XXXII.

SOPRA LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA ELETTRODINAMICA

« Rend. Lincei », ser. 4, vol. VII_1, 1891_1, pp. 177-188.

In una recente pubblicazione HERTZ [1] ha ricavato le leggi note della elettrostatica, del magnetismo e della elettrodinamica nel caso dei corpi in quiete da un sistema di equazioni differenziali. Ci si può ora proporre il problema analitico di studiare quelle questioni del calcolo delle variazioni che possono dare origine alle dette equazioni. In tal modo i problemi della elettricità e del magnetismo si ridurranno a *rendere stazionario* un integrale definito, come appunto avviene per quelli della meccanica che dipendono dal principio dell'azione stazionaria. In questa Nota mi propongo di esaminare sotto questo aspetto le equazioni di HERTZ.

Possono ottenersi varie questioni del calcolo delle variazioni che in casi particolari conducono alle equazioni di HERTZ. Nel § 3 ne è considerata una che conduce alle equazioni stesse nel caso il più generale. È evidente che in ciascun caso potranno stabilirsi dei teoremi analoghi ai noti teoremi di GREEN e del prof. BETTI, giacché questo può farsi in ogni questione di calcolo delle variazioni [2] e potranno applicarsi i noti procedimenti impiegati per varie classi di equazioni lineari alle derivate parziali provenienti da problemi di calcolo delle variazioni. Di ciò spero potermi occupare in un'altra comunicazione.

Faccio osservare per ultimo che in ogni questione fisica la determinazione del potenziale cinetico [3] è subordinata alla ricerca della dipendenza delle equazioni relative alla questione stessa da un problema di calcolo delle variazioni. Ottenuto il potenziale cinetico, una sua decomposizione in due termini (la cui differenza è l'energia del sistema) uno dei quali omogeneo e del 2° grado rispetto alle derivate prime (prese relativamente al tempo) dei parametri che individuano lo stato del sistema, l'altro indipendente dalle derivate stesse, dà una interpretazione meccanica della questione, perché la collega a delle equazioni differenziali aventi la forma data da LAGRANGE alle equazioni della dinamica. Se in tal modo si giunge a trovare che la questione

(1) Nachrichten von der k. Ges. zu Göttingen, 19 März 1890.

(2) Vedi in questi « Rendiconti » (1890) la mia Nota sul calcolo delle variazioni [in questo vol. XXVII, pp. 454-463].

(3) HELMHOLTZ, *Ueb. die phys. Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung*. Crelle, Bd. 100.

comporta una interpretazione meccanica essa, come osserva acutamente il POINCARÉ, è suscettibile di averne infinite altre (4).

Perciò non ho approfondito nessuna di quelle che discendono immediatamente dalle questioni di calcolo delle variazioni considerate in questa Nota.

§ 1.

1. Siano $f_1 \cdots f_m$, m funzioni delle variabili $x_1 \cdots x_n$. Poniamo

$$f_i^{(s)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}$$

e consideriamo la funzione

$$F(f_1 \cdots f_m, f_1^{(1)} \cdots f_i^{(s)} \cdots x_1 \cdots x_n).$$

È facile dimostrare il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni differenziali che provengono dall'annullare la variazione prima di

$$V = \int F \, dx_1 \cdots dx_n$$

siano del primo ordine è che si abbia

$$F = F_0 + \Sigma_i \Sigma_h F_i^{(h)} f_i^{(h)} + \Sigma_i \Sigma_h F_{i_1 i_2}^{h_1 h_2} \frac{d(f_{i_1}, f_{i_2})}{d(x_{h_1}, x_{h_2})} + \cdots + F_{i_1 \cdots i_r}^{h_1 \cdots h_r} \frac{d(f_{i_1} \cdots f_{i_r})}{d(x_{h_1} \cdots x_{h_r})}$$

essendo le

$$F_0, F_i^{(h)}, F_{i_1 i_2}^{h_1 h_2} \cdots$$

funzioni delle $f_1 \cdots f_m$ e delle $x_1 \cdots x_m$ soltanto, le quali mutano segno per una trasposizione degli indici o degli apici.

