Nota II.

Ibidem, pp. 291–299.

1. Alla fine di una Nota, che ebbi l'onore di presentare nella seduta precedente, ho accennato che nel cercare le condizioni necessarie pel collegamento di isogeneità risulta la differenza che passa fra il modo di comportarsi delle funzioni di linee nello spazio ordinario e quello delle funzioni generali negli iperspazî.

Abbiansi infatti due funzioni $F\,|\,[S_r]\,|$, $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ isogene; posto

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1\ldots i_{r+1}} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r+1}})} = \tilde{\omega}_{i_1\ldots i_{r+1}}, \tag{1}$$

dovremo avere

$$\frac{\tilde{\omega}_{i_1\ldots i_{r+1}}}{p_{i_1\ldots i_{r+1}}} = f, \tag{2}$$

ove f è una funzione dei punti dell'iperspazio totale indipendente dagli indici $i_1 \ldots i_{r+1}$. Ne segue che

$$\tilde{\omega}_{i_1\ldots i_{r+1}} = f p_{i_1\ldots i_{r+1}}, \tag{3}$$

onde

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s\, p_{i_1\ldots i_{s+1}\ldots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0. \tag{4}$$

Se ne conclude che *affinché* F *sia collegabile in modo isogeno ad altre funzioni, è necessario e sufficiente che esista un integrale comune al sistema di equazioni differenziali lineari simultanee* (4).

2. Denotiamo con $H_{i_1 i_2\ldots i_{r+2}}$ i primi membri delle equazioni (4). È facile dimostrare il teorema:

Se, oltre alle condizioni di integrabilità

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

le p soddisfano alle altre condizioni

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s\, p_{i_s h_1\ldots h_r}\, p_{i_1\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+2}} = 0, \tag{5}$$

il sistema di equazioni differenziali

$$H_{i_1 i_2\ldots i_{r+2}} = 0, \tag{6}$$

è un sistema completo.

La dimostrazione si fa osservando: 1° che se $p_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}}$ è diversa da zero, tutte le equazioni (6) sono una conseguenza delle equazioni indipendenti fra loro

$$(7) \qquad H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_1} = 0 \quad , \quad H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_2} = 0 , \cdots , H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_{n-r-1}} = 0 ,$$

in cui le $h_1, h_2, \cdots h_{n-r-1}$ sono differenti fra loro e dalle i; 2° che le funzioni alternate del POISSON

$$(H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_t} \quad , \quad H_{i_1 \cdots i_{r+1}}, h_v)$$

sono identicamente eguali a zero, cioè che il sistema (7) è Jacobiano.

Quando sono soddisfatte le (5), la funzione $F \mid [S_r] \mid$ si chiamerà *elementare*.

Il sistema (6), ovvero il sistema (7), dovrà ammettere $r+1$ integrali indipendenti

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r .$$

Ne segue che il rapporto

$$\theta = \frac{p_{i_1 \cdots i_{r+1}}}{\left[\dfrac{d(\varphi, \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})}\right]}$$

dovrà essere indipendente dagli indici $i_1 i_2 \cdots i_{r+1}$. Ora applicando la (4), dalla equazione precedente segue che

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \theta}{\partial x_{i_s}} \frac{d(\varphi, \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+1}})} = 0 .$$

θ dovrà dunque essere una funzione di $\varphi, \varphi_1 \cdots \varphi_r$, e posto $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} = 0$, avremo

$$p_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \frac{d(\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} .$$

Si ottengono quindi i teoremi:

1° *Se* $F \mid [S_r] \mid$ *è una funzione elementare, si avrà*

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{d(\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

ove $\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_r$ *sono* $r+1$ *integrali indipendenti comuni al sistema di equazioni differenziali*

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

Reciprocamente:

2° *Prese* $r+1$ *funzioni indipendenti* $\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_r$ *e posto*

$$\frac{d(\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

avremo che le $p_{i_1 \cdots i_{r+1}}$ *saranno derivate di una funzione elementare* $F \mid [S_r] \mid$.

3° *Tutte le funzioni isògene ad una funzione elementare, sono funzioni elementari.*

Applicando alle funzioni elementari il teorema che abbiamo dato come estensione di quello di STOKES (vedi Nota precedente, art. 6), otterremo per esse l'espressione analitica

$$F \mid [S_r] \mid = \int_{S_r} \varphi \frac{d(\varphi_1, \cdots \varphi_r)}{d(\omega_1\, \omega_2 \cdots \omega_r)}\, d\omega_1\, d\omega_2 \cdots d\omega_r\,,$$

essendo

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r) \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

le equazioni dell'iperspazio S_r.

