XXV.

SULLE FUNZIONI DI IPERSPAZÎ E SUI LORO PARAMETRI DIFFERENZIALI

« Rend. Accad. dei Lincei », ser. IV, vol. V_1, 1889_1, pp. 630–640.

1. Nella Memoria *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* (1) il prof. BELTRAMI ha esteso il teorema di GREEN al caso degli iperspazî. Questo teorema può enunciarsi nella maniera seguente:

Siano $p_1, p_2 \cdots p_n$; $p'_1, p'_2 \cdots p'_n$ delle funzioni di $x_1, x_2 \cdots x_n$ che soddisfano le relazioni

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial p'_i}{\partial x_s} = \frac{\partial p'_s}{\partial x_i} ,$$

tali cioè che si abbia $p_i = -\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$ e $p'_i = -\dfrac{\partial P'}{\partial x_i}$.

Sia S_n uno spazio ad n dimensioni entro cui le P, P', p_i, p'_i sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate. Denotiamo con S_{n-1} il contorno di S_n, con ν la normale ad S_{n-1} diretta verso l'interno di S_n. Avremo

$$\int_{S_n} \sum_1^n{}_i\, p_i p'_i \, dS_n = \int_{S_{n-1}} P \sum_1^n{}_i\, p'_i \cos(\nu x_i)\, dS_{n-1} + \int_{S_n} P \sum_1^n{}_i \frac{\partial p'_i}{\partial x_i} dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} P' \sum_1^n{}_i\, p_i \cos(\nu x_i)\, dS_{n-1} + \int_{S_n} P' \sum_1^n{}_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} dS_n .$$

Si può osservare ora che quando si passa dallo spazio a due o a tre dimensioni ad uno spazio ad n dimensioni possono ottenersi, come estensione del teorema di GREEN, oltre che il teorema citato, anche altri (di cui daremo in appresso (§ 4) l'interpretazione riferendoci alle funzioni d'iperspazî) i quali possono comprendersi nei due seguenti:

TEOREMA 1°. – *Siano* $p_{i_1 \ldots i_r}$ *e* $p'_{i_1 \ldots i_r}$ *tali che soddisfino le condizioni*

$$(1) \qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \quad , \quad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

(1) « Mem. dell'Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna », ser. 2ª, t. VIII (1868); « Opere mat. », t. II, Milano, Hoepli, 1911; pp. 74–118.

Potremo allora [2] *porre*

$$p_{i_1\cdots i_r}=\sum_1^r{}_s(-1)^s\frac{\partial P_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_r}}{\partial x_{i_s}}\quad,\quad p'_{i_1\cdots i_r}=\sum_1^r{}_s(-1)^s\frac{\partial P'_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}.$$

Se entro S_n *le* P , P′, p , p' *sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate si avrà*

$$(2)\qquad (-1)^{r-1}\int_{S_n}\Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r}\,p'_{i_1\cdots i_r}\,dS_n$$

$$=\int_{S_{n-1}}\Sigma_i\, P_{i_1\cdots i_{r-1}}\left\{\sum_1^n{}_t\, p'_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}\cos(\nu x_{i_t})\right\}dS_{n-1}+\int_{S_n}\Sigma_i\, P_{i_1\cdots i_{r-1}}\left\{\sum_1^n{}_t\frac{\partial p'_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}}{\partial x_{i_t}}\right\}dS_n$$

$$=\int_{S_{n-1}}\Sigma_i\, P'_{i_1\cdots i_{r-1}}\left\{\sum_1^n{}_t\, p_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}\cos(\nu x_{i_t})\right\}dS_{n-1}+\int_{S_n}\Sigma_i\, P'_{i_1\cdots i_{r-1}}\left\{\sum_1^n{}_t\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}}{\partial x_{i_t}}\right\}dS_n.$$

Nel caso delle p e p' con un solo indice questo teorema diviene quello precedentemente citato.

Per dimostrarlo osserviamo che

$$\int_{S_n}\Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r}\,p'_{i_1\cdots i_r}\,dS_n=\int_{S_n}\Sigma_i\, p'_{i_1\cdots i_r}\left\{\sum_1^r{}_s(-1)^s\frac{\partial P_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_r}}{\partial x_{i_s}}\right\}dS_n$$

$$=(-1)^r\int_{S_n}\Sigma_i\sum_1^n{}_i\frac{\partial P_{i_1\cdots i_{r-1}}}{\partial x_{i_t}}\,p_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}\,dS_n.$$

Mediante una integrazione per parti si otterrà quindi la formula contenuta nel teorema precedente.

