XXIV.

SULLE FUNZIONI CONIUGATE

« Rend. Accad. dei Lincei »; ser. IV, vol. V_1, 1889_1; pp. 599–611.

1. È ben noto il legame esistente fra la teoria della equazione differenziale

$$(a) \qquad \Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e la teoria delle funzioni di una variabile complessa. CAUCHY mise in evidenza una tale relazione che servì di fondamento alle ricerche di RIEMANN.

Si sa che, se si parte dalla (a), ad ogni integrale u_1 corrisponde una funzione coniugata v_1, tale che $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{\partial v_1}{\partial x}$, e se u_2 è un altro integrale della (a) e v_2 ne è la corrispondente funzione coniugata $u_1 + iv_1$ risulta una funzione *monogena* di $u_2 + iv_2$.

Ora, se da uno spazio a due dimensioni si passa ad uno a tre dimensioni, alla equazione differenziale (a) viene a corrispondere l'altra

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

La teoria di questa equazione differenziale ha preceduto quella su mentovata; anzi i metodi di GAUSS, di DIRICHLET e di GREEN relativi alla (b) hanno dato origine a quelli applicati alla (a) da RIEMANN, NEUMANN ecc. Però, nel caso dello spazio a tre dimensioni, allo studio della funzione u non venne mai collegato, in generale, lo studio di un'altra funzione coniugata. Solo nel caso dei potenziali simmetrici fu riconosciuta la esistenza di una funzione che, sotto il nome di *funzione associata*, venne elegantemente applicata dal prof. BELTRAMI in varie ricerche.

Se si passa dalle tre alle quattro e in generale alle n variabili si ottiene la equazione differenziale

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0.$$

Le ricerche fatte su di essa da BELTRAMI, KRONECKER ecc., sono state eseguite senza prendere in considerazione nessuna funzione coniugata alla u. Lo stesso si dica per gli spazi curvi: l'equazione differenziale che si ottiene annullando il parametro differenziale del 2° ordine ha dato luogo allo studio di una funzione coniugata solo nel caso in cui lo spazio curvo fosse a due dimensioni.

La teoria delle funzioni coniugate è però suscettibile di essere estesa al caso generale delle n variabili e una tale generalizzazione forma appunto il soggetto della presente ota. Nel caso di $n = 2$ essa dà la teoria ordinaria delle funzioni coniugate e nel caso dei potenziali simmetrici porta alle funzioni associate del prof. BELTRAMI.

2. Prenderò le mosse dal caso di uno spazio ordinario a tre dimensioni mediante le considerazioni seguenti.

Nell'elettromagnetismo si esaminano due elementi, cioè i poli magnetici e le correnti elettriche. Ogni polo magnetico è individuato dalla posizione di un punto dello spazio e dalla massa magnetica in esso concentrata, mentre ogni corrente elettrica è individuata da una linea chiusa che è il circuito che essa percorre e dalla intensità della corrente.

Abbiasi ora un sistema qualunque di masse magnetiche. Prendiamone il potenziale rispetto ad un polo di massa 1 e di posizione variabile nello spazio; si otterrà una funzione dei punti dello spazio tale che la sua derivata secondo una direzione qualunque sarà la componente dell'azione magnetica in quella direzione.

Analogamente, prendiamo il potenziale delle stesse masse sopra una corrente di intensità 1 il cui circuito sia una linea chiusa qualunque dello spazio. Otterremo una funzione che, secondo una denominazione che ho adottato in alcune ricerche (1), potrà chiamarsi una funzione delle linee dello spazio. Ora da un dato circuito passiamo ad un altro infinitamente prossimo deformando di infinitamente poco il circuito iniziale in prossimità di un certo punto. Una tale deformazione si potrà evidentemente ottenere facendo descrivere ad un elemento d'arco del circuito un'area piana infinitesima.

