XXVIII.

SOPRA UNA ESTENSIONE DELLA TEORIA JACOBI-HAMILTON DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4, vol. VI_1, 1890_1; pp. 127-138.

Le Memorie di HAMILTON pubblicate nelle *Philosophical Transactions* della Società reale di Londra negli anni 1834 e 1835 furono il punto di partenza di una serie di ricerche che figurano fra gli studi più belli fatti nel nostro secolo nel campo dell'analisi e della meccanica. Si deve a JACOBI di aver generalizzato e modificato i risultati di HAMILTON in modo da renderne palese la importanza e la fecondità. Il teorema fondamentale da principio limitato alle questioni della dinamica venne da JACOBI stesso esteso al caso dei problemi isoperimetrici in cui le derivate della funzione incognita compariscono sotto all'integrale soltanto fino al primo ordine [1]. In seguito CLEBSCH [2] dimostrò che il procedimento tenuto da JACOBI era applicabile alla questione generale dell'annullare la variazione prima di un integrale semplice con più funzioni incognite, mentre fra queste funzioni sussistono delle relazioni differenziali; questione alla quale può ricondursi ogni problema del calcolo delle variazioni relativo ad integrazioni semplici.

Nessun tentativo è stato fatto, che io sappia, per estendere la teoria JACOBI-HAMILTON al caso in cui si abbia da annullare la variazione prima degli integrali multipli. Allorché ci si propone una tale generalizzazione si incontra subito una difficoltà. Accennerò in poche parole in che cosa essa consista. Il procedimento JACOBI-HAMILTON si fonda sull'esame dell'integrale semplice (di cui si vuole annullare la variazione) considerato come funzione dei suoi limiti e dei valori assegnati ad arbitrio alle funzioni incognite nei limiti stessi. È una tale funzione (la funzione caratteristica) che soddisfa alle equazioni differenziali a derivate parziali scoperte da HAMILTON e che fornisce gli integrali del problema mediante operazioni di derivazione. Se si passa dagli integrali semplici al caso degli integrali doppi, invece dei due limiti dell'integrale, abbiamo una o più *linee* che formano il contorno del campo di integrazione e lungo queste debbono darsi i *valori arbitrarii* delle funzioni incognite. Quindi in questo caso non è più possibile ottenere una *funzione ordinaria* analoga alla *funzione caratteristica* di HAMILTON.

(1) JACOBI, *Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.* « Giornale di Crelle », T. 17.

(2) *Ueber diejenigen Probleme der Variations-Rechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten.* « Giornale di Crelle », T. 55.

Peraltro la difficoltà a cui abbiamo ora accennato può superarsi. In alcune Note che ebbi l'onore di presentare a cotesta Accademia ho mostrato come per alcune ricerche fosse utile introdurre delle funzioni che, invece di dipendere come le ordinarie funzioni dai punti dello spazio, dipendessero da linee, e in generale come potessero considerarsi delle quantità dipendenti da tutti i valori di una o più funzioni in dati intervalli.

Ora nella questione sopra esaminata si presenta spontaneamente il pensiero di costruire un elemento analogo alla funzione caratteristica ricorrendo all'impiego della nuova specie di funzioni ora ricordata. In questo modo si trova che la teoria JACOBI–HAMILTON è suscettibile di essere estesa agli integrali multipli. Una tale generalizzazione ha formato il soggetto di alcune mie ricerche delle quali mi permetto di presentare un saggio nella presente Nota.

1. In questa Nota però, oltre al non escire dal caso degli integrali doppî, mi limiterò a considerare quei problemi del calcolo delle variazioni in cui si tratta di annullare la variazione prima di un integrale

$$\mathrm{I} = \int\!\!\int \mathrm{U}\, du\, dv,$$

in cui U è una funzione di $x_1, x_2 \cdots x_n$, di u e v, e dei determinanti

$$\frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)},$$

essendo $x_1 \cdots x_n$ le funzioni incognite di u e v.

Questa classe di problemi relativi agli integrali doppî si avvicina a quella dei problemi degli isoperimetri.