Nella ipotesi che F abbia la detta forma, le equazioni differenziali a cui dà luogo il problema di calcolo delle variazioni divengono

$$0 = \frac{\partial F_0}{\partial f_i} - \Sigma_h \frac{\partial F_i^{(h)}}{\partial x_h} + \Sigma_r \Sigma_h \left\{ \frac{\partial F_r^h}{\partial f_i} - \frac{\partial F_i^h}{\partial f_r} - \Sigma_s \frac{\partial F_{ir}^{sh}}{\partial x_s} \right\} f_r^{(h)} +$$

$$\cdots + \Sigma_r \Sigma_h \left(\frac{\partial F_{r_1 r_2}^{h_1 h_2}}{\partial f_i} + \frac{\partial F_{r_2 i}^{h_1 h_2}}{\partial f_{r_1}} + \frac{\partial F_{i r_1}^{h_1 h_2}}{\partial f_{r_2}} - \Sigma_s \frac{\partial F_{i r_1 r_2}^{s h_1 h_2}}{\partial x_s} \right) \frac{d(f_{r_1}, f_{r_2})}{d(x_{h_1}, x_{h_2})} + \cdots$$

2. Si supponga ora che le variabili indipendenti siano t, x_1, x_2, x_3, e le funzioni incognite siano $X_1, X_2, X_3, L_1, L_2, L_3$. Prendiamo

$$F = F_0 + \Sigma_i F_i^0 \frac{\partial X_i}{\partial t} + \Sigma_i \varphi_i^0 \frac{\partial L_i}{\partial t} + \Sigma_i \Sigma_h F_i^{(h)} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} + \Sigma_i \Sigma_h \varphi_i^{(h)} \frac{\partial L_i}{\partial x_h}$$

supponendo $F_0, F_i^0, \varphi_i^0, F_i^{(h)}, \varphi_i^{(h)}$ funzioni delle X_r, L_r, x_r, t.

(4) POINCARÉ, *Electricité et Optique*, pp. XIV, XV.

Cerchiamo le condizioni affinché le equazioni che si ottengono in questo caso siano soddisfatte dalle relazioni di HERTZ:

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_{r,r}\frac{\partial X_r}{\partial t}+\lambda_{r,r+1}\frac{\partial X_{r+1}}{\partial t}+\lambda_{r,r+2}\frac{\partial X_{r+2}}{\partial t}=\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\\ &\qquad+\nu_{r,r}X_r+\nu_{r,r+1}X_{r+1}+\nu_{r,r+2}X_{r+2},\\ &\mu_{r,r}\frac{\partial L_r}{\partial t}+\mu_{r,r+1}\frac{\partial L_{r+1}}{\partial t}+\mu_{r,r+2}\frac{\partial L_{r+2}}{\partial t}=\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}},\end{aligned}\right.$$

$$(\lambda_{s,r}=\lambda_{r,s}\quad,\quad \mu_{r,s}=\mu_{s,r}\quad,\quad \nu_{r,s}=\nu_{s,r})\ ^{(5)}$$

ammettendo le $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$, $\nu_{r,s}$ funzioni finite e continue insieme alle loro derivate in tutto lo spazio ed indipendenti dalla variabile t.

Le condizioni necessarie e sufficienti risultano

$$(1)\qquad \frac{\lambda_{r,s}}{a}=\frac{\mu_{r,s}}{b}=\frac{\nu_{r,s}}{c}=a_{rs}$$

essendo a, b, c tre coefficienti costanti. Si ottiene poi

$$F=\left\{\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,X_r\frac{\partial L_h}{\partial t}-\frac{1}{2b}\Sigma_r\,X_r\left(\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2a}\Sigma_r\,L_r\left(\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right\}e^{-\frac{c}{a}t}+\psi,$$

in cui ψ denota una somma di derivate di funzioni arbitrarie, prese rispetto alle variabili t, x_1, x_2, x_3. Questa somma può togliersi da F senza alterare la questione di calcolo delle variazioni che si considera.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Nel caso in cui sono soddisfatte le equazioni di condizione (1), *le equazioni* (I) *possono ricavarsi dall'annullare la variazione prima dell'integrale*

$$W=\int_{t_0}^{t}\int_S\left\{\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,X_r\frac{\partial L_h}{\partial t}-\frac{1}{2b}\Sigma_r\,X_r\left(\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2a}\Sigma_r\,L_r\left(\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right\}e^{-\frac{c}{a}t}\,dS\,dt$$

ammettendo nulle le variazioni delle L_s *ai limiti* t_0 *e* t, *supponendo che* S *rappresenti tutto lo spazio e le* X_r *e* L_r *siano infinitesimi del* 2° *ordine a distanza infinita.*

Se si ammettono soddisfatte le equazioni (I) la espressione di W può mettersi sotto la forma

$$W=e^{-\frac{c}{a}t}\int_S\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}(X_r\,L_h)_t\,dS-e^{-\frac{c}{a}t_0}\int_S\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}(X_r\,L_h)_{t_0}\,dS$$

denotando con l'indice t e con l'indice t_0 i valori delle quantità X_r, L_r prese rispettivamente pei valori t e t_0 della variabile t (ai tempi t e t_0).