Le funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_r$ si diranno *coniugate* alla F. Le funzioni elementari godono quindi della notevole proprietà di essere le sole funzioni coniugate ad un sistema di funzioni di punti, proprietà che nello spazio ordinario si verifica per tutte le funzioni di linee di primo grado.

3. Alle funzioni di primo grado negli iperspazî è applicabile una speciale operazione di *composizione* di cui daremo ora un cenno.

Si abbiano le due funzioni $F \mid [S_r] \mid$, e $\Phi \mid [S_{t-r}] \mid$ di primo grado e si ponga

$$\frac{dF}{d(x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} = p_{h_1 \cdots h_{r+1}}\,, \qquad \frac{d\Phi}{d(x_{h_{r+2}} \cdots x_{h_{t+2}})} = q_{h_{r+2} \cdots h_{t+2}}$$

$$m_{i_1 \cdots i_{t+2}} = \sum\nolimits_h p_{h_1 \cdots h_{r+1}} q_{h_{r+2} \cdots h_{t+2}} \tag{8}$$

in cui $h_1 \cdots h_{t+2}$ è una permutazione, sempre pari, di $i_1 \cdots i_{t+2}$ e Σ_h è una somma estesa a tutte le combinazioni dei $t+2$ indici $i_1 \cdots i_{t+2}$ $r+1$ a $r+1$. Ciò premesso si può dimostrare il teorema:

Esiste una funzione di primo grado $\Psi \mid [S_{t+1}] \mid$ *tale che*

$$\frac{d\Psi}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_{t+2}})} = m_{i_1 \cdots i_{t+2}}\,.$$

Per denotare che fra le derivate delle tre funzioni F, Φ, Ψ, passa la relazione (8), scriveremo

$$\Psi \equiv (F, \Phi).$$

In generale, se le $F^{(t)} \mid [S_{r_t}] \mid$ sono funzioni di primo grado, intenderemo per

$$P \equiv (F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots F^{(K)})$$

una funzione di iperspazî $S_R \left(R = \sum_1^K r_t + K - 1 \right)$ ottenuta mediante le seguenti operazioni

$$\Phi_2 \equiv (F^{(1)}, F^{(2)}), \Phi_3 \equiv (\Phi_2, F^{(3)}), \cdots P \equiv (\Phi_{K-1}, F^{(K)}).$$

Diremo che P è *composta* delle $F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots F^{(K)}$. La operazione della composizione gode evidentemente della proprietà *associativa*. La inversione degli elementi $F^{(s)}$ non potrà produrre che delle mutazioni di segno. Le $F^{(s)}$ si potranno chiamare i divisori di P, per modo che, se una funzione di iperspazî non ammette altro divisore che sé stessa, potrà dirsi *prima*. È facile riconoscere che ogni funzione di primo grado che non è prima, può decomporsi in divisori primi e questa decomposizione può effettuarsi anche in più modi. Se una funzione dividerà uno dei divisori di una funzione, dividerà la funzione stessa.

Due funzioni F *e* Φ *saranno isogene quando si abbia*

$$F \equiv (\Psi, f) \quad , \quad \Phi = (\Psi, \varphi)$$

con f e φ funzioni di punti ed f funzione di φ. Se F *e* Φ *sono isogene lo saranno pure* (F, Θ) *e* (Φ, Θ). *Una funzione elementare si potrà sempre decomporre in divisori funzioni di punti.*

4. Siano F e Φ due funzioni elementari isogene. Posto

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = a_{i_1 \cdots i_{r+1}} \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = b_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

avremo

$$(9) \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s a_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} b_{i_s h_1 \cdots h_r} = 0 .$$

Reciprocamente è facile riconoscere che, se le a e le b soddisfano alle equazioni precedenti, le due funzioni F e Φ debbono risultare elementari ed isogene. Le equazioni di condizione (9) stabiliscono dunque, per le due funzioni, qualche cosa di più che il solo legame di isogeneità fra loro. Ora le equazioni di condizione (9) possono estendersi al caso di due funzioni di iperspazî di un numero diverso di dimensioni. Si abbiano infatti le due funzioni di primo grado $F \mid [S_r] \mid, \Phi \mid [S_t] \mid$ con $r > t$. Poniamo

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = a_{i_1 \cdots i_{r+1}} \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}})} = b_{i_1 \cdots i_{t+1}}$$

e stabiliamo che

$$(10) \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s a_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} b_{i_s h_1 \cdots h_t} = 0 .$$

Nel caso che consideriamo di $r > t$, non è sempre necessaria la condizione che le due funzioni siano elementari, affinché siano soddisfatte le precedenti equazioni. Nel caso di $r > t$, diremo che le (10) ci stabiliscono le condizioni affinché F e Φ siano *isogene*.

