XXI.

SULLE FUNZIONI ANALITICHE POLIDROME

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4ª, vol. IV₂, 1888₂, pp. 355–361.

1. Alle parole *funzione analitica*, *comportarsi regolarmente di una funzione nell'intorno di un punto*, *elemento di una funzione*, *valore di una funzione, in un punto*, *singolarità*, darò il significato che, seguendo WEIERSTRASS, viene oramai dato a quelle denominazioni in tutti i corsi di analisi [1].

Ammetterò pure come noto che una funzione analitica è completamente definita quando se ne conosce un elemento $p(x \mid a)$ e che ogni altro elemento si otterrà da quello dato mediante l'operazione del *prolungamento della funzione*, la quale consiste nel prendere entro il cerchio di convergenza dell'elemento iniziale un punto a_1 e formare l'elemento $p(x \mid a, a_1)$, quindi prendendo il punto a_2 entro il cerchio di convergenza del secondo elemento formare un terzo elemento $p(x \mid a, a_1, a_2)$ e così di seguito; per modo che riterrò per definizione che due elementi P, Q appartengono ad una stessa funzione analitica, quando è possibile considerarli come facenti parte di una serie finita di elementi

$$p_1(x \mid a_1) = \mathrm{P}, p_2(x \mid a_2), \cdots, p_n(x \mid a_n) = \mathrm{Q}$$

tali che il centro a_n di ciascuno di essi giaccia entro il cerchio di convergenza del precedente, e ciascun elemento sia un prolungamento del precedente.

2. Mi permetto di dare ancora alcune altre definizioni che serviranno per enunciare con semplicità i teoremi stabiliti in questa Nota.

Abbiasi una funzione analitica $f(z)$ ottenuta prolungando col metodo di WEIERSTRASS un elemento dato *senza mai escire da un cerchio* σ. Entro questo cerchio possano esistere un numero finito o anche infinito di singolarità essenziali o non essenziali. Faremo solo due ipotesi; la prima, che chiameremo la ipotesi (A), ossia la ipotesi di *monodromia* entro σ, è la seguente: *che ad uno stesso punto non possa corrispondere più che un solo elemento*. La seconda ipotesi, che chiameremo la ipotesi (B), ossia la ipotesi dell'*assenza di spazi lacunari entro* σ, è la seguente: *che preso entro* σ *un nuovo campo qualunque* σ', *entro di esso possa sempre trovarsi un elemento della funzione*.

(1) Faccio notare che nel corollario al teorema III (vedi § 8) io considero solo i valori delle funzioni analitiche nei punti nei cui intorni esse si comportano regolarmente.

Ingrandiamo ora il cerchio σ, senza mutarne il centro, finché è possibile in modo che entro esso $f(z)$ goda sempre delle proprietà (A) e (B). Chiameremo la funzione così ottenuta entro il cerchio massimo una *porzione monodroma della funzione* $f(z)$ e il cerchio stesso il *dominio di monodromia* del suo centro M relativamente a quella porzione monodroma della funzione. Il punto M potrà essere un punto singolare o meno. È evidente che, presa una funzione analitica qualunque e prolungandola finché è possibile nel piano complesso, potrà avvenire che uno stesso punto appartenga a più porzioni monodrome distinte della funzione. Ad uno stesso punto potranno quindi corrispondere più dominii di monodromia a seconda delle porzioni monodrome della funzione a cui si riferiscono. Considereremo come distinti due dominii di monodromia, anche se consistenti in due cerchi coincidenti, quando essi corrispondano a due porzioni monodrome diverse della funzione.

3. Partendo da un elemento, supponiamo di estendere finché è possibile una funzione analitica *senza mai escire da un cerchio* σ. Ammettiamo che, escluso il solo centro M di σ, al quale *non corrisponde alcun dominio di monodromia*, ad ogni altro punto corrispondano uno o più dominii di monodromia [2] i quali o taglino il contorno del campo σ, o passino pel punto M. Diremo in questo caso che è verificata la proprietà (C). Ingrandiamo ora, finché è possibile, il cerchio, mantenendone il centro in M, in modo che entro esso la proprietà (C) sia sempre verificata. Chiameremo il cerchio massimo costruito il *dominio di diramazione* del punto M e la funzione ottenuta entro di esso una *porzione di diramazione della funzione*.