TEOREMA 2°. – *Siano* $p_{i_1\cdots i_r}$, $p'_{i_1\cdots i_r}$ *tali che soddisfino le condizioni*

$$(1')\qquad \sum_1^n{}_t\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}}{\partial x_{i_t}}=0\quad,\quad \sum_1^n{}_t\frac{\partial p'_{i_1\cdots i_{r-1}i_t}}{\partial x_{i_t}}=0.$$

Potremo in tal caso porre [3]

$$p_{i_1\cdots i_r}=\sum_1^n{}_t\frac{\partial Q_{i_1\cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}}\quad,\quad p'_{i_1\cdots i_r}=\sum_1^n{}_t\frac{\partial Q'_{i_1\cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}}.$$

Se entro S_n *le* Q , Q′, p , p' *sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, si avrà*

$$(2')\qquad (-1)^r\int_{S_n}\Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r}\,p'_{i_1\cdots i_r}\,dS_n=$$

(2) Vedi il teorema 1° della Nota: *Sulle funzioni coniugate*, pubblicata nel fasc. prec. [In questo vol.: XXIV, pp. 420–432].

(3) Teorema 2° della Nota citata.

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i Q_{i_1 \cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s p'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_{n-1}$$

$$+ \int_{S_n} \Sigma_i Q_{i_1 \cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i Q'_{i_1 \cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_{n-1}$$

$$+ \int_{S_n} \Sigma_i Q'_{i_1 \cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n .$$

Ponendo infatti $p_{i_1 \cdots i_r} = q_{i_{r+1} \cdots i_n}$, questa formula risulta come conseguenza della (2).

2. Se le p e p' sono funzioni monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, saremo sicuri che le stesse proprietà valgono per le P e le P' quando il campo in cui le p e le p' sono date sia per esempio un campo T ad n dimensioni limitato fra i valori x_i^0 e x_i^1 delle x_i. Supporremo perciò nel seguito di questa Nota che *il campo* S_n *sia interno ad un tal campo* T.

Supponiamo ora che siano contemporaneamente soddisfatte le (1) e (1'), e si prendano le p eguali alle p'; otterremo

$$(3) \qquad (-1)^{r-1} \int_{S_n} \Sigma_i p^2_{i_1 \dots i_r} dS_n = \int_{S_{n-1}} \Sigma_i P_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) \right\} dS_{n-1}$$

$$= - \int_{S_{n-1}} \Sigma_i Q_{i_1 \cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_n .$$

Da questa formula segue immediatamente il teorema:

Se le $p_{i_1 \cdots i_r}$ *soddisfano le equazioni differenziali simultanee*

$$(4) \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 , \qquad \sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 ,$$

esse sono definite nello spazio S_n, *quando si conoscono al contorno i valori delle quantità*

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_t p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = a_{i_1 \cdots i_{r-1}} ,$$

oppure quando si conoscono al contorno i valori delle quantità

$$(6) \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1 \dots i_{r+1}} .$$

Infatti se le p e le p' soddisfacessero alle condizioni (4) e (5) poste per le p, si avrebbe che le $p''' = p' - p''$, oltre a verificare le (4), sarebbero tali che

$$\sum_{1}^{n}{}_t\, p'''_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = 0,$$

onde per la (3) risulterebbe

$$\int_{S_n} \Sigma_i\, p_i'''^2\, dS_n = 0$$

e quindi $p_i''' = p_i' - p_i'' = 0$. Allo stesso risultato si giungerebbe supponendo che le p' e le p'' soddisfacessero le (4) e (6).

3. Proponiamoci la questione:

Dati nello spazio S_{n-1} *i valori delle* $b_{i_1 \cdots i_{r+1}}$ *e supponendo che le* p *verifichino le equazioni*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

determinare le p *in modo che*

$$V = \frac{1}{2}\int_{S_n} \Sigma_i\, p^2_{i_1 \cdots i_r}\, dS_n$$

sia massimo o minimo.