Consideriamo il rapporto della variazione del potenziale alla detta area piana infinitesima. Il limite di esso può per analogia chiamarsi la derivata della funzione di linee rispetto all'area piana considerata. Ora, come è ben noto, il rapporto al limite diviene eguale alla componente dell'azione magnetica secondo la normale all'area suddetta. Dunque il potenziale magnetico sul polo e quello sulla corrente, considerati rispettivamente come funzioni di punti e di linee dello spazio, godono della proprietà caratteristica delle funzioni coniugate; cioè adottando i simboli usati nella Nota citata per denotare le derivate delle funzioni di linee, avremo

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\sigma} = \frac{df}{dn},$$

ove F rappresenta il potenziale sulla corrente, f quello sul polo, σ l'elemento di superficie normale alla direzione n.

(1) « Atti d. R. Acc. d. Lincei », vol. III_2, fasc. 9-10. [In questo vol.: XVIII, pp. 315-328].

In particolare, prendendo un sistema di assi coordinati, avremo,

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{d(y\,,z)} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{dF}{d(z\,,x)} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{dF}{d(x\,,y)} = \dfrac{\partial f}{\partial z}\,. \end{cases}$$

Vediamo che cosa corrisponde, nel caso del piano, a ciò che venne qui esposto. Nel caso del piano al potenziale newtoniano corrisponde il potenziale logaritmico ad una corrente elettrica un *punto vorticoso* (2). Si comprende dunque perché, nel caso del piano, la funzione e la sua coniugata siano ambedue funzioni di punti.

Nel caso dei potenziali simmetrici, se ci limitiamo a considerare la F per le sole linee circolari normali all'asse di simmetria ed aventi il centro su di esso, otteniamo una funzione che dipende dai due soli parametri che individuano i detti cerchi; essa non è altro che la funzione *associata* alla funzione potenziale.

Per trattare in generale la teoria delle funzioni coniugate, noi partiremo dalla definizione seguente:

In uno spazio ad n dimensioni diremo che le due funzioni di primo grado $F\,|\,[S_{r-1}]\,|\,,\ \Phi\,|\,[S_{n-r-1}]\,|$ (3) *sono coniugate quando*

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} = \frac{d\Phi}{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}$$

essendo $i_1\cdots i_n$ *una permutazione pari dei numeri* $1\,,2\cdots n$; *ciò che rappresenteremo scrivendo* $(i_1\cdots i_n)\equiv(1\,,2\cdots n)$.

Da questa definizione risulta che, essendo S_r e S_{n-r} due iperspazii normali fra loro in un punto comune, scegliendo convenientemente le loro direzioni, si ha

$$\frac{dF}{dS_r} = \frac{d\Phi}{dS_{n-r}}\,.$$

3. Prima di procedere allo studio delle proprietà delle funzioni coniugate ed alla loro effettiva costruzione dimostreremo alcuni teoremi fondamentali sopra dei sistemi di equazioni differenziali simultanee alle derivate parziali.

TEOREMA 1°. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni differenziali simultanee*

$$(1)\qquad \sum_{1}^{r+1}{}_t\,(-1)^t\,\frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\,i_{t+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1\,i_2\cdots i_{r+1}}$$

(2) F. KLEIN, *Ueb. Riemann's Theorie d. algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, § 2.
(3) « Atti d. R. Acc. d. Lincei », vol. V_1, p. 159. [In questo vol.: XXIII, p. 404].

sia integrabile, è che si abbia

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \tag{2}$$

supponendo che le x_i siano in numero di n, $(x_1, x_2 \cdots x_n)$, e le (1) *siano ottenute per tutte le combinazioni $r+1$ a $r+1$ degli indici* $1, 2, \cdots, n$; *oltre a ciò le p e le P mutino segno per una trasposizione degli indici* [4].

Che la condizione sia necessaria risulta dall'osservare che, se sono soddisfatte le (1), si ha

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \left[\sum_{1}^{s-1}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}} \right.$$

$$\left. - \sum_{s+1}^{r+2}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}} \right] = 0.$$

Dimostriamo ora che la condizione posta è anche sufficiente.

Prendiamo $M_{h_1 h_2 \ldots h_{r-1}, n}$ arbitrarie e $M_{h_1 h_2 \ldots h_r}$ (con $h_1, h_2 \cdots h_r \gtrless n$) date da

$$\frac{\partial M_{h_1 \cdots h_r}}{\partial x_n} = (-1)^{r+1} \left\{ p_{h_1 \cdots h_r n} - \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_r n}}{\partial x_{h_s}} \right\}.$$

Otterremo in tal modo le $M_{h_1 h_2 \ldots h_r}$ determinate a meno di funzioni arbitrarie di $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$.