(5) Due indici r, s, tali che $r \equiv s \bmod 3$ si ritengono equivalenti.

3. È facile pervenire ad un teorema analogo a quello di GREEN. Denotiamo con X'_i, L'_i e con X''_i, L''_i due sistemi di integrali delle equazioni (I). Si ha

$$\int_{t_0}^{t}\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, X'_h\, e^{-\frac{c}{a}t} \frac{\partial L''_r}{\partial t}\, dS\, dt = \int_{t_0}^{t}\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, X''_r\, e^{-\frac{c}{a}t} \frac{\partial L'_r}{\partial t}\, dS\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, L''_r \frac{\partial \left(X'_h e^{-\frac{c}{a}t}\right)}{\partial t}\, dS\, dt = \int_{t_0}^{t}\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, L'_r \frac{\partial \left(X''_h e^{-\frac{c}{a}t}\right)}{\partial t}\, dS\, dt$$

onde sommando

$$e^{-\frac{c}{a}t}\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, (X'_h L''_r - X''_h L'_r)_t\, dS = e^{-\frac{c}{a}t_0}\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, (X'_h L''_r - X''_h L'_r)_{t_0}\, dS$$

ovvero

$$\int_S \Sigma_r\, \Sigma_h\, a_{r,h}\, (X'_h L''_r - X''_h L'_r)\, dS = C e^{\frac{c}{a}t}$$

denotando con C una costante.

§ 2.

1. Supponiamo che delle relazioni (1) sia soddisfatta la

$$\frac{\lambda_{r,s}}{a} = \frac{\nu_{r,s}}{c} \tag{2}$$

soltanto.

In tale ipotesi le equazioni (I) potranno scriversi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_{r,r} e^{-\frac{c}{a}t}\right) X_r + \left(\lambda_{r,r+1} e^{-\frac{c}{a}t}\right) X_{r+1} + \left(\lambda_{r,r+2} e^{-\frac{c}{a}t}\right) X_{r+2}\right]$$
$$= \frac{\partial\left(e^{-\frac{c}{a}t} L_{r+1}\right)}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial\left(e^{-\frac{c}{a}t} L_{r+2}\right)}{\partial x_{r+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\mu_{r,r} e^{\frac{c}{a}t}\right)\left(e^{-\frac{c}{a}t} L_r\right) + \left(\mu_{r,r+1} e^{\frac{c}{a}t}\right)\left(e^{-\frac{c}{a}t} L_{r+1}\right) + \left(\mu_{r,r+2} e^{\frac{c}{a}t}\right)\left(e^{-\frac{c}{a}t} L_{r+2}\right)\right]$$
$$= \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}};$$

essi quindi assumono la stessa forma come nel caso in cui le $\nu_{r,s}$ sono nulle.

Noi considereremo in questo paragrafo le equazioni differenziali

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_{r,r} X_r + \lambda_{r,r+1} X_{r+1} + \lambda_{r,r+2} X_{r+2}\right] = \dfrac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \dfrac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\mu_{r,r} L_r + \mu_{r,r+1} L_{r+1} + \mu_{r,r+2} L_{r+2}\right] = \dfrac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \dfrac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \end{cases}$$

tenendo presente che nel caso in cui le $\nu_{r,s}$ sono nulle (mezzo coibente) le $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$ rappresentano i coefficienti delle equazioni di HERTZ, mentre nel caso in cui le ν_{rs} sono diverse da zero (mezzo conduttore) essendo però soddisfatte le (2), le $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$ rappresentano i coefficienti stessi moltiplicati rispettivamente per gli esponenziali $e^{-\frac{c}{a}t}$, $e^{\frac{c}{a}t}$. Partendo dalla ipotesi che i coefficienti delle equazioni di HERTZ siano tali che le forme quadratiche

$$\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} a_r a_s \quad , \quad \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} a_r a_s$$

siano positive, la stessa proprietà sussisterà anche prendendo le λ_{rs} e μ_{rs} eguali ai detti coefficienti per gli esponenziali $e^{-\frac{c}{a}t}$, $e^{\frac{c}{a}t}$.