Vediamo sotto che forma possono mettersi le equazioni differenziali del problema. Posto

$$\frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \xi_{is},$$

avremo

$$\delta\mathrm{I} = \int\!\!\int \left(\Sigma \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_{is}} \delta\xi_{is} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i} \delta x_i \right) du\, dv = 0$$

onde, supponendo nulle le variazioni dx_i ai limiti, con integrazioni per parti si trova

$$(1) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i} - \sum_1^n{}_h \frac{d\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_{ih}}, x_h\right)}{d(u, v)} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Poniamo

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_{ih}} = p_{ih}, \qquad p_{i,i} = 0,$$

avremo

$$\sum_1^n{}_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}.$$

Sia ora

$$H = -U + \Sigma p_{ih} \xi_{ih}.$$

Supponiamo che le (2) possano risolversi rispetto alla ξ_{ih}. Troveremo queste quantità espresse mediante le $x_1 \cdots x_n$, le p_{ih}, la u e la v. Sostituendo tali valori in H otterremo

$$H = H(x_1 \cdots x_n, p_{ih} \cdots u, v),$$

onde variando, col supporre u e v costanti,

$$\delta H = -\sum \frac{\partial U}{\partial \xi_{ih}} \delta \xi_{ih} - \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \sum p_{ih} \delta \xi_{ih} + \sum \xi_{ih} \delta p_{ih}$$

$$= -\sum_1^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \sum \xi_{ih} \delta p_{ih}$$

ossia

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} = \xi_{ih}.$$

Al sistema di equazioni (1) può quindi sostituirsi l'altro

$$\text{(I)} \qquad \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} \quad , \quad \sum_1^n{}_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

il quale ha una forma perfettamente analoga alla forma canonica data da HAMILTON alle equazioni della dinamica.

Consideriamo ora il sistema (I) di equazioni differenziali, in cui H è una funzione qualunque delle p_{ih}, delle $x_1, x_2 \cdots x_n$, di u e di v. Si può facilmente provare il teorema reciproco di quello ora dimostrato, cioè che le equazioni (I) possono farsi dipendere sempre da un problema di calcolo delle variazioni. Si consideri infatti

$$J = \iint \left(\Sigma p_{ih} \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} - H \right) du\, dv.$$

Affinché sia $\delta J = 0$, supponendo nulle le dx_i ai limiti, debbono aversi le equazioni (I).

2. Nello studio che ora faremo partiremo dal sistema (I) supponendo che le variabili x_i siano in numero di *tre*. Ammettiamo che il sistema (I) sia tale che le funzioni incognite siano definite quando si conoscano i valori delle x_1, x_2, x_3 al contorno di un campo $\mathfrak{S}$ in cui si suppongono variabili le u e v. Il campo $\mathfrak{S}$ nel piano u, v sia limitato da m linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$. L'equazione di ciascuna di esse $\mathfrak{L}_i$ consideriamola sotto la forma

$$u = f_i(t_i) \quad , \quad v = \varphi_i(t_i) \quad , \quad T_i \geq t_i \geq 0$$

e denotiamo i valori di x_1, x_2, x_3 assegnati lungo la $\mathfrak{L}_i$ con $\psi_i(t_i)$, $\chi_i(t_i)$, $\theta_i(t_i)$. Queste funzioni, insieme colle f_i e φ_i supponiamole continue, periodiche col periodo T_i e generalmente derivabili. Ammettiamo che i detti elementi siano *elementi caratteristici* delle funzioni incognite, almeno finché le linee $\mathfrak{L}_i$ e i valori arbitrarî assegnati alle x al contorno restano compresi entro certi limiti.

Vediamo in tale ipotesi come possono considerarsi gli integrali del problema.

Ciascuno di essi: 1° sarà una funzione delle variabili u, v; 2° dipenderà dalle funzioni $f_i(t_i)$, $\varphi_i(t_i)$, $\psi_i(t_i)$, $\chi_i(t_i)$, $\theta_i(t_i)$ (3).

Consideriamo uno spazio a cinque dimensioni i cui punti si riferiscono alle coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ed in esso le linee Λ_i aventi per equazione

$$y_1 = f_i(t_i) \quad , \quad y_2 = \varphi_i(t_i) \quad , \quad y_3 = \psi_i(t_i) \quad , \quad y_4 = \chi_i(t_i) \quad , \quad y_5 = \theta_i(t_i).$$

Gli integrali delle (I) potranno ritenersi come quantità dipendenti dalle linee $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m$ e dai due parametri u e v, cioè adottando delle notazioni usate già in altra occasione, potremo scrivere

$$(4) \quad x_i = x_i \,|\, [\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m, u, v] \,| \qquad (4') \quad p_{ih} = p_{ih} \,|\, [\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m, u, v] \,|.$$

In uno spazio a tre dimensioni, i cui punti abbiano per coordinate x_1, x_2, x_3, consideriamo le linee L_i aventi per equazioni

$$x_1 = \psi_i(t_i) \quad , \quad x_2 = \chi_i(t_i) \quad , \quad x_3 = \theta_i(t_i).$$

È facile riconoscere che gli integrali delle (I) non possono ritenersi come dipendenti separatamente dalle linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$, $L_1, L_2 \cdots L_m$, e dai parametri u e v (4).