Ora avremo

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}}$$

$$= (-1)^{r+1} \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_{r+1} n}}{\partial x_{h_s}} = \frac{\partial p_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}}{\partial x_n},$$

onde

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}} = p_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}} + p'_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}$$

essendo $p'_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}$ una funzione di $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ soltanto. Ma in virtù delle (2), dalle equazioni precedenti si ottiene

$$\sum_{1}^{r+2} (-1)^s \frac{\partial p'_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}} = 0. \tag{2'}$$

(4) Qui, come in seguito, supporremo sempre che i vari elementi *mutino segno per una trasposizione degli indici.*

Affinché dunque si possano trovare le P che soddisfino le (1) basterà poter determinare le P′ tali che si abbia

$$(3) \qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \qquad (\text{per } i_{r+1} = n)$$

$$(1') \qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}} = p'_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}} \qquad (\text{per } h_1 h_2 \cdots h_{r+1} \gtrless n)$$

perché, se queste equazioni saranno verificate, prendendo

$$P_{h_1 \cdots h_r} = M_{h_1 \cdots h_r} + P'_{h_1 \cdots h_r}$$

risulteranno soddisfatte le (1).

Ora per soddisfare le (3) prenderemo $P'_{h_1 \cdots h_{r-1} n} = 0$, $P'_{h_1 h_2 \cdots h_r}$ funzione di $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ soltanto, e quindi basterà tener conto solo delle (1′) nelle quali non comparisce più la variabile x_n nelle funzioni incognite, e nei termini noti $p'_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}$.

La questione quindi di vedere se si possono integrare le (1) colle condizioni (2) è ricondotta a cercare se si possono integrare le equazioni analoghe (1′) colle condizioni (2′) nelle quali comparisce una variabile di meno. Si può ora ricondurre questo problema a vedere se si può integrare un sistema di equazioni analoghe alle (1′), con delle condizioni analoghe alla (2′) e in cui manchino le variabili x_n e x_{n-1}. Così procedendo si ridurrà la questione a riconoscere se possono determinarsi le $P^{(\nu)}$ $(\nu = n - r - 1)$ funzioni di $x_1 x_2 \cdots x_{r+1}$, tali che soddisfino l'unica equazione

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial P^{(\nu)}_{1,2 \cdots s-1\, s+1 \cdots r+1}}{\partial x_s} = p^{(\nu)}_{1,2 \cdots r+1}$$

essendo $p^{(\nu)}_{1,2 \cdots r+1}$ funzione soltanto di $x_1, x_2 \cdots x_{r+1}$. Ora ciò è evidentemente possibile prendendo $P^{(\nu)}_{1,2 \cdots s-1, s+1 \cdots r+1}$ arbitrariamente e determinando quindi $P^{(\nu)}_{1,2 \ldots r}$ in modo che

$$\frac{\partial P^{(\nu)}_{1,2 \cdots r}}{\partial x_{r+1}} = (-1)^{r+1} \left\{ p^{(\nu)}_{1,2 \cdots r+1} - \sum_1^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P^{(\nu)}_{1,2 \cdots s-1, s+1 \cdots r+1}}{\partial x_s} \right\}.$$

Il processo di dimostrazione che ha servito a provare il teorema, ci mostra anche che le $P_{1,2 \ldots r}$ *possono determinarsi con sole quadrature.*

Cominciamo dal dare alcune conseguenze del teorema ora dimostrato.

COROLLARIO 1°. — *Affinchè si possa porre*

$$(4) \qquad q_{i_1 \cdots i_r} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

è necessario e sufficiente che si abbia

$$(5) \qquad \sum_1^n{}_s \frac{\partial q_{i_1 \cdots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Poniamo infatti

$$\left.\begin{aligned} Q_{i_1\cdots i_{r+1}} &= P_{i_{r+2}\cdots i_n} \\ q_{i_1\cdots i_r} &= p_{i_{r+1}\cdots i_n} \end{aligned}\right. \qquad (i_1\, i_2 \cdots i_n \equiv 1\ ,\ 2 \cdots n).$$

Avremo che le (4) e (5) potranno scriversi

$$p_{i_{r+1}\cdots i_n} = (-1)^{r+1} \sum_{r+1}^{n}{}_t\, (-1)^t \frac{P_{i_{r+1}\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_t}}$$

$$\sum_r^n (-1)^s \frac{\partial p_{i_r\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

il che dimostra il teorema.