2. Si ponga

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r} + X'_r$$

$$L_r = \frac{\partial V}{\partial x_r} + L'_r$$

le (I′) diverranno

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s) = \frac{\partial L'_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L'_{r+2}}{\partial x_{r+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \mu_{r,s} L'_s) = \frac{\partial X'_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X'_{r+1}}{\partial x_{r+2}}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} L'_s\right\} = 0.$$

Integrando avremo

$$\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s} + \Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s = e$$

$$\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s} + \Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} L'_s = \varepsilon$$

essendo e ed ε delle costanti rispetto alla variabile t.

Ammesso di prendere queste due quantità funzioni finite e continue dei punti dello spazio e tali che all'infinito divengano infinitesime del terzo ordine, mentre le λ_{rs} e μ_{rs} si conservano sempre finite, prendiamo U e V in modo che risulti

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s} = e \\ &\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s} = \varepsilon . \end{aligned}\right.$$

Potremo allora porre

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s = \frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \\ &\Sigma_s \mu_{r,s} L'_s = \frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \end{aligned}\right.$$

e se le X'_r, L'_r saranno all'infinito infinitesime del 2° ordine, potremo prendere le U_r, V_r infinitesime del 1° ordine all'infinito.

Poniamo

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} \\ \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33} \end{vmatrix} = D \quad , \quad \begin{vmatrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23} \\ \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Lambda_{rs} = \frac{\partial \log D}{\partial \lambda_{r,s}} \quad , \quad M_{rs} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \mu_{r,s}}$$

avremo

$$(5) \qquad \begin{cases} X'_r = \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\dfrac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \dfrac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) \\ L'_r = \Sigma_s M_{r,s}\left(\dfrac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \dfrac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right). \end{cases}$$

Essendo e ed ε indipendenti da t, λ_{rs} e μ_{rs} pure indipendenti da t, o uguali a delle quantità indipendenti da t moltiplicate per gli esponenziali $e^{-\frac{c}{a}t}, e^{\frac{c}{a}t}$, dalle equazioni (3) si deduce

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial V}{\partial x_s} = 0;$$

quindi alle equazioni (I') potremo sostituire le altre

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\Sigma_s M_{r+2,s}\left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\Sigma_s M_{r+1,s}\left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right)$$

$$(6') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\Sigma_s \Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\Sigma_s \Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right)$$

insieme alle equazioni (3). Poste le equazioni sotto questa forma esse si possono dedurre subito da un problema di calcolo delle variazioni.

Le (3) infatti possono ricavarsi, come è ben noto, dal rendere minimi

$$P = \int_S \left\{\frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_r}\frac{\partial U}{\partial x_s} + Ue\right\} dS$$

$$Q = \int_S \left\{\frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial V}{\partial x_r}\frac{\partial V}{\partial x_s} + Ve\right\} dS$$

mentre le (6) (6') possono dedursi invece dall'annullare la variazione prima di

$$\int_{t_0}^{t} (F + T)\, dt,$$

essendo

$$F = -\int_S \left\{ \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s} \left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right\} dS$$

$$T = \int_S \left\{ \Sigma_r \frac{\partial V_r}{\partial t} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \right\} dS$$

col supporre le variazioni di V_r nulle ai tempi estremi t_0 e t.

Ne segue che potremo ricavare le equazioni differenziali (3), (6), (6') col rendere stazionario

$$\int_{t_0}^{t} R_{\alpha,\beta,\gamma}\, dt,$$

essendo

$$\text{(II)} \qquad R_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha P + \beta Q + \gamma (F + T)$$

ed $\alpha, \beta; \gamma$ dei coefficienti costanti arbitrarî.

3. Abbiamo evidentemente

$$-F = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right.$$

$$\left. + \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s} \left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right\} dS$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \{ \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_r X'_s + \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} L'_r L'_s \} dS.$$

Se supponiamo soddisfatte le (3) si ha

$$P = -\frac{1}{2} \int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s} dS$$

$$Q = -\frac{1}{2} \int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} dS.$$

Abbiamo poi

$$\int_S \Sigma_r \frac{\partial U}{\partial x_r} \Sigma_s (\lambda_{r,s} X'_s)\, dS = \int_S \Sigma_r \frac{\partial U}{\partial x_r} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) dS = 0$$

$$\int_S \Sigma_r \frac{\partial V}{\partial x_r} \Sigma_s (\mu_{r,s} L'_s)\, dS = \int_S \Sigma_r \frac{\partial V}{\partial x_r} \left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) dS = 0.$$

Quindi

$$-(F+P+Q)$$

$$=\frac{1}{2}\int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U}{\partial x_r}+X'_r\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}+X'_s\right)+\Sigma_r\Sigma_s \mu_{r,s}\left(\frac{\partial V}{\partial x_r}+L'_r\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x_s}+L'_s\right)\right\} dS$$

$$=\frac{1}{2}\int_S \{ \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} X_r X_s + \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} L_r L_s \} dS.$$

Ne segue che

$$-(F+P+Q)\, e^{\frac{c}{a}t}$$

rappresenta la energia secondo HERTZ.

