questa denominazione, osservando che porre la condizione (2) equivale a stabilire ciò che segue:

Si prenda un punto M ove le tre funzioni hanno i valori f_1, f_2, f_3 e due punti N e P infinitamente vicini ad esso: si denotino con $f_i + \Delta' f_i$, $f_s + \Delta' f_s$, $f_r + \Delta' f_r$ i valori di f_i, f_s, f_r in N e con $f_i + \Delta'' f_i$, $f_s + \Delta'' f_s$, $f_r + \Delta'' f_r$ i loro valori in P e si ponga la condizione che i rapporti fra i determinanti

$$\begin{vmatrix} \Delta' f_i, \Delta'' f_i \\ \Delta' f_s, \Delta'' f_s \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \Delta' f_s, \Delta'' f_s \\ \Delta' f_r, \Delta'' f_r \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \Delta' f_r, \Delta'' f_r \\ \Delta' f_i, \Delta'' f_i \end{vmatrix}$$

abbiano dei limiti indipendenti dal modo con cui i punti N e P si avvicinano ad M indefinitamente.

4. Abbiasi un sistema qualunque di funzioni Φ_i collegate fra loro nel senso riemanniano e si prenda una funzione f collegata ad esse; sia cioè

$$\frac{d\Phi_i}{d(y, z)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\Phi_i}{d(z, x)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\Phi_i}{d(x, y)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Si potranno trovare delle funzioni φ_i tali che

$$(3)\qquad \frac{d\Phi_i}{d(y, z)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(y, z)}, \qquad \frac{d\Phi_i}{d(z, x)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(z, x)}, \qquad \frac{d\Phi_i}{d(x, y)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(x, y)}.$$

Le funzioni φ_i saranno evidentemente collegate alle Φ_i, alla f e saranno pure collegate fra loro.

Reciprocamente, se si ha un sistema di funzioni φ_i collegate fra loro nel senso riemanniano, posto

$$\frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(y, z)} = \varpi_{is}, \qquad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(z, x)} = \chi_{is}, \qquad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(x, y)} = \rho_{is},$$

avremo

$$\frac{\partial \varpi_{is}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{is}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{is}}{\partial z} = 0.$$

Esisterà dunque una funzione complessa Φ_{is} che soddisfa alle condizioni

$$\frac{d\Phi_{is}}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_{is} \quad , \quad \frac{d\Phi_{is}}{\partial(z,x)} = \chi_{is} \quad , \quad \frac{d\Phi_{is}}{d(x,y)} = \rho_{is} \, .$$

Le Φ_{is} sono fra loro collegate nel senso riemanniano.

Infatti dalle relazioni

$$\frac{d(\varphi_i, \varphi_s, \varphi_r)}{d(x,y,z)} = 0 \quad , \quad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s, \varphi_t)}{d(x,y,z)} = 0$$

segue che

$$\frac{\tilde{\omega}_{is}}{\tilde{\omega}_{rt}} = \frac{\chi_{is}}{\chi_{rt}} = \frac{\rho_{is}}{\rho_{rt}} \, .$$

Inoltre il sistema delle Φ_{is} sarà collegato alle φ_i. Quando fra Φ_i e f e φ_i passano le relazioni (3) si dirà che Φ_i è *coniugata* alle f e φ_i e, reciprocamente, f e φ_i coniugate a Φ_i. In questa ipotesi il valore di Φ_i corrispondente ad una linea L sarà dato da

$$\Phi_i \,|\, [\mathrm{L}] \,| = \int_{\mathrm{L}} \varphi_i \, df \, . \tag{4}$$

(V. *Sopra le funz. dip. da linee*, Nota II) supponendo che L faccia parte di una porzione dello spazio in cui f e φ_i sono monodrome.

Si consideri una superficie σ; fissato il senso positivo della normale n sarà determinato

$$\frac{d\Phi_{is}}{d\rho} = \tilde{\omega}_{is} \cos nx + \chi_{is} \cos ny + \rho_{is} \cos nz \, .$$

Ora se si prende sopra σ un sistema di coordinate curvilinee $u\,v$, tali che le direzioni u, v, n siano disposte come le x, y, z e che il quadrato dell'elemento lineare della superficie sia $ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$, avremo

$$\frac{d\Phi_{is}}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u} \, , & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial u} \, , & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} \, . \tag{5}$$

5. Ciò premesso si può passare allo studio delle operazioni di derivazione e d'integrazione. Siano F e Φ collegate fra loro nel senso riemanniano. Posto come precedentemente

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)} = p \quad , \quad \frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)} = q \quad , \quad \frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)} = r \, ;$$

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} = \tilde{\omega} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} = \rho ,$$

e preso in un punto un elemento qualunque di superficie $d\sigma$, avremo

$$\frac{\left(\dfrac{d\Phi}{d\sigma}\right)}{\left(\dfrac{d\mathrm{F}}{d\sigma}\right)} = \frac{\tilde{\omega}}{p} = \frac{\chi}{q} = \frac{\rho}{r} \, .$$