Si può dimostrare facilmente il seguente teorema:

Ogni funzione che ammette per divisore F *è isogena a* Φ.

5. Si abbiano due funzioni di primo grado $F \mid [S_r] \mid$, $\Phi \mid [S_r] \mid$ isogene. Avremo che

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS_{r+1}} : \frac{dF}{dS_{r+1}}$$

dipenderà soltanto dal punto dello spazio in cui si sono prese le derivate. Sarà dunque φ una funzione dei punti dello spazio totale ad n dimensioni. Si denoterà φ col simbolo $d\Phi/dF$ e col nome di *derivata* di Φ rispetto ad F. Come teorema fondamentale si può dimostrare che *la derivata di* Φ *rispetto ad* F *è isogena alle due funzioni* Φ *ed* F.

Questa proposizione risulta immediatamente dalla formula (4) dell'art. 1, tenendo conto della definizione data nell'articolo precedente.

6. Sia ora f, funzione dei punti dello spazio totale, isogena alla $F \mid [S_r] \mid$. Fissata la direzione dell'iperspazio S_{r+1} sarà definito dF/dS_{r+1}, quindi sarà pure definito $\int\limits_{S_{r+2}} f \frac{dF}{\partial S_{r+1}} dS_{r+1}$. Questo integrale lo rappresenteremo col simbolo

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF .$$

Col cambiare la direzione dell'iperspazio S_{r+1} cambierà evidentemente il segno dell'integrale.

Si supponga che l'iperspazio S_{r+1} sia chiuso e tale che formi da solo il contorno di un iperspazio S_{r+1} immerso nell'iperspazio totale ed entro il quale né la f, né la F abbiano alcuna singolarità. Avremo

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = \int\limits_{S_{r+1}} f \Sigma \frac{\partial F}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} \alpha_{i_1 \dots i_{r+1}} dS_{r+1} = \int\limits_{S_{r+1}} f \Sigma p_{i_1 \dots i_{r+1}} \alpha_{i_1 \dots i_{r+1}} dS_{r+1}$$

ove le α sono i coseni di direzione dell'iperspazio S_{r+1}. Scegliendo convenientemente la direzione dell'iperspazio S_{r+2}, i cui coseni denoteremo con $\beta_{i_1 \dots i_{r+2}}$, ed applicando il teorema che abbiamo dato come estensione di quello di STOKES (vedi Nota precedente, art. 6), si otterrà

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = \int\limits_{S_{r+2}} \Sigma_i \beta_{i_1 \dots i_{r+2}} \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial (f p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}} dS_{r+2} =$$

$$= \int\limits_{S_{r+2}} \Sigma_i \beta_{i_1 \dots i_{r+2}} \Big\{ \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} +$$

$$+ f \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \Big\} dS_{r+2} .$$

E per conseguenza

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = 0. \tag{11}$$

Se invece di un solo iperspazio S_{r+1} si avranno gli iperspazî $S^{(i)}_{r+1}$ $(i = 1, 2 \cdots m)$ che limitano lo spazio S_{r+2}, entro il quale non sussistono singolarità per f e F, si avrà la formula

$$\sum_{1}^{m}{}_i \int_{S^{(i)}_{r+1}} f d\mathrm{F} = 0, \tag{12}$$

scegliendo convenientemente le direzioni degli iperspazî $S^{(i)}_{r+1}$. *Il teorema contenuto nelle due formule* (11) *e* (12) *non è altro che una estensione del teorema* di CAUCHY.

7. Mediante dei contorni convenienti si tolgano dall'iperspazio totale tutte le porzioni dell'iperspazio stesso in cui f e F hanno delle singolarità. Quindi si eseguiscano delle sezioni in modo che ogni iperspazio chiuso S_{r+1} possa esser preso come contorno completo di un iperspazio S_{r+2}. Si prendano due iperspazî S^0_r, S^1_r, tali che si possa condurre un iperspazio S_{r+1} avente i suddetti iperspazî per contorno.