4. Mediante una integrazione per parti, la espressione di T può scriversi

$$T=\int_S \left\{ \Sigma_r U_r \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right\} dS.$$

Supponendo soddisfatte le (6′) avremo quindi

$$T=\int_S \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)dS=\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_r X'_s .$$

Ponendo dunque

$$\Theta_1=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_r X'_s dS=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)dS$$

$$\Theta_2=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} L'_r L'_s dS=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s}\left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)dS$$

avremo

$$F+T=\Theta_1-\Theta_2 .$$

5. Tenendo conto delle (5) le (6) e (6′) possono scriversi

$$\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial t}+L'_{r+2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\frac{\partial U_{r+1}}{\partial t}+L'_{r+1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial t}+X'_{r+2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\frac{\partial V_{r+1}}{\partial t}-X'_{r+1}\right)$$

onde

$$X'_r=\frac{\partial V_r}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\quad , \quad L'_r=-\frac{\partial U_r}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial x_s} .$$

Ne segue

$$\Theta_1=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial V_r}{\partial t}\frac{\partial V_s}{\partial t}dS-\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}$$

$$\Theta_2=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t}dS-\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial \psi}{\partial x_r}\frac{\partial \psi}{\partial x_s}$$

e quindi

$$F + T = -\frac{1}{2}\int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t} - \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) - \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial \psi}{\partial x_r}\frac{\partial \psi}{\partial x_s}\right\} dS .$$

Prendendo in quest'ultima formula

$$V = -\psi ,$$

si otterrà

$$\text{(III)} \quad G_{\alpha,\beta} = -\alpha(F + T + Q) + \beta P = \frac{\alpha}{2}\int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t} - \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\} dS + \beta \int_S \left\{ \frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_r}\frac{\partial U}{\partial x_s} + eU\right\} dS .$$

6. Annulliamo la variazione prima di

$$(7) \qquad \int_{t}^{t} G_{\alpha,\beta}\, dt$$

ammettendo nulle le variazioni delle U_r ai limiti, otterremo

$$o = \delta \int_{t_0}^{t} G_{\alpha,\beta}\, dt$$

$$= \alpha \int_{t_0}^{t}\int_S - \Sigma_r \left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial U_s}{\partial t}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s \Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s \Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}\right] \delta U_r\, dS$$

$$+ \beta \int_{t_0}^{t}\int_S - \left[\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s} - e\right] \delta U d\, S dt$$

d'onde

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial U_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s \Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s \Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}, \\ \Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s} &= e . \end{aligned}\right.$$

Come abbiamo già osservato precedentemente, si deduce dalla precedente equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s} = o ;$$

ponendo dunque

$$L_r = -\frac{\partial U_r}{\partial t}$$

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r} + \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)$$

dalle (8) segue

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \lambda_{r,s} X_s) = \frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \mu_{r,s} L_s) = \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}$$

che non sono altro che le (I'). Queste equazioni possono quindi ottenersi dall'annullare la variazione prima dell'integrale (7).

La energia sarà data da

$$(8') \qquad \frac{e^{\frac{c}{a}t}}{2}\int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t} + \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) + \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_r}\frac{\partial U}{\partial x_s}\right\} dS = E.$$

§ 3.

1. Consideriamo ora le equazioni (I) nel caso generale, in cui cioè si ammettono arbitrarî i coefficienti $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$, $\nu_{r,s}$ salvo al supporli indipendenti dalla variabile t e finiti e continui rispetto alle loro derivate prese relativamente alle variabili x_1, x_2, x_3, e tali che $\lambda_{r,s} = \lambda_{s,r}$, $\mu_{r,s} = \mu_{s,r}$, $\nu_{r,s} = \nu_{s,r}$.

