XXXV.

SULLE ONDE CILINDRICHE NEI MEZZI ISOTROPI

« Rend. Lincei » ser. 5, vol. I_2, 1892_2, pp. 265–277.

1. In una Nota presentata nel luglio scorso all'Accademia (*), ho stabilito per le onde cilindriche nei mezzi isotropi alcune formule, le quali esprimono analiticamente un principio analogo a quello che KIRCHHOFF ha dato per precisare e per estendere il principio di HUYGHENS.

Queste formule sono le seguenti:

$$
(\mathrm{I})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&(1)\quad \psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}\\
&(2)\quad \psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}\\
&(3)\quad \psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi^2}\int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\delta}{\delta n}\int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\}\\
&(4)\quad 0 = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t-u)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{\delta}{\delta n}\int_{-r}^r \psi(\xi, \eta, t-u)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

(*) In questo volume: XXXIV, pp. 559–567 [N.d.R.].

in cui ψ denota un integrale della equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{5}$$

regolare entro il campo σ limitato dal contorno s.

Per la validità della prima formula abbiamo supposto che ψ si annullasse per valori di t sufficientemente piccoli, mentreché, onde la seconda formula fosse valida, abbiamo supposto ψ nulla per valori di t superiori ad un certo limite [1].

Nella Nota citata ho esposto come possono interpretarsi le dette formule onde vederne chiaramente il significato analitico (vedi § 5).

L'integrale generale della equazione (5) sotto la forma data da POISSON o prima ancora di lui da PARSEVAL, costituisce una formula essenzialmente distinta dalle precedenti. Ciò si riconosce facilmente quando si osserva che, mentre per mezzo di una qualunque delle prime tre formule (I) si ottiene il valore di ψ in un punto interno al campo σ espressa mediante i valori di ψ e delle sue derivate al contorno s, la formula di POISSON dà il valore di $\psi(x, y, t)$ quando sono noti quelli di ψ e della sua derivata rispetto a t per $t = 0$ in tutti i punti di un cerchio di raggio eguale a t col centro nel punto x, y. La formula di POISSON può scriversi infatti, mediante una semplice trasformazione,

$$\begin{aligned}\psi(x, y, t) = {} & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^t \psi(x + z\cos\varphi, y + z \operatorname{sen}\varphi, 0) \frac{zdz}{\sqrt{t^2 - z^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^t \psi_2(x + z\cos\varphi, y + z \operatorname{sen}\varphi, 0) \frac{zdz}{\sqrt{t^2 - z^2}}\end{aligned} \tag{6}$$

in cui ψ_2 rappresenta la derivata di ψ rispetto a t.

Scopo della presente Nota è di collegare le due formule (1) e (2) con questa di POISSON. Stabilirò infatti una formula generale da cui le (1), (2) e (6) discendono come casi particolari.

Così avremo un nuovo procedimento per ottenere le dette formule, il quale è più semplice di quello esposto nella Nota citata per trovare le (1) e (2), ed è pure più breve e più diretto di quello ordinariamente seguìto per ottenere la formula di POISSON.

Con un metodo analogo troverò poi delle formule più generali delle (3) e (4).

2. Consideriamo x, y, t come le coordinate di un punto dello spazio riferito ad un sistema di assi cartesiani. Sia S un campo scelto in questo spazio, e limitato da un contorno Σ. Se ψ e χ sono due integrali della (5)

(1) Pel significato dei simboli $\frac{\delta}{\delta n}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ e per le altre notazioni mi riferisco a quanto fu detto nella Nota citata. È evidente che le condizioni poste per la validità degli integrali considerati sono sufficienti, non necessarie.

regolari entro S, avremo

$$(7)\qquad 0=\int_S \left\{\psi\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right)-\chi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\right\}dS$$

$$=-\int_\Sigma \left\{\psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right.$$

$$\left.-\chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\Sigma$$

denotando con n la normale a Σ diretta verso l'interno di S.

Scegliamo il campo S nella maniera seguente. Si conduca per un punto x_1, y_1, t_1 come vertice un cono di rotazione C avente l'asse a parallelo all'asse t e per apertura 90°. Mediante una superficie σ si limiti entro il cono uno spazio adiacente al vertice, e si tolga dal solido così ottenuto lo spazio racchiuso entro un cilindro di rotazione c di raggio ε avente lo stesso asse del cono.

Otterremo in tal modo un solido S la cui sezione con un piano passante per a sarà rappresentata dalla fig. 1 o dalla fig. 2.