Giova anche in questo caso fare una osservazione, analoga a quella fatta precedentemente, cioè che riterremo come distinti due dominii di diramazione, anche se costituiti da due cerchi coincidenti, se essi corrispondono a due *diverse porzioni di diramazione* della funzione.

4. Abbiansi due dominii α e α_1 (ciascuno dei quali sia indifferentemente o *di monodromia* o *di diramazione*) che posseggano una parte di piano a comune, ed in questa la porzione della funzione corrispondente ad α abbia un elemento a comune colla porzione della funzione corrispondente a β; diremo in questo caso che β è un prolungamento di α.

Un insieme di dominii tali che, mediante un numero finito di prolungamenti, si possa passare da uno ad un altro qualunque di essi, si dirà che formano un *insieme connesso*.

5. Un punto in quanto è centro di un certo dominio (di monodromia o di diramazione) lo chiameremo un *punto analitico*, e considereremo come *distinti* due punti analitici, anche se coincidenti, purché siano centri di due dominii distinti. In uno stesso punto dovranno dunque coincidere tanti punti analitici

(2) Vedremo che resulta necessario che ad ogni altro punto corrispondano più dominii di monodromia.

distinti, quanti saranno i dominii di monodromia e di diramazione corrispondenti a quel punto. In un punto analitico, centro di un dominio di monodromia, diremo che *la funzione si comporta in modo monodromo*, mentre chiameremo *punto regolare di diramazione* un punto analitico centro di un dominio di diramazione.

Se un punto analitico M centro del dominio α, giace nell'interno o al contorno di un dominio β, che è un prolungamento di α, diremo che *il punto analitico* M *è contenuto nell'interno o al contorno del dominio* β.

Ad ogni elemento di una funzione analitica corrisponde un certo cerchio di convergenza; se riterremo come distinti due cerchi di convergenza, corrispondenti a due elementi diversi, potremo estendere ai cerchi di convergenza le definizioni introdotte relativamente ai dominii di monodromia, e quindi senz'altro intenderemo il significato da attribuire alle parole *due cerchi di convergenza uno prolungamento dell'altro; sistema connesso di cerchi di convergenza; punto analitico contenuto in un cerchio di convergenza.*

7. Sia σ un cerchio di raggio r, tanto piccolo quanto si vuole e di centro M, situato entro il dominio di diramazione del punto regolare di diramazione M. Supponiamo che, partendo da un elemento della porzione di diramazione della funzione relativa ad un punto situato entro σ, si eseguisca la estensione della funzione senza uscire dall'interno del cerchio σ.

È facile dimostrare:

1° *che ad ogni punto del cerchio* σ *devono corrispondere più dominii di monodromia*;

2° *che se ad un punto del cerchio* σ *corrisponde un numero finito* m *di dominii di monodromia, ad ogni altro punto del cerchio stesso deve corrispondere un egual numero di dominii di monodromia, e se ad un punto del cerchio* σ *corrisponde un numero infinito di dominii di monodromia, pure lo stesso deve avvenire per tutti gli altri punti del cerchio* σ;

3° *che il numero* m (*anche per* $m = \infty$) *per uno stesso punto regolare di diramazione è indipendente dal cerchio* σ.