COROLLARIO 2°. – *Ogni funzione di primo grado di iperspazii* S_r *potrà esprimersi mediante un integrale multiplo esteso agli iperspazii* S_r.

Sia infatti $F \mid [S_r] \mid$ la funzione che si considera.

Poniamo

$$\frac{dF}{d\,(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1\cdots i_{r+1}}\,,$$

avremo

$$\sum_1^{r+2}{}_s\, (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \text{ [5]}$$

onde, pel teorema 1°, potremo porre

$$p_{i_1\cdots i_{r+1}} = \frac{dF}{d\,(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = \sum_1^{r+1}{}_t\, (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}}\,.$$

Ora, se S_{r+1} è un iperspazio avente per contorno S_r, si avrà [6]

$$F \mid [S_r] \mid = \int \Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_{r+1}}\, \alpha_{i_1\cdots i_{r+1}}\, dS_{r+1}\,,$$

essendo $\alpha_{i_1\cdots i_{r+1}}$ i coseni di direzione dell'iperspazio S_{r+1}. Pel teorema che abbiamo dato come estensione di quello di STOKES [7] avremo quindi

$$F \mid [S_r] \mid = \int \Sigma_i\, P_{i_1\cdots i_r}\, \beta_{i_1\cdots i_r}\, dS_r\,,$$

in cui $\beta_{i_1\cdots i_r}$ rappresentano i coseni di direzione dell'iperspazio S_r.

Reciprocamente si ha che *ogni integrale multiplo dato da una espressione come la precedente è una funzione di primo grado di iperspazii* S_r.

(5) «Atti Acc. Lincei», vol. V_1, p. 162. [In questo vol.: XXIII, p. 407].
(6) Ibid., p. 161. [In questo vol.: p. 406].
(7) Ibid., p. 162. [In questo vol.: p, 407].

Teorema 2°. - *Posto*

$$p_{i_1\cdots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}}$$

avremo

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_r i_s}}{\partial x_{i_s}} = (-1)^{r+1}\Delta^2 P_{i_1\cdots i_r} + \sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_r\, i_t}}{\partial x_{i_t}}.$$

Infatti abbiamo

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_s}} = \sum_1^n{}_s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^r{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_t}} + (-1)^{r+1}\sum_1^n{}_s \frac{\partial^2 P_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_{i_s}^2}$$

$$= (-1)^{r+1}\Delta^2 P_{i_1\cdots i_r} + \sum_1^r{}_t (-1)^t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \sum_1^n{}_s \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_s}}.$$

Teorema 3°. - *Posto*

$$q_{i_1\cdots i_r} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_r\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

avremo

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= (-1)^{r+1}\Delta^2 Q_{i_1\cdots i_{r+1}} + \sum_1^n{}_{i_{r+2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \sum_1^{r+2}{}_t (-1)^t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}}.$$

Si ponga

$$\left.\begin{aligned} q_{i_1\cdots i_r} &= p_{i_{r+1}\cdots i_n} \\ Q_{i_1\cdots i_{r+1}} &= P_{i_{r+2}\cdots i_n} \end{aligned}\right\} \quad (i_1\, i_2 \cdots i_n \equiv 1\,,\, 2 \cdots n)$$

sarà

$$p_{i_{r+1}\cdots i_n} = -\sum_{r+1}^n{}_t (-1)^{t-r} \frac{\partial P_{i_{r+1}\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_t}},$$

onde pel teorema 2°,

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_{r+2}\cdots i_n\, i_s}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= (-1)^{n+r+1}\Delta^2 P_{i_{r+2}\cdots i_n} - \sum_{r+2}^n{}_s (-1)^{s-r-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial P_{i_{r+2}\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_n\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

e per conseguenza

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = (-1)^n \sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_{r+2}\cdots i_n\, i_s}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= (-1)^{r+1}\Delta^2 P_{i_{r+2}\cdots i_n} + (-1)^{n+r}\sum_{r+2}^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial P_{i_{r+2}\cdots i_{s+1}\cdots i_n\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

$$= (-1)^{r+1}\Delta^2 Q_{i_1\cdots i_{r+1}} + \sum_1^n{}_{i_{r+2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \sum_1^{r+2}{}_t (-1)^t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}}.$$