Dovremo perciò porre

$$\delta V = \int_{S_n} \Sigma_i\, p_{i_1 \cdots i_r}\, \delta p_{i_1 \cdots i_r}\, dS_n = 0\,.$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori, a cagione delle (1), si troverà

$$0 = \int_{S_n} \Big[\Sigma_i\, p_{i_1 \cdots i_r}\, \delta p_{i_1 \cdots i_r}$$

$$+ (-1)^{r+1}\, \Sigma_i\, \lambda_{i_1 \cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial \delta p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} \Big] dS_n$$

$$= \int_{S_n} \left[\Sigma_i\, p_{i_1 \cdots i_r}\, \delta p_{i_1 \cdots i_r} + \Sigma_i \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial \delta p_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x_{i_t}} \lambda_{i_1 \cdots i_r i_t} \right] dS_n\,,$$

onde con una integrazione per parti

$$0 = \int_{S_n} \Sigma_i\, \delta p_{i_1 \cdots i_r} \left\{ p_{i_1 \cdots i_r} - \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial \lambda_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} \right\} dS_n + (-1)^r \int_{S_{n-1}} \Sigma_i\, \lambda_{i_1 \cdots i_{r+1}}\, \delta b_{i_1 \cdots i_{r+1}}\, dS_{n-1}$$

e, poiché il secondo integrale è nullo, avremo

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_1^n {}_t \frac{\partial \lambda_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} ;$$

quindi pel corollario 1° della Nota citata,

$$(1') \qquad \sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 .$$

Analogamente, *dati nello spazio* S_{n-1} *i valori delle* $a_{i_1 \cdots i_{r-1}}$, *e supponendo*

$$(1') \qquad \sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 ,$$

volendo determinare le $p_{i_1 \cdots i_r}$ *in modo che sia*

$$V = \frac{1}{2} \int_{S_n} \Sigma_i \, p^2_{i_1 \ldots i_r} \, dS_n$$

massimo o minimo, si trovano le condizioni

$$(1) \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

Si può dimostrare *che in ambedue i casi si ottiene per* V *un minimo assoluto*.

Infatti supponiamo che le p soddisfino contemporaneamente le (4), mentre le p' soddisfino le

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n {}_t \frac{\partial p'_{i_1 \ldots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \\ \displaystyle\sum_1^n {}_t \, p'_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = 0 \end{cases}$$

oppure le

$$(8) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \\ \displaystyle\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \, p'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = 0 . \end{cases}$$

Applicando le (2) o le (2'), avremo

$$(9) \qquad \int_{S_n} \Sigma_i \, (p_{i_1 \ldots i_r} + p'_{i_1 \ldots i_r})^2 \, dS_n$$

$$= \int_{S_n} \Sigma_i \, p^2_{i_1 \ldots i_r} \, dS_n + 2 \int_{S_n} \Sigma_i \, p_{i_1 \ldots i_r} \, p'_{i_1 \ldots i_r} \, dS_n + \int_{S_n} p'^2_{i_1 \ldots i_r} \, dS_n$$

$$= \int_{S_n} \Sigma_i \, p^2_{i_1 \ldots i_r} \, dS_n + \int_{S_n} \Sigma_i \, p'^2_{i_1 \ldots i_r} \, dS_n$$

il che dimostra la proposizione enunciata.

4. Passiamo ad interpretare i risultati ottenuti mediante la considerazione delle funzioni di iperspazii e delle funzioni coniugate [4].

Le (1) esprimono le condizioni di integrabilità, cioè le condizioni affinché esistano le funzioni $F\,|[S_{r-1}]|$, $F'\,|[S_{r-1}]|$, tali che

$$p_{i_1\cdots i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} \quad , \quad p'_{i_1\cdots i_r} = \frac{dF'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} .$$

Sia σ un iperspazio parallelo alle direzioni $x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}$, ν. I suoi coseni di direzione saranno

$$\alpha_{i_1\cdots i_{r-1}\,i_t} = \frac{\cos(\nu x_{i_t})}{\sqrt{\sum_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})}} ,$$

mentre tutti gli altri saranno nulli, onde

$$\frac{dF}{d\sigma} = \sum_{1}^{n}{}_t\, p_{i_1\cdots i_{r-1}\,i_t} \frac{\cos(\nu x_{i_t})}{\sqrt{\sum_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})}} = \frac{a_{i_1\cdots i_{r-1}}}{\sqrt{\sum_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})}} .$$

Rappresenteremo quindi $a_{i_1\cdots i_{r-1}}$ con

$$\sqrt{\sum_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})} \cdot \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}\,\nu)} .$$

