XXXIV.

SULLE VIBRAZIONI LUMINOSE NEI MEZZI ISOTROPI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5, vol. I_2, 1892_2, pp. 161-170.

1. Nel 1882 Kirchhoff [1], mediante una ingegnosa applicazione del teorema di GREEN, ha stabilito una formula, ormai celebre, che comprende in sé il principio di HUYGHENS, e la cui importanza risulta principalmente dalla applicazione fattane alla teoria della diffrazione.

È ben noto che il processo tenuto da Kirchhoff ha la sua base nella esistenza dell'integrale di EULERO

$$\frac{f(r+at)}{r}$$

della equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \tag{1}$$

in cui f è una funzione arbitraria ed

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nel caso delle onde cilindriche, la equazione (1) si riduce all'altra

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \tag{1'}$$

della quale manca un integrale analogo a quello di EULERO, cioè un integrale avente la forma

$$\lambda f(r+at) \tag{2}$$

in cui

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e λ è una funzione della sola r.

Se si cercano anzi i casi nei quali l'equazione generale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \tag{3}$$

ammette degli integrali aventi la forma

$$\lambda f(r+at) \tag{4}$$

in cui

$$r = \left(\sum_{1}^{m} x_i^2 \right)^{1/2}$$

(1) *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, « Sitzb. d. Berliner Ak. », 1882.

www.rcin.org.pl

e λ è funzione della sola r, si trova che essi si limitano a due soli; a quello cioè in cui $m = 1$, ed all'altro in cui $m = 3$; al primo dei quali corrisponde il noto integrale di D'ALEMBERT; al secondo quello di EULERO [2].

Ordinariamente quindi non si stabilisce pel caso delle onde cilindriche una formula simile a quella di KIRCHHOFF, né si estende questa medesima formula al caso generale della equazione (3).

2. L'equazione (1′), ed in generale l'equazione (3), ammettono degli integrali aventi la forma (4), quando si esclude la condizione che λ debba esser funzione della sola r, ma si può provare che (all'infuori dei soliti due casi in cui $m = 1$, $m = 3$) λ risulta una funzione polidroma, o una funzione che possiede delle singolarità, oltre che nel punto $r = 0$, anche in altri punti.

Si consideri infatti l'equazione (1′). Essa ammette gl'integrali

$$(5) \qquad \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{r}} f(r + at) \quad , \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{r}} f(r + at),$$

essendo

$$x = r \cos\alpha \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\alpha ,$$

i quali sono manifestamente polidromi.

Partendo da questi integrali è possibile procedere innanzi nel modo tenuto da KIRCHHOFF; ma è necessario fare una osservazione, la quale muta in modo sostanziale il risultato a cui si giunge.

Avendo infatti presente il metodo tenuto da KIRCHHOFF, si ricorderà che allorquando si applica il lemma di GREEN ad un campo nel cui interno si trova il punto $r = 0$, si deve escludere il punto stesso nel quale l'integrale di EULERO diviene infinito. Allorché si applica il lemma di GREEN per due variabili facendo uso di una delle funzioni (5) è necessario, non solo di escludere dal campo che si considera il punto $r = 0$, ma anche di eseguire un taglio che da questo punto vada al contorno del campo stesso in modo da impedire che si possa girare attorno al punto $r = 0$ che costituisce il punto di diramazione di ognuna delle due funzioni (5).

Si vede quindi che le formule, che in tal modo si trovano, restano affette da termini che non compariscono in quella di KIRCHHOFF. Dunque, benché ottenute con un uguale procedimento, le formole stesse non possono usarsi per ricavare il valore di un integrale regolare V della (1′) in un punto, mediante i valori di V e delle sue derivate nei punti del contorno di un campo che racchiude il punto stesso.

Noi non staremo ad esporre i risultati che si trovano in questo modo, giacché procederemo per altra via per ottenere delle formule analoghe a quella di KIRCHHOFF nel caso delle onde cilindriche, e per stabilire quindi delle formule generali da cui queste e quella di KIRCHHOFF possono ricavarsi come casi particolari.