Questo rapporto indipendente da $d\sigma$ lo denoteremo col simbolo $d\Phi/d\mathrm{F}$ e col nome di *derivata di* Φ *rispetto ad F*. Essa sarà una funzione complessa dei punti dello spazio. Come proprietà fondamentale può dimostrarsi che la *derivata di* Φ *rispetto ad* F *è collegata alle due funzioni* Φ *ed* F *nel senso riemanniano*. Infatti, posto

$$\frac{d\Phi}{d\mathrm{F}} = \varphi,$$

si avrà

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\tilde\omega}{\partial x} - \varphi\frac{\partial p}{\partial x}\ ,\quad q\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial q}{\partial y}\ ,\quad r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z} - \varphi\frac{\partial r}{\partial z}$$

e quindi

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) - \varphi\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0.$$

6. Sia ora f collegata ad F e σ una superficie aperta o chiusa nello spazio in cui sono definite le due funzioni; fissata la direzione della normale n a σ è definito $d\mathrm{F}/d\sigma$ e quindi è pure definito

$$\int_\sigma f\frac{d\mathrm{F}}{d\sigma}d\sigma,$$

che rappresenteremo col simbolo

$$\int_\sigma f d\mathrm{F}.$$

Col cambiare il senso della normale cambierà il segno dell'integrale. Se σ non è chiusa, fissiamone la direzione dei contorni in modo che un osservatore, disposto nel senso positivo di uno qualunque di essi e rivolto verso la superficie, veda la direzione positiva della normale andare dalla sinistra alla destra. Con questa convenzione, quando è stabilito il senso dei contorni, è fissato il segno dell'integrale.

Si supponga σ chiusa e tale che formi da sola il contorno di uno spazio S entro il quale la f e la F non abbiano singolarità. Avremo,

$$\int_\sigma f d\mathrm{F} = \int_\sigma f\left(\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)}\cos nx + \frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)}\cos ny + \frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)}\cos nz\right)d\sigma$$

$$= \int_\mathrm{S}\left\{f\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathrm{F}}{d(y,z)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial(z,x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{d\mathrm{F}}{\partial(x,y)}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)}\right)\right\}d\mathrm{S} = 0.$$

Quindi si ha il teorema espresso dalla formula

$$\int_\sigma f d\mathrm{F} = 0\,. \tag{6}$$

Se invece di una sola superficie σ si hanno le superficie σ_i $(i = 1, 2 \cdots n)$, che limitano lo spazio S, entro il quale non sussistono singolarità per f e F, si avrà la formula

$$(6') \qquad \sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} f dF = 0$$

in cui le normali alle σ_i sono tutte prese nella direzione dall'esterno all'interno di S.

Il teorema contenuto nella formula precedente non è altro che la estensione del teorema di CAUCHY.

È noto che il prof. MORERA ha dato un teorema inverso a quello di CAUCHY [1]; esso pure può estendersi al nostro caso. Sia cioè soddisfatta la (6) per ogni superficie σ chiusa che limita uno spazio S, escluso per quelle che hanno nell'interno dei punti o delle linee singolari di f o di F: se ne potrà concludere che f e F sono collegate fra loro nel senso riemanniano. Si potrebbe stabilire la precedente condizione come definizione del collegamento riemanniano fra una funzione di linee ed una di punti.

7. Si abbia un sistema di funzioni φ_i collegate fra loro nel senso riemanniano. Prese due qualunque di esse φ_i e φ_s, se ne trovi la coniugata Φ_{is}. Si fissi il senso positivo della normale n a una superficie σ; sarà determinato il valore di $\int_\sigma \varphi_r \, d\,\Phi_{is}$, e avremo applicando la (5)

$$(7) \qquad \int_\sigma \varphi_r \, d\Phi_{is} = \int_\sigma \varphi_r \frac{d\Phi_{is}}{d\sigma} d\sigma = \int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u}, & \dfrac{\partial \varphi_s}{du} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial v}, & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

in cui u e v sono un sistema di coordinate curvilinee tali che le direzioni della terna u, v, n siano diposte come le x, y, z. Se denotiamo con d gli accrescimenti nel senso delle linee u e con δ quelli nel senso delle linee v, l'integrale precedente potrà scriversi

$$\int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i, d\varphi_s \\ \delta\varphi_i, \delta\varphi_s \end{vmatrix}.$$

Supponiamo σ chiusa e che limiti da sola uno spazio S nel quale nessuna delle funzioni abbia singolarità; in tal caso l'integrale (7) sarà nullo e quindi

$$\int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i, d\varphi_s \\ \delta\varphi_i, \delta\varphi_s \end{vmatrix} = 0$$

che è *un'altra forma sotto cui può enunciarsi il teorema precedente analogo a quello di* CAUCHY. Così pure vale anche sotto questa forma il teorema reciproco, cioè l'analogo del teorema di MORERA.