Denotiamo con $S_{i_1\cdots i_{r+1}}$ un iperspazio ad r dimensioni normale alle direzioni ν, $x_{i_{r+2}},\cdots x_{i_n}$. Esso sarà tangente all'iperspazio S_{n-1}. I suoi coseni di direzione saranno

$$\alpha_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+1}} = (-1)^s \frac{\cos(\nu x_{i_s})}{\sqrt{\sum_{1}^{r+1}{}_s \cos^2(\nu x_{i_s})}} ,$$

mentre tutti gli altri saranno nulli; onde

$$\sqrt{\sum_{1}^{r+1}{}_s \cos^2 \nu x_{i_s}}\, \frac{dF}{dS_{i_1\cdots i_{r+1}}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s\, p_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1\cdots i_{r+1}} .$$

La formula (2) può quindi scriversi

$$(10) \qquad (-1)^{r-1}\int_{S_n} \Sigma \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} \cdot \frac{dF'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}\, dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i\, P_{i_1\cdots i_{r-1}} \frac{dF'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}\,\nu)} \sqrt{\sum_r^n \cos^2 \nu x_{i_t}}\; dS_{n-1}$$

(4) Vedi Nota precedentemente citata.

$$+\int_{S_n} \Sigma_i \, P_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF'}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})} \right\} dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i \, P'_{i_1 \cdots i_{r-1}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)} \sqrt{\sum_1^n \cos^2 \nu x_{i_t}} \, dS_{n-1}$$

$$+\int_{S_n} \Sigma_i \, P'_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})} \right\} dS_n .$$

Tenendo conto che le (4) (vedi Nota citata) sono le condizioni affinché esista una funzione Φ coniugata ad F, il teorema contenuto nel § 2 può enunciarsi nella maniera seguente: *Se* F *e* Φ *sono coniugate, basterà conoscere al contorno di* S_n *i valori delle* $\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)}$, *oppure delle* $\frac{dF}{dS_{i_1 \cdots i_{r+1}}}$, *perché le due funzioni coniugate siano determinate a meno di costanti additive.*

Osservando poi che gli iperspazî $S_{i_1 \ldots i_{r+1}}$ sono tangenti ad S_{n-1}, si ha che *basterà conoscere al contorno* S_{n-1} *i valori di* F, *perché questa sia determinata*, *e la* Φ *sia determinata a meno di una costante additiva.*

5. Le espressioni

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})}$$

hanno, nella teoria che andiamo esponendo, un ufficio analogo a quello del parametro differenziale secondo nella ordinaria teoria; come pure

$$\Sigma_i \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} \cdot \frac{dF'}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})}$$

ha l'ufficio del parametro differenziale misto.

Passiamo a trasformare le equazioni differenziali

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})} = 0 \tag{11}$$

in coordinate curvilinee qualunque. Sia

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i dx_i^2 = \Sigma_r \Sigma_s E_{rs} \, d\xi_r \, d\xi_s .$$

Dimostreremo che *le equazioni trasformate dipendono soltanto dai coefficienti* E_{rs} *del quadrato dell'elemento lineare.*

Per eseguire la trasformazione seguirò il seguente processo che mi sembra abbastanza rapido.

Se le equazioni (11) sono soddisfatte, ciò significa che esiste una funzione Φ coniugata alla F, onde, posto

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} = p_{i_1\cdots i_r} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})} = q_{i_{r+1}\cdots i_n},$$

avremo

$$p_{i_1\cdots i_r} = q_{i_{r+1}\cdots i_n}.$$

Poniamo

$$\frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})} = \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})} = \chi_{h_{r+1}\cdots h_n},$$

avremo [5]

$$(12)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} = \Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r} \dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}, \\ \chi_{h_{r+1}\cdots h_n} = \Sigma_i\, q_{i_{r+1}\, i_n} \dfrac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})} = \Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r} \dfrac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}. \end{cases}$$

Moltiplicando le ultime equazioni per $\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}$ e sommando per tutte le combinazioni degli indici $h_1, \cdots h$, si ottiene

$$\Sigma_h \frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\chi_{h_{r+1}\cdots h_n} = p_{i_1\cdots i_r}\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})},$$

onde

$$p_{i_1\cdots i_r} = \frac{1}{\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})}} \Sigma_k \frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}\chi_{k_{r+1}\cdots k_n}.$$

Sostituendo questi valori nelle (12), abbiamo

$$\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} = \frac{1}{\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})}} \Sigma_k\, \chi_{k_r\cdots k_n}\, \Sigma_i \frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\cdot\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}.$$

Ora si ha

$$\Sigma \frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\cdot\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})} = \begin{vmatrix} E_{h_1 k_1}, \cdots E_{h_1 k_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_{h_r k_1}, \cdots E_{h_r k_r} \end{vmatrix}$$

$$\left[\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})}\right]^2 = \begin{vmatrix} E_{11}\cdots E_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_{n1}\cdots E_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