3. Ciò premesso in

$$(II) \qquad V = \iint_S \left[\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H\right] du\, dv$$

sostituiamo in luogo delle x_i e delle p_{ih} le (4) e (4'). Denotiamo con W la V dopo eseguita la sostituzione. Avremo evidentemente

$$W = W \,|\, [\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m] \,|.$$

Da ciò segue che se diamo alle linee $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m$ degli spostamenti infinitesimi, ossia se variamo di infinitamente poco le funzioni $f_s(t_s)$, $\varphi_s(t_s)$, $\psi_s(t_s)$, $\chi_s(t_s)$, $\theta_s(t_s)$, avremo che la variazione di W sarà espressa da

$$(5) \qquad \delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\Lambda_s} \{ (W'_{y_1})_s \,\delta f_s + (W'_{y_2})_s \,\delta\varphi_s + (W'_{y_3})_s \,\delta\psi_s$$
$$+ (W'_{y_4})_s \,\delta\chi_s + (W'_{y_5})_s \,\delta\theta_s \} \, dt_s$$

(3) «Rendiconti R. Acc. d. Lincei», vol. III, fasc. 4° [In questo vol.: XVII, pp. 294-314].

(4) Perchè ciò fosse bisognerebbe che le x_i e p_{ih} si mantenessero inalterate spostando una qualunque L_i lungo sè stessa e conservando inalterata la corrispondente $\mathfrak{L}_i$.

in cui W'_{y_i} è indipendente dalle $\delta f_s \cdots \delta\theta_s$ ed è ciò che abbiamo chiamato *la derivata di* W *rispetto ad* y_i *relativamente a* Λ_i (5).

Siccome spostando le Λ_s lungo loro stesse la W non deve cambiare, così dovremo avere

$$(6) \quad (W'_{y_1})_s \frac{df_s}{dt_s} + (W'_{y_2})_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} + (W'_{y_3})_s \frac{d\Psi_s}{dt_s} + (W'_{y_4})_s \frac{d\chi_s}{dt_s} + (W'_{y_5})_s \frac{d\theta_s}{dt_s} = 0 .$$

Si supponga ora di mutare di infinitamente poco le funzioni $\psi_i(t_i)$, $\chi_i(t_i)$, $\theta_i(t_i)$, lasciando inalterate le $f_i(t_i)$, $\varphi_i(t_i)$, cioè mantenendo inalterate le $\mathfrak{L}_i$.

Otterremo in tale ipotesi

$$\delta W = \iint\limits_S \left\{ \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} \delta p_{ih} + \Sigma\, \delta \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} \delta p_{ih} - \Sigma \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i \right\} du\, dv$$

$$= \iint\limits_S \left\{ \Sigma\, \delta \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - \Sigma_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i \right\} du\, dv ,$$

ovvero a cagione delle (I)

$$\delta W = \iint\limits_S \left\{ \Sigma\, \delta \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} p_{ih} + \Sigma_i \Sigma_h \frac{d(p_{ih} x_h)}{d(u, v)} \delta x_i \right\} du\, dv$$

da cui segue, con un calcolo che non presenta difficoltà

$$\delta W = \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} , \frac{\partial x_h}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \frac{\partial x_i}{\partial u} , \frac{\partial x_h}{\partial u} \end{vmatrix} \right\} du\, dv$$

$$= \sum_1^m{}_s \int\limits_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} , \frac{\partial x_h}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial t_s} + \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \frac{\partial x_i}{\partial u} , \frac{\partial x_h}{\partial u} \end{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_s} \right\} dt_s$$

onde finalmente

$$(7) \quad \delta W = \sum_1^m{}_s \int\limits_{\mathfrak{L}_s} \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \frac{\partial x_i}{\partial t_s} , \frac{\partial x_h}{\partial t_s} \end{vmatrix} dt_s .$$

Cerchiamo il significato dei determinanti

$$\begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \frac{\partial x_i}{\partial t_s} , \frac{\partial x_h}{\partial t_s} \end{vmatrix} dt_s = \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ dx_i , dx_h \end{vmatrix}_s = \Delta_{ih}^{(s)} .$$

A tal fine osserviamo che per lo spostamento infinitesimo dato a ciascun punto della curva L_s, ogni elemento dL_s d'arco della curva stessa descrive un area infinitesima $d\sigma_s$. Denotiamo con n_s la normale a quest'area; le proiezioni di $d\sigma_s$ sui piani coordinati $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ saranno rispettivamente

$$d\sigma_s \cos(n_s x_1) \quad , \quad d\sigma_s \cos(n_s x_2) \quad , \quad d\sigma_s \cos(n_s x_3).$$

(5) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, p. 160 [in questo vol.: XXIII, p. 405].