(2) DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*. Cours professé en 1890–91. Tome second, livre II, chap. VIII.

www.rcin.org.pl

3. Per semplicità supponiamo nella (1′) $a = 1$, cioè di aver scelto le unità in modo che la velocità di propagazione delle onde sia eguale ad 1, il che è evidentemente sempre possibile.

Supponendo V funzione di r e di t soltanto, potremo scrivere la (1′)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Consideriamo gli integrali di questa equazione aventi la forma

$$\text{(I)} \qquad V_1 = \int_r^\infty f(t+u)\,\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\,,$$

$$\text{(II)} \qquad V_2 = \int_r^\infty f(t-u)\,\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\,,$$

$$\text{(III)} \qquad V_3 = \int_{-r}^{r} f(t+u)\,\frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}}\,,$$

$$\text{(IV)} \qquad V_4 = \int_{-r}^{r} f(t+u)\,\log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

i quali possono scriversi ancora

$$\text{(I}'\text{)} \qquad V_1 = \int_0^\infty f(t + r\cosh u)\,du$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad V_2 = \int_0^\infty f(t - r\cosh u)\,du$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad V_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t + r\,\mathrm{sen}\,u)\,du$$

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad V_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t + r\,\mathrm{sen}\,u)\log(r\cos^2 u)\,du.$$

Affinché l'integrale (I) sia finito, supporremo che la funzione arbitraria $f(l)$, per valori dell'argomento superiori ad un certo limite, si annulli, mentre, affinché l'integrale (II) sia finito, ammetteremo che $f(l)$ si annulli per valori dell'argomento inferiori ad un certo limite. Gli integrali (III′) e (IV′) non sono altro che quelli dati da POISSON [(3)].

È facile dimostrare che se f è una funzione regolare, l'integrale V_3 è pure regolare, mentre gli integrali V_1, V_2, V_4 si conservano regolari pei valori di r diversi da zero, e si ha:

(3) « Journal de l'École Polytechnique », XIX Cahier.

www.rcin.org.pl

$$\lim_{r=0}\left(\frac{1}{\log r}V_1\right)=-f(t) \quad , \quad \lim_{r=0}\left(r\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)=-f(t)$$

$$\lim_{r=0}\left(\frac{1}{\log r}V_2\right)=-f(t) \quad , \quad \lim_{r=0}\left(r\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)=-f(t)$$

$$\lim_{r=0}\left(\frac{1}{\log r}V_4\right)=\pi f(t) \quad , \quad \lim_{r=0}\left(r\frac{\partial V_4}{\partial r}\right)=\pi f(t).$$

4. Ciò premesso indichiamo succintamente la via che può seguirsi per stabilire le formule a cui alludevamo precedentemente.

Siano $\psi(x,y,t)$, $\chi(x,y,t)$ due integrali della (1′) regolari entro un campo σ a due dimensioni limitato da un contorno s. Per il lemma di GREEN avremo

$$\int_s\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\chi-\frac{\partial\chi}{\partial n}\psi\right)ds=\int_\sigma(\psi\Delta^2\chi-\chi\Delta^2\psi)\,d\sigma=\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\sigma$$

essendo n la normale ad s diretta verso l'interno di σ. Prendiamo $\chi=V_1$, in cui r denota la distanza contata da un punto x,y, fisso nell'interno di σ. Onde poter applicare l'equazione precedente, bisognerà escludere il punto x,y ove V_1 cessa di esser regolare. Questa esclusione potrà farsi mediante un piccolo cerchio col centro nel punto stesso. Facendo decrescere indefinitamente il raggio di questo cerchio, otterremo al limite

$$2\pi\psi(x,y,t)f(t)+\int_s\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}V_1-\frac{\partial V_1}{\partial n}\psi\right)ds=\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\left(\psi\frac{\partial V_1}{\partial t}-V_1\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\sigma.$$