Adottando per semplicità il simbolo

$$\begin{bmatrix} h_1\cdots h_r \\ k_1\cdots k_r \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} E_{h_1 k_1}\cdots E_{h_1 k_r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_{h_r k_1}\cdots E_{h_r k_r} \end{vmatrix}$$

(5) «Atti Acc. Lincei», vol. V, 1° sem., p. 162. [In questo vol.: XXIII, p. 407].

potremo scrivere

$$(14)\qquad \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} = \sqrt{D}\,\Sigma_k \begin{bmatrix} h_1\cdots h_r \\ k_1\cdots k_r \end{bmatrix} \chi_{k_{r+1}\cdots k_n}\,.$$

Analogamente si troverebbe

$$(14)\qquad \chi_{k_{r+1}\cdots k_n} = \sqrt{D}\,\Sigma_h \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_{r+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}\,.$$

Ora per le condizioni di integrabilità a cui debbono soddisfare le χ si ottiene

$$(11')\qquad \sum_r^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_k \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ k_r\cdots k_{s-1}\,,\ k_{s+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})} \right\} = 0.$$

Queste equazioni non sono altro che le trasformate delle equazioni (11).

6. Nasce ora spontaneamente il pensiero di studiare le espressioni differenziali

$$(15)\qquad \Sigma_h\,\Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_{r+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})} \cdot \frac{dF'}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}$$

$$(16)\qquad \sum_r^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ k_r\cdots k_{s-1}\,k_{s+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})} \right\} = \theta_{k_r\cdots k_n}\,,$$

nelle quali si ritengono le $F\,|\,[S_{r-1}]\,|$, $F'\,|\,[S_{r-1}]\,|$ due funzioni arbitrarie di primo grado, in relazione alla forma quadratica differenziale

$$(17)\qquad \Sigma_r\,\Sigma_s\,E_{rs}\,d\xi_r\,d\xi_s = ds^2,$$

senza che si ponga alcuna restrizione per i coefficienti E_{rs}, salvo quella di essere $E_{rs} = E_{sr}$.

Cominciamo dal dimostrare che l'espressione (15) è un invariante differenziale della forma (17).

Supponiamo infatti che sia

$$\Sigma_r\,\Sigma_s\,E_{rs}\,d\xi_r\,d\xi_s = \Sigma_r\Sigma_s\,E'_{rs}\,d\xi'_r\,d\xi'_s\,.$$

Avremo

$$\frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})} = \Sigma_l\,\frac{dF}{d(\xi'_{l_1}\cdots\xi'_{l_r})} \cdot \frac{d(\xi'_{l_1}\cdots\xi'_{l_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}$$

$$\frac{dF'}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})} = \Sigma_m\,\frac{dF'}{d(\xi'_{m_1}\cdots\xi'_{m_r})}\,\frac{d(\xi'_{m_1}\cdots\xi'_{m_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\,.$$

Onde

$$\Sigma_h\,\Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_{r+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\,\frac{dF'}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}$$

$$= \Sigma_l\,\Sigma_m\,\frac{dF}{d(\xi'_{l_1}\cdots\xi_{lr})}\,\frac{dF'}{d(\xi'_{m_1}\cdots\xi'_{m_r})}\,\Sigma_h\,\Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_{r+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \frac{d(\xi'_{l_1}\cdots\xi'_{l_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\,\frac{d(\xi'_{m_1}\cdots\xi'_{m_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}\,.$$

Ma, con un calcolo semplice, si ottiene

$$\Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \cdot \frac{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})} = \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots \cdots l_n \\ m_{r+1} \cdots m_n \end{bmatrix}',$$

mettendo un apice al simbolo analogo a quello introdotto precedentemente per denotare che ci si riferisce ai coefficienti E'_{rs} invece che ai coefficienti E_{rs}.

Quindi

$$(18) \qquad \Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \cdot \frac{dF'}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})}$$

$$= \Sigma_l \Sigma_m \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots l_n \\ m_{r+1} \cdots m_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \cdot \frac{dF'}{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})}$$

il che dimostra la proprietà invariantiva enunciata.