Ma, essendo $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ le componenti dello spostamento secondo gli assi coordinati, e dx_1, dx_2, dx_3 le componenti di dL_s, avremo che le proiezioni di $d\sigma_s$ sui piani coordinati saranno date anche da $\Delta_{23}^{(s)}, \Delta_{31}^{(s)}, \Delta_{12}^{(s)}$; quindi avremo

$$\begin{vmatrix} \delta x_2, \delta x_3 \\ dx_2, dx_3 \end{vmatrix}_s = d\sigma_s \cos(n_s x_1), \quad \begin{vmatrix} \delta x_3, \delta x_1 \\ dx_3, dx_1 \end{vmatrix}_s = d\sigma_s \cos(n_s x_2),$$

$$\begin{vmatrix} \delta x_1, \delta x_2 \\ dx_1, dx_2 \end{vmatrix}_s = d\sigma_s \cos(n_s x_3).$$

La formula (7) potrà quindi scriversi

$$\text{(III)} \qquad \delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} (p_{23} \cos n_s x_1 + p_{31} \cos n_s x_2 + p_{12} \cos n_s x_3)\, d\sigma_s .$$

5. Riprendiamo la formula (7). Essa può scriversi

$$\delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \delta x_1 \begin{vmatrix} p_{12}, & p_{31} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial t_s}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_s} \end{vmatrix} + \delta x_2 \begin{vmatrix} p_{23}, & p_{12} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_s}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial t_s} \end{vmatrix} + \delta x_3 \begin{vmatrix} p_{31}, & p_{23} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_s}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_s} \end{vmatrix} \right\} dt_s$$

$$= \sum_1^m \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \delta\psi_s \begin{vmatrix} p_{12}, & p_{31} \\ \dfrac{d\theta_s}{dt_s}, & \dfrac{d\chi_s}{dt_s} \end{vmatrix} + \delta\chi_s \begin{vmatrix} p_{23}, & p_{12} \\ \dfrac{d\psi_s}{dt_s}, & \dfrac{d\theta_s}{dt_v} \end{vmatrix} + \delta\theta_s \begin{vmatrix} p_{31}, & p_{23} \\ \dfrac{d\chi_s}{dt_s}, & \dfrac{d\psi_s}{dt_s} \end{vmatrix} \right\} dt_s .$$

Se confrontiamo questa formula colla (5) si trova

$$\text{(8)} \qquad (W'_{y_3})_s = \begin{vmatrix} p_{12}, & p_{31} \\ \dfrac{d\theta_s}{dt_s}, & \dfrac{d\chi_s}{dt_s} \end{vmatrix}, \quad (W'_{y_4})_s = \begin{vmatrix} p_{23}, & p_{12} \\ \dfrac{d\psi_s}{dt_s}, & \dfrac{d\theta_s}{dt_s} \end{vmatrix}, \quad (W'_{y_5})_s = \begin{vmatrix} p_{31}, & p_{23} \\ \dfrac{d\chi_s}{dt_s}, & \dfrac{d\psi_s}{dt_s} \end{vmatrix}$$

onde

$$\text{(9)} \qquad (W'_{y_3})_s = \frac{d\psi_s}{dt_s} + (W'_{y_4})_s \frac{\delta\chi_s}{dt_s} + (W'_{y_5})_s \frac{d\theta_s}{dt_s} = 0$$

e per conseguenza, a cagione della (6),

$$\text{(9')} \qquad (W'_{y_1})_s \frac{df_s}{dt_s} + (W'_{y_2})_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} = 0.$$

Le due precedenti equazioni dimostrano che se spostiamo le linee L_s e $\mathfrak{L}_s$ lungo loro stesse ed indipendentemente l'una dall'altra la W non cambia. Questo risultato conduce ad enunciare il teorema seguente:

La W *è una quantità che dipende separatamente dalle linee* $L_1, L_2 \cdots L_m$, $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$. *Potremo quindi scrivere, adottando i noti simboli,*

$$W = W \,|\, [L_1, L_2 \cdots L_m, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m] \,| .$$

La W non è una funzione di primo grado delle linee L_s, ma se prendiamo la formula (III), si vede immediatamente che, estendendo una notazione già usata in altra occasione [6], potremo scrivere

$$(16) \quad (p_{23})_s = \left(\frac{dW}{d(x_2, x_3)}\right)_s, \quad (p_{31})_s = \left(\frac{dW}{d(x_3, x_1)}\right)_s, \quad (p_{12})_s = \left(\frac{dW}{d(x_1, x_2)}\right)_s$$

in cui $(p_{23})_s$, $(p_{31})_s$, $(p_{12})_s$ denotano i valori delle p_{23}, p_{31}, p_{12} per i valori di u e v lungo la linea $\mathfrak{L}_s$.

Se nella (5) facciamo $\delta\psi_s = \delta\chi_s = \delta\theta_s = 0$, avremo

$$(11) \qquad \delta W = \sum_1^m{}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \{ (W'_{y_1})_s\, \delta f_s + (W'_{y_2})_s\, \delta\varphi_s \}\, dt_s .$$

Dalla (6) segue

$$(12) \qquad \frac{(W'_{y_1})_s}{\left(\dfrac{d\varphi_s}{dt_s}\right)} = - \frac{(W'_{y_2})_s}{\left(\dfrac{df_s}{dt_s}\right)} .$$

Chiamando questo rapporto M_s, avremo che la (11) potrà scriversi

$$\delta W = \sum_1^m{}_s \int_{\mathfrak{L}_s} M_s \begin{vmatrix} \delta f_s, & \delta\varphi_s \\ \dfrac{df_s}{dt_s}, & \dfrac{d\varphi_s}{dt_s} \end{vmatrix} dt_s = \sum_1^m{}_s \int_{\mathfrak{L}_s} M_s\, d\tau_s ,$$

in cui $d\tau_s$ denota l'elemento d'area descritta dall'elemento $d\mathfrak{L}_s$ per lo spostamento infinitesimo della curva $\mathfrak{L}_s$. Potremo quindi scrivere, adottando una notazione analoga a quella precedentemente impiegata,

$$(13) \qquad M_s = \left(\frac{dW}{d(u, v)}\right)_s .$$

6. Se si suppongono integrate le equazioni (I) si ottengono le x_1, x_2, x_3 espresse come funzioni di u e v per tutti i valori di queste variabili nel campo $\mathfrak{S}$. Tali funzioni

$$x_1 = x_1(u, v) \quad , \quad x_2 = x_2(u, v) \quad , \quad x_3 = x_3(u, v)$$

definiscono una superficie contenuta nello spazio (x_1, x_2, x_3) che chiameremo S, per modo che ad ogni punto del pezzo di piano $\mathfrak{S}$ corrisponderà un punto della superfice S e così ad una linea qualunque $\mathfrak{G}$ contenuta in $\mathfrak{S}$ corrisponderà una linea G contenuta in S. Chiameremo G una linea *corrispondente* a $\mathfrak{G}$. In particolare alle linee contorno $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$ di $\mathfrak{S}$ corrisponderanno le linee $L_1, L_2 \cdots L_m$ che formano il contorno di S.

Si varino ora le linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$ e si mutino contemporaneamente le $L_1, L_2 \cdots L_m$ in modo che la superficie S mutando pure di grandezza non cambi di posizione nello spazio, vale a dire mutiamo le $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$ e scegliamo per $L_1, L_2 \cdots L_m$ le linee corrispondenti sopra S a queste linee va-

(6) Vedi *Acta Mathematica*. vol. XII, p. 247 [in questo vol.: XXII, p. 373]; « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, p. 161 [in questo vol.: XXIII, p. 406].

riate. A tal fine, se diamo alle f_s e φ_s le variazioni δf_s e $\delta\varphi_s$, bisognerà dare alle ψ_s, χ_s, θ_s le variazioni

$$\delta\psi_s = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)_s \delta f_s + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_s \delta\varphi_s \quad , \quad \delta\chi_s = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)_s \delta f_s + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_s \delta\varphi_s ,$$

$$\delta\theta_s = \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)_s \delta f_s + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)_s \delta\varphi_s$$

in cui le derivate parziali di x_1, x_2, x_3 rispetto ad u e v sono ricavate dalle (4) ed i loro valori sono presi nei punti del contorno $\mathfrak{L}_s$.