(1) « Rend. del R. Istit. Lomb. », Serie 2ª, vol. XIX, fasc. VII.

8. Si tolgano, mediante delle superficie convenienti, dal campo in cui sono definite due funzioni f e F (collegate fra loro) tutti quei punti e quelle linee in cui le due funzioni presentano delle singolarità, e per mezzo di opportune *sezioni lineari* si renda superficialmente il campo rimanente semplicemente connesso. Ciò fatto ogni superficie chiusa che potrà tracciarsi sarà contorno completo di uno spazio ove le due funzioni f e F non avranno singolarità.

Si prendano due linee L_0 e L_1 aventi ciascuna una data direzione, tali che *si possa condurre* per $-L_0$ (2) e L_1 una superficie σ (vedi *Sopra le funz. dip. da linee*, Nota II). Si determini il senso della normale a σ relativamente alle direzioni di $-L_0$ e L_1 nel modo indicato nel § 6. Sarà allora determinato

$$\int_\sigma \varphi dF. \tag{9}$$

È facile dimostrare che il valore dell'integrale precedente non dipenderà dalla superficie condotta σ, ma dipenderà solo dalle linee $-L_0$ e L_1. Infatti, condotta per le due linee un'altra superficie σ_1, avremo che l'insieme di σ e σ_1 formerà una superficie chiusa, quindi per le ipotesi fatte

$$\int_{\sigma+\sigma_1} \varphi dF = 0$$

donde la proprietà enunciata. Perciò l'integrale (9) potrà indicarsi con

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi dF.$$

Cambiando il senso della normale n cambia il segno dell'integrale (10) (vedi § 6) per conseguenza si avrà

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi dF = -\int_{L_1}^{L_0} \varphi dF.$$

Se tenendo fissa la curva L_0 si muta la L_1, l'integrale (10) potrà ritenersi come una funzione *dipendente dalla linea* L_1 e quindi potremo porre

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi dF = \Phi \,|\, [L_1] \,|.$$

La funzione Φ sarà collegata ad F nel senso riemanniano e avremo

$$\frac{d\Phi}{dF} = \varphi$$

(2) Con $-L_0$ si intende la linea L_0 presa in direzione opposta.

vale a dire le due operazioni di integrazione e di derivazione si elidono scambievolmente. Analogamente se le φ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ saranno collegate fra loro, otteremo

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi_i \begin{vmatrix} d\varphi_s, d\varphi_r \\ \delta\varphi_s, \delta\varphi_r \end{vmatrix} = \psi \mid [L_1] \mid$$

e $\psi \mid [L_1] \mid$ sarà collegata alle φ_i nel senso riemanniano.

Supponiamo che f e φ siano coniugate ad F; in questo caso avremo

$$F \mid [L_1] \mid - F \mid [L_0] \mid = \int_{L_0}^{L_1} \begin{vmatrix} df \, d\varphi \\ \delta f \, \delta\varphi \end{vmatrix}.$$

9. Le equazioni (2) che passano fra le derivate delle f_i, f_r, f_s provano che queste variabili, prese tre a tre, debbono esser legate da relazioni

$$F_{i,r,s}(f_i, f_r, f_s) = 0.$$

Reciprocamente ogni qualvolta fra le tre variabili f_i, f_r, f_s passerà una relazione $F_{i,r,s}(f_i, f_r, f_s) = 0$, ovvero sarà $f_i = \varphi(f_r, f_s)$, risulterà soddisfatta la (2) e perciò le tre variabili f_i, f_r, f_s, saranno collegate fra loro nel senso riemanniano.

Ciò prova che la teoria esposta in questa Nota e nelle due precedenti è strettamente legata allo studio delle funzioni di due variabili complesse ed ai loro integrali, onde credo che le idee brevemente accennate potranno mettere in evidenza la utilità di introdurre le funzioni dipendenti da linee nello studio delle funzioni di due variabili complesse.

Il sig. POINCARÉ in una importantissima Memoria pubblicata nel volume IX degli « Acta Mathematica » ha esteso il teorema di CAUCHY agli integrali doppî: il teorema enunciato nel § 7 coincide colla estensione del teorema di CAUCHY data dal sig. POINCARÉ. Questo teorema è stato il punto di partenza delle mie ricerche.

Una ulteriore estensione della teoria di RIEMANN alle funzioni di un numero qualunque di variabili complesse può eseguirsi senza gravi difficoltà purché le considerazioni, limitate in queste Note agli spazî a tre dimensioni, si estendano ad uno spazio ad n dimensioni, e il concetto di funzione dipendente da linee si generalizzi alle funzioni dipendenti da iperspazî immersi nello spazio ad n dimensioni.