4. Possiamo ora procedere alla costruzione effettiva delle funzioni coniugate mediante il teorema seguente:

Se le funzioni $M_{i_1 \cdots i_r}$ sono *tali che*

$$\Delta^2 M_{i_1 \cdots i_r} = 0 ,$$

e se poniamo

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^n{}_t \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = P_{i_1 \cdots i_{r-1}} , \quad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = Q_{i_1 \cdots i_{r+1}} \\ &\sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \cdots i_r} , \quad \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} = q_{i_{r+1} \cdots i_n} , \end{aligned} \right.$$

si ha:

1° *le* $p_{i_1 \cdots i_r}, q_{i_{r+1} \cdots i_n}$ *soddisfano alle condizioni di integrabilità, onde si può porre*

$$(7) \qquad p_{i_1 \cdots i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} \quad , \quad q_{i_1 \cdots i_{n-r}} = \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{n-r}})} ;$$

2° *le due funzioni* F *e* Φ *sono coniugate*.

Infatti, dal teorema primo e dal corollario 1° al teorema 1°, si deduce

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 , \qquad \sum_1^{n-r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial q_{i_1 \cdots i_{r-1} i_{s+1} \cdots i_{n-r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

il che prova che sono soddisfatte le condizioni affinché si possano stabilire le (7). Pel teorema 2° abbiamo poi

$$q_{i_{r+1} \cdots i_n} = (-1)^{r-1} \Delta^2 M_{i_1 \cdots i_r} + \sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

$$= \sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \cdots i_r}$$

il che dimostra che F e Φ sono coniugate.

5. Il teorema precedente prova la effettiva esistenza delle funzioni coniugate in ogni iperspazio; anzi, poiché se si ha

$$F = F\,|[S_{r-1}]| \text{ , deve risultare } \Phi = \Phi\,|[S_{n-r-1}]| ,$$

segue che se $n = 2\mu$, oppure $n = 2\mu + 1$, si avranno μ specie di funzioni coniugate.

Prima di passare al teorema reciproco di quello dato nel paragrafo precedente dimostriamo alcune proprietà delle funzioni coniugate.

1° *Se*

$$F\,|[S_{r-1}]| \quad , \quad \Phi\,|[S_{n-r-1}]|$$

sono coniugate, saranno funzioni coniugate

$$\Phi\,|[S_{n-r-1}]| \quad , \quad F\,|[S_{r-1}]| ,$$

se $r(n-r)$ *è pari; e saranno invece funzioni coniugate*

$$\Phi\,|[S_{n-r-1}]| \quad , \quad -F\,[S_{r-1}]| \, ,$$

se $r(n-r)$ *è dispari.*

Posto infatti

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} = p_{i_1\cdots i_r} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{n-r}})} q_{i_1\cdots i_{n-r}} \tag{8}$$

deve aversi

$$p_{i_1\cdots i_r} = q_{i_{r+1}\cdots i_n} \quad \text{se} \quad i_1 \ldots i_n \equiv 1\,,\, 2 \ldots n$$

onde, se $r(n-r)$ è pari, sarà

$$q_{i_1\cdots i_{n-r}} = p_{i_{n-r+1}\cdots i_n};$$

mentre se $r(n-r)$ è dispari sarà

$$q_{i_1\cdots i_{n-r}} = - p_{i_{n-r+1}\cdots i_n}.$$

2° *Se* F $|[S_{r-1}]|$ *e* Φ $|[S_{n-r-1}]|$ *sono coniugate e si fanno le posizioni* (8) *dovrà aversi*

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1}\, i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \\ &\sum_1^{r+1}{}_t (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_t \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{n-r-1}\, i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \\ &\sum_1^{n-r-1} (-1)^s \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{n-r-1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

$$\Delta^2 p_{i_1\cdots i_r} = 0 \quad , \quad \Delta^2 q_{i_1\cdots i_{n-r}} = 0\,. \tag{10}$$

Reciprocamente se le p soddisfaranno le (9), *avremo che esisterà una funzione* Φ *coniugata alla* F.