Da queste relazioni, applicando le (5) e (8), segue che la variazione che subìsce W risulterà

$$\delta' W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \left[(W_{y_1})_s - \begin{vmatrix} p_{23}, p_{31}, p_{12} \\ \frac{\partial\psi_s}{\partial t_s}, \frac{\partial\chi_s}{\partial t_s}, \frac{\partial\theta_s}{\partial t_s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{vmatrix} \right] \delta f_s + \left[(W_{y_2})_s - \begin{vmatrix} p_{23}, p_{31}, p_{12} \\ \frac{\partial\psi_s}{\partial t_s}, \frac{\partial\chi_s}{\partial t_s}, \frac{\partial\theta_s}{\partial t_s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right] \delta\varphi_s \right\} dt_s .$$

Ma

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial t_s} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t_s} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{d f_s}{d t_s} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{d\varphi_s}{d t_s}$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial t_s} = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t_s} = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial f_s}{\partial t_s} + \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{d\varphi_s}{d t_s}$$

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t_s} = \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t_s} = \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial f_s}{\partial t_s} + \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{d\varphi_s}{d t_s}$$

quindi

$$\delta' W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ M_s + \begin{vmatrix} p_{23}, p_{31}, p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\} \left(\delta f_s \frac{d\varphi_s}{d t_s} - \delta\varphi_s \frac{d f_s}{d t_s} \right) dt_s$$

$$= \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ M_s + \begin{vmatrix} p_{23}, p_{31}, p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\} d\tau_s$$

in cui M_s rappresenta il rapporto (13) e $d\tau_s$ è l'area infinitesima descritta dall'elemento $d\mathfrak{L}_s$ durante lo spostamento infinitesimo della curva $\mathfrak{L}_s$.

Ma dalla (II) si ricava immediatamente

$$\delta' W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left[\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ip}} p_{ih} - H \right] d\tau_s ,$$

quindi, poichè le deformazioni delle curve $\mathfrak{L}_s$ sono arbitrarie, avremo

$$M_s + \begin{vmatrix} p_{23}, p_{31}, p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H$$

ovvero, tenendo conto delle prime fra le relazioni (I),

$$M_s + \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H$$

d'onde finalmente

$$M_s + H = 0 \qquad (s = 1, 2 \cdots m).$$

7. Osserviamo ora che a cagione delle (10) e (13) le equazioni precedenti si possono scrivere

$$\text{(IV)} \qquad 0 = \left(\frac{dW}{d(u,v)}\right)_s + H\left(\left(\frac{\partial W}{\partial(x_2,x_3)}\right)_s, \left(\frac{\partial W}{\partial(x_3,x_1)}\right)_s, \left(\frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}\right)_s, x_1, x_2, x_3, u, v\right)$$

in cui si è sostituito in H in luogo delle p_{23}, p_{31}, p_{12} i loro valori dati dalle (10) e la s ha i valori $1, 2 \cdots m$.

Si ha dunque che W considerato come dipendente dalle linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots \mathfrak{L}_m$, $L_1, L_2, \cdots L_m$ deve soddisfare alle m relazioni differenziali precedenti che sono perfettamente analoghe alle equazioni a derivate parziali alle quali si giunge nella ordinaria teoria delle equazioni differenziali poste sotto la forma canonica (7).

8. La funzione W di linee che in tal modo è stata ottenuta non è in generale una funzione di primo grado. Si supponga ora H indipendente da u e da v; potremo dimostrare il teorema:

Noti gli integrali delle equazioni differenziali

$$\text{(I')} \qquad \frac{d(x_i, x_s)}{d(u,v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{is}} \quad , \quad \Sigma \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u,v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

si potrà determinare una funzione di primo grado W, *la quale soddisfa la relazione*

$$\text{(IV')} \qquad H\left(\frac{\partial W}{\partial(x_2,x_3)}, \frac{\partial W}{\partial(x_3,x_1)}, \frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) + h = 0$$

in cui h è una costante, e le derivate della funzione W *sono sostituite alle p in* H.

Premetteremo il seguente lemma:

Gli integrali delle equazioni (I') *soddisfano la condizione*

$$H = \text{cost.}$$

Abbiamo infatti

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{is}} \frac{\partial p_{is}}{\partial u} + \Sigma_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} = \Sigma \frac{d(x_i, x_s)}{d(u,v)} \frac{\partial p_{is}}{\partial u} - \Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial(p_{ih}, x_h)}{\partial(u,v)} \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0.$$

Analogamente si trova $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$, il che dimostra il lemma.