8. Ciò premesso, ecco quali sono i teoremi che mi propongo di dimostrare.

TEOREMA I. – *Presa una funzione analitica qualunque, prolungata col metodo di* WEIERSTRASS *finché è possibile, si potrà sempre scegliere un insieme enumerabile di dominii di monodromia fra loro connessi, tali che ogni punto analitico ove la funzione si comporta in modo monodromo sia contenuto nell'interno di uno di essi, ed ogni punto regolare di diramazione sia contenuto al contorno di alcuni di essi.*

TEOREMA. II. – *Si può sempre scegliere un insieme enumerabile di cerchi di convergenza fra loro connessi, tali che ogni punto analitico, ove la funzione si comporta regolarmente, sia contenuto nell'interno di uno almeno di essi.*

TEOREMA III. – *Ad ogni punto del piano complesso corrisponde o nessuno, o un insieme enumerabile di punti analitici in esso coincidenti.*

Corollario (3). – *Ad uno stesso punto del piano complesso corrisponde o nessuno, oppure un insieme enumerabile di valori della funzione.*

TEOREMA IV. – *In ogni parte del piano complesso, entro la quale è possibile estendere la funzione, esistono dei punti tali che in tutti i punti analitici ad essi corrispondenti, la funzione si comporta regolarmente.*

TEOREMA V. – *I punti regolari di diramazione formano un insieme enumerabile.*

9. Onde dimostrare i teoremi precedenti cominciamo dallo stabilire un lemma. Partiamo da una porzione monodroma di una funzione analitica $f(z)$ relativa al dominio di monodromia α di un punto A. Prendiamo i dominii di monodromia di tutti i punti razionali (4) interni ad α, che si ottengono prolungando il dominio α. Avremo così un insieme di cerchi che chiameremo i cerchi α_1. Presi i punti razionali interni ai cerchi α_1 costruiamo i loro domini di monodromia che si ottengono prolungando i dominii α_1. Avrmo un insieme di nuovi dominii α_2. Operando su questi, come sui dominii α_1 otterremo dei nuovi dominii α_3, e così di seguito indefinitamente.

Il lemma da dimostrare è il seguente:

L'insieme di tutti i dominii di monodromia $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \cdots$ *è un insieme enumerabile.*

Infatti, come è ben noto, i punti razionali interni ad α formeranno un insieme enumerabile, quindi potremo enumerare tutti i domini α_1 disponendoli in una serie come la seguente: $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \cdots \alpha_1^n, \cdots$

Ora i punti razionali contenuti entro α_1^n formano un insieme numerabile, e per conseguenza potremo prendere tutti questi punti disponendoli nell'ordine seguente:

$$P_1^{n,1}, P_1^{n,2}, \cdots P_1^{n,m}, \cdots$$

Consideriamo tutti i possibili punti $P_1^{n,m}$. Ad uno stesso valore della somma $m+n$ corrisponde un numero finito di punti $P_1^{n,m}$, quindi potremo ordinare i punti stessi per ordine di grandezza della somma $m+n$. I punti $P_1^{n,m}$ e per conseguenza i domini α_2 formeranno un insieme enumerabile. Nello stesso modo si ha che i domini α_3 formeranno un insieme enumerabile, e così di seguito. In generale tutti i dominii α_n si potranno disporre in una serie $\alpha_n^1, \alpha_n^2, \cdots \alpha_n^m, \cdots$

Prendiamo ora tutti i dominii α_n^m e ordiniamoli per ordine di grandezza della somma $m+n$; in tal modo potremo enumerare tutti i dominii costruiti; solamente avremo che uno stesso dominio potrà essere contato più volte, perché è evidente che un dominio che appartiene agli α_n, è ripetuto anche nei dominii $\alpha_{n'}^1$, se $n' > n$. Ma si vede immediatamente che, se percorrendo

(3) Questa proprietà è dovuta al prof. G. CANTOR, che la comunicò senza dimostrazione al dott. G. VIVANTI.

(4) Chiameremo *punto razionale* un punto $z = x + iy$ del piano complesso, quando x ed y saranno dei numeri razionali.

l'intera serie di dominii, così enumerati, si toglieranno man mano quelli che si saranno precedentemente incontrati, si otterranno enumerati tutti i dominii e ciascuno di essi verrà contato una volta sola.