Le relazioni (9) e (9′) risultano immediatamente dalle condizioni di integrabilità a cui debbono soddisfare le p e le q; così pure il teorema reciproco. Per trovare le (10) osserviamo che, posto

$$0 = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{r+1}}\,,$$

pel teorema secondo, si avrà

$$0 = \sum_1^n{}_t \frac{\partial \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_r\, i_t}}{\partial x_{i_t}} = (-1)^{r+1}\Delta^2 p_{i_1\cdots i_r} + \sum_1^r (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_r\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

$$= (-1)^{r+1}\Delta^2 p_{i_1\cdots i_r}\,.$$

Analogamente si trova l'altra delle (10).

6. Possiamo ora dimostrare il teorema reciproco di quello del § 4; cioè, *se* F *e* Φ *sono due funzioni coniugate, possono sempre trovarsi le* $M_{i_1 \dots i_r}$ *da cui esse dipendono mediante le* (6) *e* (7).

Per provar ciò basterà poter risolvere la seguente questione:

Se le $p_{i_1 \dots i_r}$ *soddisfano le condizioni*

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

determinare le $M_{i_1 \dots i_r}$ *in modo che*

$$\Delta^2 M_{i_1 \dots i_r} = 0$$

$$\sum_1^n {}_s \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = P_{i_1 \cdots i_{r-1}}, \qquad \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \cdots i_r}.$$

Infatti, se si porrà

$$\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = Q_{i_1 \cdots i_{r+1}},$$

avremo

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial Q_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1 \cdots i_r}.$$

Cominciamo dal risolvere la questione precedente nei casi in cui le p abbiano un solo indice, oppure due indici.

Caso 1°. – Si abbiano le p_i che verificano le condizioni

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad -\frac{\partial p_{i_2}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p_{i_1}}{\partial x_{i_2}} = 0.$$

Esisterà una funzione P, che soddisfa alla condizione $\Delta^2 P = 0$, tale che

$$p_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}.$$

Quindi si potranno determinare le $M_1, M_2 \cdots M_n$, in modo che $\Delta^2 M_i = 0$ e

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial M_n}{\partial x_n} = P.$$

Le $M_1, M_2, \cdots M_n$ saranno in questo caso le funzioni richieste.

Caso 2°. – Sono le $p_{i,s}$ tali che

(11) $$\sum_1^n {}_s \frac{\partial p_{is}}{\partial x_s} = 0,$$ (12) $$-\frac{\partial p_{i_2 i_3}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p_{i_1 i_3}}{\partial x_{i_2}} - \frac{\partial p_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_3}} = 0.$$

Mediante le operazioni di quadratura indicate nella dimostrazione del teorema 1° potremo determinare le P'_i, in modo che

$$(13) \qquad p_{is} = \frac{\partial P'_s}{\partial x_i} + \frac{\partial P'_i}{\partial x_s}.$$

Se le funzioni arbitrarie che debbono introdursi si sceglieranno tali da soddisfare alla equazione $\Delta^2 = 0$, come debbono soddisfarvi per dato le $p_{i,s}$, otterremo le P'_i che verificheranno anche esse le equazioni differenziali

$$(13') \qquad \Delta^2 P'_i = 0.$$

Sostituendo nelle (11) avremo quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^n \frac{\partial P'_s}{\partial x_s} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n),$$

onde, essendo c una costante,

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial P'_s}{\partial x_s} = c.$$

Le (13) e (13') restano soddisfatte prendendo, invece delle P'_s, le P_s date da

$$P_s = P'_s + a_s x_s$$

essendo le a_s delle costanti arbitrarie. Ora abbiamo

$$\sum_1^n \frac{\partial P_s}{\partial x_s} = c + \sum_1^n a_s.$$

Basterà dunque scegliere le costanti a_s in modo che sia $\sum_1^n a_s = -c$, perché si abbia

$$\sum_1^n {}_s \frac{\partial P_s}{\partial x_s} = 0.$$

Pel teorema 1° potremo dunque prendere le M_{is} tali che

$$P_i = \sum_1^n {}_s \frac{\partial M_{is}}{\partial x_s}$$

e, come nel caso precedente, se sceglieremo le funzioni arbitrarie che è necessario introdurre, in modo che verifichino la condizione $\Delta^2 = 0$, otterremo le M che soddisfaranno questa equazione e quindi il problema propostoci sarà risoluto anche in questo caso.