Supponiamo di avere trovato gli integrali

$$\text{(14)} \qquad x_i = x_i(u, v, C, C_1) \qquad\qquad \text{(14')} \qquad p_{is} = p_{is}(u, v, C, C_1)$$

(7) Vedi lezioni di dinamica di JACOBI. Lezione 19.

delle equazioni (I′). Sostituendoli in H, questa si ridurrà eguale ad una costante h, onde avremo

$$H(p_{23}, p_{31}, p_{12}, x_1, x_2, x_3) = \varphi(C, C_1) = h.$$

Risolviamo l'equazione precedente rispetto a C_1 e sostituiamo il valore che si ottiene nelle (14) e (14′). Avremo

(15) $x_i = x_i(u, v, C, h)$ (15′) $p_{is} = p_{is}(u, v, C, h)$.

Supponiamo che

$$(16) \qquad \frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(C, u, v)} \gtrless 0.$$

Risolvendo le (15) rispetto ad u, v, C e sostituendo i valori che si ottengono nelle (15′), otterremo

$$(17) \qquad p_{is} = p_{is}(x_1, x_2, x_3, h).$$

Poniamo questi valori in H e denotiamo questa funzione, dopo eseguita la sostituzione, con H′. Avremo $H' = H'(x_1, x_2, x_3, C, h)$.

Se in luogo di x_1, x_2, x_3 poniamo i valori (15) la H′ deve ridursi identicamente eguale ad h, quindi

$$\Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial C} = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0$$

da cui segue, per la (16) $\frac{\partial H'}{\partial x_i} = 0$, onde deve aversi identicamente

$$(18) \qquad H' = h.$$

Sostenendo le (17) nelle (I′) si trova

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = \Sigma_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = \Sigma_h \Sigma_s \frac{\partial p_{ih}}{\partial x_s} \frac{d(x_s, x_h)}{d(u, v)} = \Sigma_h \Sigma_s \frac{\partial p_{ih}}{\partial x_s} \frac{\partial H}{\partial p_{sh}}$$

quindi

$$\frac{\partial H}{\partial p_{23}} \left(\frac{\partial p_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{13}} \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0.$$

Ma essendo $H' = h$, avremo

$$\frac{\partial H}{\partial p_{23}} \frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{31}} \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

da cui segue

$$\frac{\partial H}{\partial p_{23}} \left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Analogamente si avrebbe

$$\frac{\partial H}{\partial p_{31}} \left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{12}} \left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} \right) = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} = 0.$$

Esisterà dunque una funzione di linee W di primo grado, di cui le derivate sono le p_{23}, p_{31}, p_{12} e che a cagione della (18) soddisferà la condizione (IV').

9. Passiamo ora a dimostrare la proposizione reciproca:

Sia W *una funzione di primo grado di linee nello spazio* x_1, x_2, x_3 che *soddisfa la equazione*

$$\text{(IV'')} \qquad H\left(\frac{\partial W}{\partial(x_2, x_3)}, \frac{\partial W}{\partial(x_3, x_1)}, \frac{\partial W}{\partial(x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) = h$$

in cui h è una costante. Pongasi

$$\frac{\partial W}{\partial(x_2, x_3)} = p_{23}, \qquad \frac{\partial W}{\partial(x_3, x_1)} = p_{31}, \qquad \frac{\partial W}{\partial(x_1, x_2)} = p_{12}.$$

Se sostituendo i detti valori nelle equazioni

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{is}},$$

queste sono compatibili, allora saranno suddisfatte anche le equazioni

$$\text{(I}_2\text{)} \qquad \Sigma_h \frac{\partial(p_{ih}, x_h)}{\partial(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Oltre a ciò potremo dimostrare:

Se W *dipende da un parametro costante a, posto* $W' = \frac{\partial W}{\partial a}$, $W'' = \frac{\partial W}{\partial h}$, W' *e* W'' *saranno due funzioni di linee* L *nello spazio* x_1, x_2, x_3. *Spostando la linea* L *sopra una qualunque delle superficie*

$$(19) \qquad x_1 = x_1(u, v), \qquad x_2 = x_2(u, v), \qquad x_3 = x_3(u, v)$$

che si ottiene integrando le (I₁), *avremo*

$$(20) \quad W' \,|\, [L] \,| = \frac{\partial W}{\partial a} = a', \qquad (20') \quad W'' \,|\, [L] \,| = \frac{\partial W}{\partial h} = \iint_\sigma du\, dv + h',$$

essendo σ *la porzione della superficie* (19) *racchiusa entro la linea* L *ed essendo* a' *e* h' *due costanti.*