Si supponga ora che la funzione ψ si annulli in tutti i punti del campo σ per valori di t inferiori ad un certo limite. Per l'ipotesi fatta circa $f(t)$, avremo che V_1 si annullerà per valori di t superiori ad un certo limite; quindi moltiplicando l'equazione precedente per dt e integrando fra $-\infty$ e ∞ otterremo

$$\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\psi(x,y,t)f(t)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_s\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}V_1-\frac{\partial V_1}{\partial n}\psi\right)dz=0.$$

Poniamo

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=\psi_1(\xi,\eta,t) \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\psi_2(\xi,\eta,t)$$

denotando con ξ,η le coordinate dei punti del contorno s; allora, con facili trasformazioni di calcolo, la formola precedente può scriversi

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\psi(x,y,t)f(t)\,dt+\int_s ds\left\{\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\psi_1(\xi,\eta,t)\int_r^{\infty}f(t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\psi_2(\xi,\eta,t)\int_r^{\infty}f(t+u)\frac{u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Possiamo ora stabilire la formula di trasformazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t)\, dt \int_r^{\infty} f(t+u)\, \mu(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_r^{\infty} \lambda(t-u)\, \mu(u)\, du.$$

Applicandola alla equazione precedente essa diviene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \left[2\pi\psi(x, y, t) + \int_s ds \left\{ \int_r^{\infty} \psi_1(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \int_r^{\infty} \psi_2(\xi, \eta, t-u) \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\} \right] = 0$$

e, siccome $f(t)$ è una funzione arbitraria, così avremo

$$2\pi\psi(x, y, t) + \int_s ds \left\{ \int_r^{\infty} \psi_1(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \int_r^{\infty} \psi_2(\xi, \eta, t-u) \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\} = 0.$$

Usiamo i due simboli $\partial/\partial n$ e $\delta/\delta n$ per rappresentare le derivate rispetto ad n di una funzione di ξ, η, r prese supponendo rispettivamente r costante e ξ, η costanti; cioè

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n}$$

$$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Allora la formula precedente si potrà scrivere

$$\text{(A)} \qquad 2\pi\psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \int_r^{\infty} \psi(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n} \int_r^{\infty} \psi(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

È evidente la analogia che passa fra questa formula e quella di KIRCHHOFF, ponendo mente all'integrale (I) da cui siamo partiti, il quale corrisponde alla linea luminosa, come quello di EULERO corrisponde al centro luminoso.

Invece di far uso dell'integrale (I), possiamo impiegare l'integrale (II). Supponendo ora che la funzione $\psi(x, y, t)$ per valori di t superiori ad un certo limite si annulli, otteniamo la formula

$$\text{(B)} \qquad 2\pi\psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \int_r^{\infty} \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n} \int_r^{\infty} \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

www.rcin.org.pl

Partiamo dall'integrale (III) lasciando da parte le ipotesi fatte precedentemente riguardo ai valori di $\psi(x, y, t)$ per valori di t inferiori o superiori a certi limiti.

Avremo allora

$$\text{(C)} \qquad 0 = \int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} - \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\}.$$

Finalmente partiamo dall'integrale (IV), pure tralasciando le ipotesi circa ai valori di ψ per t superiore o inferiore a certi limiti. Si troverà

$$\text{(D)} \qquad 2\pi^2 \psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\delta n} \left(\int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right) \right\}.$$

5. Abbiamo così ottenuto quattro formule diverse; per vederne chiaramente il significato, immaginiamo che t rappresenti una terza coordinata, per modo che $\psi(x, y, t)$ possa considerarsi come una funzione dei punti di uno spazio a tre dimensioni riferito al sistema di assi cartesiani x, y, t.