Per il teorema ottenuto come estensione di quello di STOKES, avremo che certi integrali estesi all'iperspazio S_{r+1} potranno trasformarsi in integrali estesi ad S^0_r e S^1_r. Gli integrali dovranno essere estesi in modo, che, stabilita la direzione di S_{r+1}, restano determinate quelle di S^0_r e S^1_r, e reciprocamente, stabilite le direzioni di questi iperspazî, resta fissata quella di S_{r+1}.

Noi supporremo che le direzioni dei tre iperspazî S^0_r, S^1_r, S_{r+1} siano fra loro nella relazione voluta affinché sia ad essi applicabile la trasformazione di cui ora si è fatto parola. Ciò premesso risulta immediatamente dal teorema dimostrato nell'articolo precedente che

$$\int_{S_{r+1}} f d\mathrm{F}$$

non muta cambiando l'iperspazio S_{r+1}, purché si conservino inalterati gli iperspazî S^0_r, S^1_r e le loro direzioni. È perciò che l'integrale precedente si scriverà

$$\int_{S^1_r}^{S^1_r} f d\mathrm{F}, \tag{13}$$

denotando con S^2_r un iperspazio coincidente con S^0_r, ma avente opposta direzione. Si ha immediatamente la formula

$$\int_{S^2_r}^{S^1_r} f d\mathrm{F} = -\int_{S^1_r}^{S^2_r} f d\mathrm{F}.$$

Se tenendo fisso l'iperspazio S_r^2 si muta l'iperspazio S_r^1, l'integrale (13) potrà ritenersi come una funzione di primo grado di S_r^1, e quindi potremo porre

$$\int_{S_r^2}^{S_r^1} f dF = \Phi \mid [S_r^1] \mid .$$

Oltre a ciò Φ *ed* F *saranno isogene e avremo*

$$\frac{d\Phi}{dF} = f$$

vale a dire *le due operazioni di derivazione e di integrazione nel senso considerato sono reciproche l'una all'altra.*

8. Una funzione elementare di iperspazî S_r ad r dimensioni si dirà *d'ordine r*; e diremo poi che un sistema di funzioni elementari è un *sistema isogeno d'ordine p*, quando tutte le funzioni di ordine eguale o superiore a p che si ottengono dalle funzioni del sistema mediante l'operazione della composizione (vedi art. 3) sono nulle, mentre ve ne ha di quelle d'ordine $p-1$ diverse da zero. Tutte le funzioni $\Phi \mid [S_t] \mid$ del sistema dovranno dipendere da certe funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_k \cdots$ dei punti dell'iperspazio totale in modo che (vedi art. 2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}})} = \frac{d(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2} \cdots \varphi_{l_{t+1}})}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}})},$$

cioè

$$\Phi \equiv (\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2} \cdots \varphi_{l_{t+1}}).$$

Si hanno con facilità i teoremi seguenti:

1° *La condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema isogeno sia d'ordine r, è che si abbia*

$$\frac{d(\varphi_{l_1} \cdots \varphi_{l_{r+1}})}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = 0 \tag{14}$$

per ogni possibile combinazione degli indici $l_1 \cdots l_{r+1}, i_1 \cdots i_{r+1}$.

2° *Una funzione del sistema d'ordine* $r-1$ *è sempre isogena ad una altra funzione qualunque del sistema.*

3° *Ogni funzione del sistema d'ordine* $r-1$ *ammette come divisore un'altra funzione qualunque del sistema d'ordine inferiore.*

Consideriamo in particolare le funzioni di punti $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_k \cdots$; esse potranno considerarsi come funzioni appartenenti al sistema zero.

A cagione delle relazioni (14) può dedursi:

Fra le funzioni del sistema d'ordine zero debbono esisterne, r, $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$, *indipendenti, di cui tutte le altre sono funzioni*, e, reciprocamente, *ogni funzione d'ordine zero ottenuta prendendo una funzione arbitraria di quelle r indipendenti, apparterrà al sistema.*

Le $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$ potranno chiamarsi le *variabili indipendenti del sistema isogeno.*

Se dunque teniamo conto dei teoremi sopra dimostrati e di quello dell'art. 5 potremo dedurre che, se $\Phi \,|\, [S_{r-1}] \,|$, $F \,|\, [S_{r-1}] \,|$ appartengono al sistema, si ha

$$\frac{d\Phi}{dF} = \varphi(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r),$$

ove φ è una certa funzione delle r funzioni indipendenti d'ordine zero del sistema $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$.