Infatti, sostituendo gli integrali (19) delle (I₁) nelle p_{ih}, avremo

$$\Sigma_h \frac{\partial(p_{ih}, x_h)}{\partial(u, v)} = \Sigma_h \Sigma_r \frac{\partial p_{ih}}{\partial x_r} \frac{d(x_r, x_h)}{d(u, v)} = \Sigma\Sigma \frac{d(x_r, x_h)}{d(u, v)} \left(\frac{\partial p_{ih}}{\partial x_r} + \frac{\partial p_{ri}}{\partial x_h}\right) = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{rh}} \frac{\partial p_{rh}}{\partial x_i}.$$

Ma siccome si ha H = cost., sarà

$$\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{rh}} \frac{\partial p_{rh}}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

onde

$$\Sigma_h \frac{\partial (p_{ih}, x_h)}{\partial (u, v)} = - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}.$$

Per dimostrare le (20) e (20′), consideriamo due linee $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ appartenenti alla superficie (19) fra le quali sia racchiusa una porzione σ' della superficie stessa. Per una nota formula [8] avremo

$$\mathrm{W}' |[\mathfrak{L}_1]| - \mathrm{W}' |[\mathfrak{L}_2]| = \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial (x_2, x_3)} \cos n x_1 + \frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial (x_3, x_1)} \cos n x_2 + \frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial (x_1, x_2)} \cos n x_3 \right) d\sigma,$$

$$\mathrm{W}'' |[\mathfrak{L}_1]| - \mathrm{W}'' |[\mathfrak{L}_2]| = \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial \mathrm{W}''}{\partial (x_2, x_3)} \cos n x_1 + \frac{\partial \mathrm{W}''}{\partial (x_3, x_1)} \cos n x_2 + \frac{\partial \mathrm{W}''}{\partial (x_1, x_2)} \cos n x_3 \right) d\sigma,$$

essendo n la normale a σ'. Quindi

$$\mathrm{W}' \,|\, [\mathfrak{L}_1] \,| - \mathrm{W}' \,|\, [\mathfrak{L}_2] \,| = \int_{\sigma'} \Sigma \frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial (x_i, x_s)} \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} \, du \, dv$$

$$= \int_{\sigma'} \Sigma \frac{d\mathrm{H}}{\partial p_{is}} \frac{\partial p_{is}}{\partial a} \, du \, dv = \int_{\sigma'} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a} \, du \, dv = 0$$

$$\mathrm{W}'' \,|\, [\mathfrak{L}_1] \,| - \mathrm{W}'' \,|\, [\mathfrak{L}_2] \,| = \int_{\sigma'} \Sigma \frac{\partial \mathrm{W}''}{\partial (x_i, x_s)} \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} \, du \, dv$$

$$= \int_{\sigma'} \Sigma \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{is}} \frac{\partial p_{is}}{\partial h} \, du \, dv = \int_{\sigma'} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial h} \, du \, dv = \int_{\sigma'} du \, dv.$$

10. Se $\mathrm{H} = 1/2 \, (p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2)$, le equazioni (I) si riferiscono al problema delle superficie d'area minima. In questo caso la formola (III) dà luogo ad un ben noto teorema di GAUSS. Interpretiamo i teoremi dei § 8 e 9.

Abbiasi un sistema doppiamente infinito di linee. Tutte quelle che partono dai punti del contorno di un'area infinitesima costituiscono un piccolo tubo che si può chiamare un *filetto*.

Il teorema del § 8 può enunciarsi nel modo seguente.

Le traiettorie ortogonali di un sistema di superficie d'area minima formano un sistema di filetti a sezione costante.

Il teorema del § 9 dà luogo alla proposizione.

Se un sistema di filetti a sezione costante ammette delle superficie ortogonali, queste sono superficie d'area minima.

Questi due teoremi furono dati dal prof. PADOVA nella sua Nota *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* [9].

(8) Vedi « Rend. Acc. Lincei », vol. III, 2º sem., p. 277 [in questo vol.: XVIII, p. 324].
(9) « Rend. Acc. Lincei », vol. IV, p. 373.