Caso generale. - Per trattare la questione nel caso delle p con r indici supporremo di averla già risoluta nel caso delle p con $r - 2$ indici, e mostreremo che la soluzione nel caso degli r indici si può far dipendere dall'altra. Essendo dunque già sciolto il problema nel caso di $r = 1$ e di $r = 2$, potremo ritenerlo risoluto nel caso generale.

Partiamo dalle $p_{i_1 \ldots i_r}$ ed eseguiamo su di esse le operazioni di quadratura indicate nella dimostrazione del teorema 1° per trovare le $p_{i_1 \ldots i_{r-1}}$ che soddisfano le equazioni

$$\sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \cdots i_r}.$$

Se al solito si sceglieranno le funzioni arbitrarie che man mano debbono introdursi in modo da verificare la equazione $\Delta^2 = 0$, come debbono soddisfarvi per dato le $p_{i_1 \ldots i_r}$, otterremo le $P_{i_1 \ldots i_{r-1}}$ che soddisfaranno anche esse alla stessa equazione differenziale.

Poniamo

$$\sum_1^n \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{r-2} i}}{\partial x_{i_t}} = p'_{i_1 \cdots i_{r-2}},$$

troveremo

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial p'_{i_1 \cdots i_{r-3} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0$$

$$\sum_1^{r-1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r-1}}}{\partial x_{i_s}} = (-1)^{r-s} \Delta^2 P_{i_1 \cdots i_{r-1}}$$

$$+ \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \sum_1^r{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_t}} = \sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Dunque, le p' essendo con $r-2$ indici, per l'ipotesi fatta avremo che potranno trovarsi le M', tali che

$$\Delta^2 M'_{i_1 \cdots i_{r-2}} = 0$$

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial M'_{i_1 \cdots i_{r-3} i_t}}{\partial x_{i_t}} = P'_{i_1 \cdots i_{r-3}} \quad , \quad \sum_1^{r-2}{}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{i_1 \cdots {}_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r-2}}}{\partial x_{i_s}} = p'_{i_1 \cdots i_{r-2}}.$$

Poniamo

$$\sum_1^{r-1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r-1}}}{\partial x_{i_s}} = Q'_{i_1 \cdots i_{r-1}},$$

risulterà

$$\sum_1^r (-1)^s \frac{\partial Q'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = 0 \qquad \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q'_{i_1 \cdots i_{r-2} i_t}}{\partial x_{i_t}} = p'_{i_1 \cdots i_{r-2}},$$

onde, se

$$\pi_{i_1 \cdots i_{r-1}} = P_{i_1 \cdots i_{r-1}} - Q'_{i_1 \cdots i_{r-1}},$$

avremo

(14) $$\sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial \pi_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \cdots i_r}$$

(15) $$\sum_1^n{}_t \frac{\partial \pi_{i_1 \cdots i_{r-2} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0.$$

Pel corollario 1° potremo quindi, a cagione delle (15), determinare le $M_{i_1 \dots i_r}$, tali che soddisfino le equazioni

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = \pi_{i_1 \cdots i_{r-1}}$$

e se le funzioni arbitrarie che dovremo man mano introdurre le sceglieremo in modo da verificare la condizione $\Delta^2 = 0$ otterremo le M che soddisfaranno questa equazione, e la questione propostaci sarà così risoluta.

7. I teoremi che abbiamo dimostrato, facendo dipendere le funzioni coniugate da funzioni ordinarie di n variabili, ci dànno modo di interpretare le proprietà relative alle funzioni coniugate senza abbandonare le ordinarie funzioni.

In una Nota, che spero di potere presentare prossimamente, mi propongo di esporre una estensione del teorema di GREEN ed alcune altre conseguenze dei risultati ora esposti.