Il lemma resta così dimostrato. Poiché l'insieme dei dominii α, α_1, $\alpha_2 \cdots$ è numerabile potremo ordinarli (prendendo ciascun dominio una volta sola) in una serie che indicheremo con

$$(\mathrm{I}) \equiv \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \cdots \alpha^{(p)}, \cdots$$

10. Se invece di partire da un dominio di monodromia α partiremo da un cerchio di convergenza β, è evidente che potremo ripetere le stesse operazioni fatte precedentemente sopra dei cerchi di convergenza, invece che sopra dei dominii di monodromia.

Otterremo in tal modo la serie di cerchi di convergenza β, β_1, $\beta_2 \cdots$ che (senza mai essere ripetuti) potranno disporsi in una serie enumerabile

$$(\mathrm{II}) \equiv \beta, \beta', \beta'', \cdots, \beta^{(p)}, \cdots$$

11. *Dimostrazione del Teorema I.* – La dimostrazione di questo teorema consisterà nel provare che, preso un punto analitico qualunque della funzione, ove si comporta in modo monodromo, esisterà almeno un dominio appartenente alla serie (I) che lo conterrà internamente, e che, preso un punto regolare di diramazione, esisterà un dominio della serie (I) che lo conterrà al contorno.

Infatti abbiasi il punto analitico M a cui corrisponda un dominio σ (di monodromia o di diramazione) di raggio r. Prendiamo un punto analitico in esso contenuto, distante da M meno di $r/4$, ove la funzione si comporti regolarmente. Esso sia centro di un corrispondente cerchio di convergenza Q.

Si prenda inoltre un punto analitico contenuto in α centro di un corrispondente cerchio di convergenza P. Per quanto fu detto precedentemente (Art. 1) dovrà trovarsi un sistema finito di cerchi di convergenza $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\cdots \tilde{\omega}_n$, tali che $\tilde{\omega}_1 = \mathrm{P}$, $\tilde{\omega}_n = \mathrm{Q}$ e ciascuno abbia il centro nel precedente e ne sia un prolungamento. Sia ρ_i il raggio di $\tilde{\omega}_{i_1}$, N_i il punto analitico contenuto nel suo centro, 2ε una quantità inferiore alla minima delle differenze $\rho_i - \mathrm{N}_i \mathrm{N}_{i+1}$.

Supponiamo che i punti analitici N_1, $\mathrm{N}_2 \cdots \mathrm{N}_{i_1}$ siano contenuti entro α. Si prenda nello spazio comune ai due cerchi α e $\tilde{\omega}_{i_1}$ un punto razionale M_1 distante da N_{i_1} meno di ε. Se costruiamo il dominio di monodromia di M_1, prolungando il dominio α otterremo uno dei dominii α_1 che denoteremo con α_1^*, che dovrà contenere internamente il punto analitico N_{i_1+1}. Siano ora N_{i_1+1}, $\mathrm{N}_{i_1+2}, \cdots \mathrm{N}_{i_2}$ contenuti entro α_1^*.

Prendiamo nella porzione di piano comune a $\tilde{\omega}_{i_2}$ e ad α_1^* un punto razionale M_2 distante da N_{i_2} meno di ε e costruiamo il dominio di monodromia di M_2 prolungando il dominio α_1^*. Otterremo in tal modo uno dei cerchi α_2 che denoteremo con α_2^* e che conterrà nell'interno il punto analitico N_{i_2+1}.

Supponiamo di operare sopra α_2^* come fu fatto precedentemente su α_1^* e così proseguire di seguito. Dopo un numero finito di tali operazioni giungeremo evidentemente a trovare un dominio di monodromia α_{p-1}^* il quale dovrà contenere il punto analitico N_n. Nella parte comune ad α^*_{p-1} ed a $\tilde{\omega}_n = Q$ prendiamo un punto razionale M_{p-1} distante da N_n meno di $r/4$ e formiamone il dominio di monodromia prolungando il dominio α^*_{p-1}.