Supponendo s costituita da una sola linea, immaginiamo un cilindro avente per direttrice questa linea e le cui generatrici siano parallele all'asse t. Si prenda un punto x, y, t nell'interno di questo cilindro e si conduca per esso un piano parallelo al piano xy. Quindi su ogni generatrice, al di sopra e al disotto di questo piano, si tagliano due segmenti uguali alla distanza del punto x, y, t dalla generatrice stessa.

Gli estremi di questi segmenti costituiranno due linee L_1, L_2, le quali divideranno il cilindro in tre parti distinte. La formola (D) dà il valore di $\psi(x, y, t)$ espresso mediante i valori di ψ e di $\partial\psi/\partial n$ nei punti del cilindro compresi fra le due curve L_1, L_2, mentre ciascuna delle formule (A), (B) dà il valore di $\psi(x, y, t)$ espresso mediante i valori di ψ e di $\partial\psi/\partial n$ in una delle due altre regioni in cui il cilindro è stato diviso.

Finalmente la formula (C) stabilisce una relazione che è la estensione di quella ben nota

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

a cui soddisfano le derivate normali lungo un contorno s, di una funzione armonica V regolare entro lo spazio racchiuso da s.

Quando si supponga che le vibrazioni siano armoniche le formule (C) e (D) conducono a delle formule date da WEBER [(4)], le quali hanno rispetto

(4) «Mathematische Annalen», vol. I, 1869, p. 1.

www.rcin.org.pl

alle (C) e (D) stesse la medesima relazione che una ben nota formula di HELMHOLTZ [5] ha con quella di KIRCHHOFF.

6. Esponiamo ora in poche parole la estensione alla equazione generale (3). È necessario distinguere due casi, secondoché m è dispari o pari.

Nel primo caso posto $m = 2p + 1$, abbiamo che

$$W = \sum_{1}^{p} {}_h (-2)^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)!\,(h-1)!} \frac{f^{(h-1)}(r \pm t)}{r^{2p-h}}$$

in cui f è una funzione arbitraria e

$$f', f'', \cdots f^{(p-1)}$$

ne sono le derivate, è un integrale della equazione differenziale (3).

Applicando ora il procedimento di KIRCHHOFF si giunge a stabilire il teorema seguente:

Sia $\psi(x_1 \cdots x_m t)$ *un integrale regolare della* (3) *ed* S_m *un campo a* m *dimensioni limitato dal contorno* S_{m-1} *e che racchiude il punto* $x_1 x_2 \cdots x_m$. *Poniamo*

$$\psi_h = \frac{\partial^h \psi}{\partial t^h}$$

e chiamiamo $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_m$ *le coordinate dei punti del contorno* S_{m-1}, n *la sua normale. Avremo allora, se* $m = 2p + 1$,

$$\text{(E)} \qquad (4\pi)^p \psi(x_1 \cdots x_m, t) = \int_{S_{2p}} \sum_{1}^{p} {}_h 2^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)!\,h!} \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \left[\psi_{h-1} \frac{(\xi_1 \cdots \xi_m, t-r)}{r^{2p-h}} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\psi_{h-1}(\xi_1 \cdots \xi_m, t-r)}{r^{2p-h}} \right] \right\} dS_{2p}.$$

I due simboli di derivazione rispetto alla n hanno l'analogo significato che avevano nelle formule precedenti, cioè

$$\frac{\delta}{\delta n} = \sum_{1}^{m} {}_h \frac{\partial}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial n} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Nel caso di m pari la formula precedente non è evidentemente applicabile. Stabiliremo ora delle formule le quali valgono tanto se m è pari, quanto se è dispari.