Se f è una funzione arbitraria di $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$ avremo

$$\int_{S_r} f\,dF = 0, \tag{15}$$

ove S_r, è uno spazio chiuso che forma il contorno completo di uno spazio S_{r+1} entro il quale f e F non hanno alcuna singolarità. Se

$$F \equiv (\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)$$

la equazione precedente (15) potrà scriversi

$$\int_{S_r} f\,\frac{d(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{d(\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_r)}\, d\omega_1\, d\omega_2 \cdots d\omega_r = 0, \tag{16}$$

supponendo di porre le equazioni dell'iperspazio S_r sotto la forma

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_r).$$

Posto

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \omega_s}\, d\omega_s = d_s \varphi_t,$$

la (16) potrà porsi sotto la forma

$$\int_{S_r} F(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r) \begin{vmatrix} d_1\varphi_1, d_2\varphi_1 \cdots d_r\varphi_1 \\ d_1\varphi_2, d_2\varphi_2 \cdots d_r\varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ d_1\varphi_r, d_2\varphi_r \cdots d_r\varphi_r \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Il teorema contenuto in questa formula corrisponde al teorema che abbiamo dato come estensione di quello di CAUCHY nel caso in cui si tratti di funzioni elementari.

Se S_r non è chiuso, ma è limitato da due iperspazî S^0_{r-1} e S^1_{r-1}, dopo che si siano tolti dall'iperspazio totale i luoghi di singolarità e si siano eseguiti i tagli convenienti, di cui si è fatto cenno nell'articolo 7, avremo che l'integrale che comparisce nel primo membro delle (17) non sarà più in generale nullo. Una volta stabilite le direzioni degli ipespazî S^0_{r-1}, S^1_{r-1}, S_r nel modo indicato nell'art. 7, avremo che l'integrale stesso non dipenderà da S_r ma solo da S^0_{r-1}

e S^1_{r-1}; onde denotando, come nell'articolo citato, S^2_{r-1} un iperspazio coincidente con S^0_{r-1} ma preso in direzione contraria, potremo scrivere l'integrale precedente

$$\Phi = \int_{S^2_{r-1}}^{S^1_{r-1}} f(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n) \begin{vmatrix} d_1\varphi_1, d_2\varphi_1 \cdots d_r\varphi_1 \\ d_1 d_2, d_2\varphi_2 \cdots d_r\varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1\varphi_r, d_2\varphi_r \cdots d_r\varphi_r \end{vmatrix}.$$

Mantenendo fisso S^2_{r-1} e mutando S^1_{r-1}, avremo che Φ sarà una funzione elementare di ordine r appartenente ad un sistema isogeno d'ordine r di cui $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$ sono le variabili indipendenti.

Potremo dunque, tenendo conto dei precedenti teoremi, enunciare la proposizione:

Sia $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_m$ *un sistema di variabili indipendenti funzioni di* $x_1, x_2 \cdots x_n$ $(n > m > r)$. *Posto*

$$\Phi \mid [S_{r-1}] \mid = \int_{S^2_{r-1}}^{S^1_{r-1}} f(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r) \begin{vmatrix} d_1\varphi_1, d_2\varphi_1, \cdots d_r\varphi_1 \\ d_1\varphi_2, d_2\varphi_2, \cdots d_r\varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1\varphi_r, d_2\varphi_r, \cdots d_r\varphi_r \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{S^2_{r-1}}^{S^1_{r-1}} f(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_r,$$

avremo che Φ *apparterrà al sistema isogeno di cui* $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_m$ *sono le variabili indipendenti*, e, reciprocamente, *ogni funzione appartenente al sistema isogeno di cui* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ *sono le variabili indipendenti potrà ottenersi dalle variabili indipendenti mediante una integrazione multipla, come è indicato nella formula precedente.*

Questa proposizione rivela il legame esistente fra le funzioni di iperspazî e le funzioni di più variabili complesse indipendenti. Essa prova infatti che la integrazione multipla delle funzioni di m variabili indipendenti dà luogo ad un sistema isogeno d'ordine m tale che quelle m variabili indipendenti sono appunto le *variabili indipendenti del sistema.*