Otterremo un dominio α^*_p appartenente ai dominii α_p e quindi alla serie (I), il quale, se in M la funzione si comporterà in modo monodromo, conterrà internamente il punto M, mentre, se M sarà un punto regolare di diramazione, conterrà il punto stesso al contorno.

12. *Dimostrazione del teorema II.* – Questa dimostrazione si otterrà ripetendo per i cerchi di convergenza, quello che si è detto nella dimostrazione precedente per i dominii di monodromia e considerando invece dei dominii $\alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_n, \cdots$ i dominii $\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n, \cdots$ e la corrispondente serie II.

13. *Dimostrazione del teorema III.* – Ciascuno dei punti analitici, coincidenti in un punto M del piano complesso, deve essere contenuto in un diverso dominio della serie (I), quindi i punti analitici coincidenti in M dovranno formare un insieme enumerabile.

14. *Dimostrazione del Corollario.* – Ad ogni valore della funzione in un punto deve corrispondere un punto analitico ove la funzione si comporta regolarmente. Poiché i punti analitici coincidenti in un punto formano un insieme enumerabile, così anche i valori della funzione in un punto dovranno formare un insieme enumerabile.

15. *Dimostrazione del teorema IV.* – Denotiamo con f_p la porzione monodroma della funzione analitica che si considera corrispondente al dominio α_p della serie (I).

Sia θ una parte del piano complesso entro la quale è possibile estendere la funzione analitica, e sia α_i il primo dominio che si incontra percorrendo la serie (I) entro cui giacciano dei punti interni al campo θ. Prendiamo (il che sarà sempre possibile) un cerchio θ' situato tutto internamente alla parte comune ad α_i ed a θ, tale che in tutti i punti di esso f_i si comporti regolarmente. Sia $\alpha_{i'}$ il primo dominio della serie (I) che si incontra dopo α_i che abbia una parte a comune con θ' e dentro di essa prendiamo un cerchio θ'' nel cui interno $f_{i'}$ si comporti regolarmente, e così si proceda finché è possibile.

In tal modo avremo che si prenderà dalla serie (I) una serie di dominii

$$(I') \equiv \alpha_i, \alpha_{i'}, \alpha_{i''}, \cdots$$

e che corrispondentemente otterremo una serie di cerchi $\theta', \theta'', \theta''' \cdots$ situati tutti internamente uno all'altro. Dovrà dunque esistere almeno un punto M interno a tutti i cerchi $\theta^{(p)}$ e quindi interno al campo θ. Dico che in tutti i punti analitici corrispondenti ad M, la funzione si comporterà regolarmente. Infatti:

1° nessun punto analitico corrispondente a M potrà essere un punto regolare di diramazione, perché M non giace al contorno di nessuno dei dominii della serie (I);

2° preso un punto analitico corrispondente ad M, in esso la funzione si comporterà in modo monodromo, quindi dovrà essere contenuto (pel teorema I) entro uno dei dominii della serie (I). Se questo è α_p, esso dovrà appartenere alla serie (I'), quindi f_p si dovrà comportare regolarmente in M ciò che dimostra il teorema.

16. *Dimostrazione del teorema V.* – Dal teorema I risulta che, preso un punto qualunque regolare di diramazione deve esistere un dominio α_p della serie (I) che lo contiene al contorno. Ora, preso un dominio α_p, consideriamo tutti i punti regolari di diramazione $M^{(p)}$ che esso *contiene* al contorno. Essi dovranno formare un insieme isolato. Infatti il dominio di diramazione di uno qualunque di essi separerà sulla circonferenza del cerchio α_p un arco entro il quale non potranno esistere altri punti del gruppo $M^{(p)}$. Ne segue che i punti $M^{(p)}$ formeranno un insieme enumerabile e perciò potremo prenderli tutti ordinandoli in una serie

$$M_1^{(p)}, M_2^{(p)} \dots M_q^{(p)} \dots$$

Prendiamo ora tutti i punti $M_q^{(p)}$ ed ordiniamoli secondo l'ordine di grandezza della somma $p + q$; avremo così enumerato tutti i punti regolari di diramazione.