7. Poniamo, il che è possibile,

$$\frac{dF'}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} = \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_r}}{\partial \xi_{h_s}}$$

$$(19) \qquad \Pi'_{l_1 \cdots l_{r-1}} = \Sigma_h P'_{h_1 \cdots h_{r-1}} \frac{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_{r-1}})}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_{r-1}})}.$$

Con un calcolo facile avremo.

$$\frac{dF'}{d(\xi'_1 \cdots \xi'_{l_r})} = \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial \Pi'_{l_1 \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_r}}{\partial \xi'_{l_s}}.$$

Ciò premesso dalla (18) si deduce

$$(20) \qquad \int_{S_n} \Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{k_1 \cdots k_{s-1} k_{s+1} \cdots k_r}}{\partial \xi_{k_s}} dS_n$$

$$= \int_{S_n} \Sigma_l \Sigma_m \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots l_n \\ m_{r+1} \cdots m_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial \Pi'_{m_1 \cdots m_{s-1} m_{s+1} \cdots m_r}}{d\xi'_{m_s}} dS'_n,$$

essendo $dS_n = \sqrt{D}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$, $dS'_n = \sqrt{D'}\, d\xi'_1 \cdots d\xi'_n$.

Ora, con integrazioni per parti, l'integrale a sinistra può trasformarsi in

$$-\int_{S_n} \Sigma_k P'_{k_1 \cdots k_{r-1}} \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi'_{k_s}} \left\{ \Sigma_k \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots \cdots \cdots \cdots h_n \\ k_r \cdots k_{s-1} k_{s+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi'_{h_1} \cdots \xi'_{h_r})} \right\} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

$$= -\int_{S_n} \Sigma_k P'_{k_1 \cdots k_{r-1}} \theta_{k_r \cdots k_1}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

supponendo le P' nulle al contorno di S_n. Analogamente l'integrale del secondo membro della (20) si trasforma in

$$-\int_{S_n} \Sigma_m \Pi'_{m_1 \cdots m_{r-1}} \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi'_{m_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{D'} \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ m_r \cdots m_{s-1} m_{s+1} \cdots m_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \right\} d\xi'_1 \cdots d\xi'_n$$

$$= -\int_{S_n} \Sigma_m \Pi'_{m_1 \cdots m_{r-1}} \theta'_{m_r \cdots m_n} d\xi'_1 \cdots d\xi'_n .$$

Ne segue che

$$\int_{S_n} \Sigma_k P'_{k_1 \cdots k_{r-1}} \theta_{k_r \cdots k_n} d\xi_1 \cdots d\xi_n = \int_{S_n} \Sigma_m \Pi'_{m_1 \cdots m_{r-1}} \theta'_{m_r \cdots m_n} d\xi'_1 \cdots d\xi'_n .$$

Possiamo sostituire nella precedente equazione alle Π' i loro valori (19), e poiché le P' sono funzioni arbitrarie, così avremo

$$\theta_{k_r \cdots k_n} = \frac{1}{\frac{(d\,\xi_1 \cdots \xi_n)}{d(\xi'_1 \cdots \xi'_n)}} \left\{ \Sigma_m \frac{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_{r-1}})}{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_{r-1}})} \theta'_{m_1 \cdots m_n} \right\} = \Sigma_m \frac{d(\xi'_{m_r} \cdots \xi'_{m_n})}{d(\xi_{k_r} \cdots \xi_{k_n})} \theta'_{m_r \cdots m_n} .$$

Ora può porsi

$$\theta_{k_r \cdots k_n} = \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{d\xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ k_r \cdots k_{s+1} k_{s+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} = \frac{d\Psi}{d(\xi_{k_r} \cdots \xi_{k_n})} \right.,$$

quindi per la formula precedente, avremo

$$\theta'_{m_r \cdots m_n} = \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi'_{m_s}} \left\{ \Sigma_l \sqrt{D'} \begin{bmatrix} m_r \cdots m_{s-1} m_{s+1} \cdots m_n \\ l_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots l_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} = \frac{d\Psi}{d(\xi'_{m_r} \cdots \xi'_{m_n})} \right. .$$

La funzione $\Psi\,|[S_{n-r}]|$ gode dunque, rispetto alla forma quadratica differenziale (17), delle seguenti proprietà:

1° *Le sue derivate si esprimono mediante le derivate della* F *ed i coefficienti della forma differenziale* (17);

2° *l'espressione, mediante questi elementi, delle derivate non muta forma per un cambiamento qualunque delle variabili.*

8. Chiuderò questa Nota accennando che può risolversi completamente il problema della integrazione del sistema di equazioni differenziali (4) quando si conoscono al contorno i valori delle a, oppure delle b, nel caso in cui lo spazio S_n sia uno spazio sferico. È chiaro che questa questione comprende come caso particolare gli ordinari problemi sull'integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 = 0$.