Esaminiamo l'integrale

$$(IV) \qquad P = \frac{1}{2}\int_S \left\{ -\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial A_r}{\partial t}\frac{\partial A_s}{\partial t} + \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\frac{\partial B_r}{\partial t}\frac{\partial B_s}{\partial t} - \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial B_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial B_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \Sigma_h \nu_{rh} A_h\right)\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}} - \Sigma_h \nu_{sh} A_h\right) + \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s}\left(\frac{\partial A_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\} dS$$

ammettendo le A_r, B_r infinitesime del secondo ordine a distanza infinita.

Supposte nulle le variazioni ai limiti t_0 e t delle A_r e B_r, poniamo

$$(9) \qquad \delta\int_{t_0}^{t} P\,dt = 0.$$

Otterremo le equazioni

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s \lambda_{r,s}\frac{\partial A_s}{\partial t}\right) = -\Sigma_h \nu_{r,h} \Sigma_s \Lambda_{h,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}} - \Sigma_k \nu_{sk} A_k\right) + \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s M_{r+1,s}\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s M_{r+2,s}\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}$$

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}}-\Sigma_h\,\nu_{sh}\,A_h\right)\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}}-\Sigma_h\,\nu_{sh}\,A_h\right)\right\}.$$

2. Ciò premesso poniamo

$$X_r=\frac{\partial A_r}{\partial t}-\Sigma_s\,\Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}}-\Sigma_h\,\nu_{sh}\,A_h\right)$$
$$L_r=\frac{\partial B_r}{\partial t}+\Sigma_s\,M_{r,s}\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right).$$

Si avrà

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\,X_s=\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial B_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\Sigma_h\,\nu_{rh}\,A_h\right)$$

onde a cagione della (10)

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\,X_s=\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}=\Sigma_h\,\nu_{r,h}\,X_h\,.$$

In modo analogo avremo

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\mu_{r,s}\,L_s=\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)$$

talché per la (11)

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\mu_{r,s}\,L_s=\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\,.$$

Quindi le equazioni (12) e (13) che sono le equazioni di HERTZ, nel caso più generale, potranno ricavarsi dall'annullare la variazione prima (9) nella ipotesi che siano nulle le variazioni delle A_r e B_r ai tempi estremi t_0 e t.

§ 4.

1. Quando si ha $\nu_{r,s}=0$, per modo che $c=0$, abbiamo che le equazioni differenziali di HERTZ possono dipendere dall'annullare la variazione prima di $\int_{t_0}^{t} G_{1,-1}\,dt$, mentre l'energia è E (vedi (8')). Da quanto si è detto nella introduzione questa osservazione potrebbe condurre immediatamente a delle interpretazioni meccaniche della questione.

2. Nel caso in cui il mezzo sia isotropo avremo

$$\lambda_{r,s}=\mu_{r,s}=\nu_{r,s}=\Lambda_{r,s}=M_{r,s}=0 \qquad r\gtrless s$$
$$\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{33}=\lambda \quad,\quad \mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{33}=\mu \quad,\quad \nu_{11}=\nu_{22}=\nu_{33}=\nu$$
$$\Lambda_{11}=\Lambda_{22}=\Lambda_{33}=\frac{1}{\lambda} \quad,\quad M_{11}=M_{22}=M_{33}=\frac{1}{\mu}$$

e quindi le espressioni di $R_{\alpha,\beta,\gamma}$, $G_{\alpha,\beta}$, P si semplicizzano (vedi (II), (III), (IV)).

Consideriamo in particolare la espressione di $G_{\alpha,\beta}$. Avremo

$$G_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha}{2}\int\limits_S \left\{ \mu \Sigma_r \left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\lambda}\Sigma_r\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)^2 \right\} dS$$

$$+ \beta \int\limits_S \left\{ \frac{\lambda}{2}\Sigma_r\left(\frac{\partial U}{\partial x_r}\right)^2 + eU \right\} dS$$

onde

$$(14) \qquad \int_{t_0}^{t} G_{1,0}\, dt = \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{2}\int\limits_S \left\{ \mu \Sigma_r \left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\lambda}\Sigma_r\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)^2 \right\} dS .$$

Se λ è costante, si avrà

$$\int_{t_0}^{t} G_{1,0}\, dt = \int_{t_0}^{t} dt \int\limits_S \left\{ \frac{\mu}{2}\Sigma_r\left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}\left[\Sigma \frac{\partial U_r}{\partial x_r}\right]^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda}\Sigma\left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial x_r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)^2\right] \right\} dS .$$