A tal fine prenderemo gli integrali

$$(\mathrm{I}_a) \qquad W_1 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^{\infty} f^{(m-2)}(t+u)(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du$$

(5) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.* « Wiss. Abhandlungen » vol. I.

www.rcin.org.pl

$$(\mathrm{II}_a)\qquad W_2 = \frac{1}{r^{m-2}}\int_r^{\infty} f^{(m-2)}(t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du$$

$$(\mathrm{III}_a)\qquad W_3 = \frac{1}{r^{m-2}}\int_{-r}^{r} f(t+u)\,(r^2-u^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du$$

della equazione (3) in cui f denota una funzione arbitraria. Soltanto ammetteremo, affinché il primo integrale sia finito, che f si annulli per valori di f superiori ad un certo limite, e perché il secondo integrale sia finito, supporremo che f si annulli per valori di t inferiori ad un certo limite.

Applicando ora un metodo analogo a quello seguito nel § 4 si giunge al teorema seguente:

Restando le stesse condizioni poste nel teorema precedente, solo non facendo più l'ipotesi che m sia dispari, si ha

$$(\mathrm{A}_a)\qquad 2\pi^{\frac{1}{2}m}\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)}\psi(x_1\cdots x_m, t)$$

$$= \int_{S_{m-1}} dS_{m-1}\left\{\frac{\delta}{\delta n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\int_r^{\infty}\psi_{m-2}(\xi_1\cdots\xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\int_r^{\infty}\psi_{m-2}(\xi_1\cdots\xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du\right]\right\}$$

$$(\mathrm{B}_a)\qquad 2\pi^{\frac{1}{2}m}\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)}\psi(x_1\cdots x_m, t)$$

$$= \int_{S_{m-1}} dS_{m-1}\left\{\frac{\delta}{\delta n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\int_r^{\infty}\psi_{m-2}(\xi_1\cdots\xi_m, t+u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\int_r^{\infty}\psi_{m-2}(\xi_1\cdots\xi_m, t+u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du\right]\right\}$$

$$(\mathrm{C}_a)\qquad 0 = \int_{S_{m-1}} dS_{m-1}\left\{\frac{\delta}{\delta n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\int_{-r}^{r}\psi(\xi_1\cdots\xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\int_{-r}^{r}\psi(\xi_1\cdots\xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dS\right]\right\}$$

nella prima delle quali si suppone che ψ si annulli per valori di t inferiori ad un certo limite, e nella seconda si suppone invece che ψ si annulli per valori

www.rcin.org.pl

di t superiori ad un certo limite. La formula (A_a) si riduce alla (E) nel caso di m dispari; soltanto è da osservare che nello stabilire la (E) non si è fatta alcuna ipotesi circa ai valori di ψ per valori di t inferiori ad un certo limite.

7. Nel caso di m pari, la equazione (3) ammette anche un quarto integrale oltre (I_a), (II_a), (III_a) da cui può ricavarsi una formula analoga alla (D). Denotiamo col simbolo ∇ la operazione $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Allora questo quarto integrale potrà scriversi

$$(IV_a) \qquad W_4 = \nabla^{p-1}\int_{-r}^{r} f(t+u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\,.$$

Si riconosce facilmente che

$$\lim_{r=0}\{r^{3p-2}\,W_4\} = \pi(-2)^{p-2}(p-2)!\,f(t)$$

$$\lim_{r=0}\left\{r^{2p-1}\frac{\partial W_4}{\partial r}\right\} = \pi(-2)^{p-1}(p-1)!\,f(t)$$

ed applicando un procedimento simile a quello seguito nei paragrafi precedenti si giunge al seguente teorema:

Restando le stesse le condizioni del 1º teorema del § 6, *supponendo soltanto che m, invece di esser dispari, sia pari ed eguale a* $2p$, *si ha*

$$(D_a) \qquad 2^p(-\pi)^{p+1}\,\psi(x_1, x_2 \cdots x_{2p}, t)$$

$$= \int\!\!\int_{S_{2p-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\nabla^{p-1}\int_{-r}^{r}\psi(\xi_1\cdots\xi_{2p}, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right.$$

$$\left. -\frac{\delta}{\delta n}\nabla^{p-1}\int_{-r}^{r}\psi(\xi_1\cdots\xi_{2p}, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right\} dS_{2p-1}\,.$$

www.rcin.org.pl