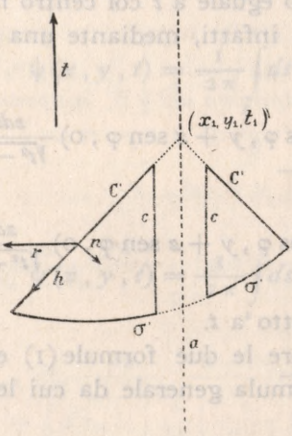

Fig. 1.

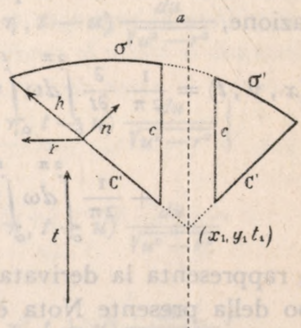

Fig. 2.

Questi due casi saranno caratterizzati dall'essere la coordinata t_1 maggiore o minore della coordinata t di ciascun punto di S.

Il contorno Σ di S sarà formato dalle tre superficie c, C', σ', essendo quest'ultime le porzioni residue di C e di σ, quando si tolgano quelle parti incluse nel cilindro c.

Chiamiamo r la distanza di un punto x, y, t dall'asse a, e h la generatrice che passa fra ciascun punto di C.

Sopra C avremo

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial h}+\frac{\partial\chi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial h}=\frac{\partial\chi}{\partial h}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial h}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial h}=\frac{\partial\psi}{\partial h}.$$

Sopra c avremo invece

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=-\frac{\partial\chi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Quindi ponendo

$$\Omega=\int_{\sigma'}\left\{\psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)-\chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\sigma$$

potremo scrivere la formula (7) nella maniera seguente

(8) $$\Omega=\int_{C'}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial h}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)dC-\int_{c}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial r}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dc=0.$$

3. Prendiamo ora a considerare gli integrali della (5) i quali sono funzioni di $t/r=\theta$.

Ammesso ψ funzione della sola θ, la (5) si trasforma in

$$(1-\theta^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$$

e integrando avremo

(9) $$\psi=\log\left(\theta+\sqrt{\theta^2-1}\right)$$

se $\theta>1$; e

(10) $$\psi=\text{arco sen}\,\theta$$

se $\theta<1$.

4. Ciò premesso osserviamo che si potrà prendere nella (8)

$$\chi=\log\left(\frac{\pm(t_1-t)}{r}+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)$$

avvertendo di prendere il segno superiore o il segno inferiore secondoché siamo nel primo o nel secondo caso, affinché la funzione risulti reale.

Ma sopra C abbiamo

$$\pm(t_1-t)=r,$$

quindi

$$\chi=0\quad,\quad\frac{\partial\chi}{\partial h}=0;$$

onde la (8) si riduce a

$$\int_c\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial r}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dc=\Omega$$

ovvero

(11) $$\int_c\left\{\psi\frac{\mp\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\log\left(\frac{\pm(t_1-t)}{\varepsilon}+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)^2-1}\right)\right\}dc=\Omega.$$

Facciamo tendere indefinitamente verso zero il raggio ε del cilindro c. Avremo

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_c \left\{ \psi \frac{\mp\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{(t_1-t)^2-\varepsilon^2}} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)^2-1}\right)\right\} dc$$

$$= \mp 2\pi\int_{t_0}^{t_1}\psi(x_1, y_1, t)\, dt,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\Omega = \int_\sigma\left\{\psi\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial t}{\partial n} \pm \frac{1}{r}\frac{t_1-t}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right.$$

$$\left. - \log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} d\sigma$$

chiamando t_0 la coordinata t del punto d'incontro dell'asse a colla superficie σ.

La formula (11) diviene quindi al limite

$$\mp 2\pi\int_{t_0}^{t_1}\psi(x_1, y_1, t)\, dt = \int_\sigma\left\{\psi\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial t}{\partial n} \pm \frac{1}{r}\frac{t_1-t}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right.$$

$$\left. - \log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} d\sigma.$$

Derivando rispetto a t_1 si otterrà

$$\psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \psi\left(\frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{t_1-t}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial r}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$\pm \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\left\{\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} d\sigma.$$

Ora osserviamo che

$$\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)$$

è nullo lungo il contorno di σ, quindi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\left\{\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} d\sigma$$

$$= \pm\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma$$

e perciò la formula precedente si potrà scrivere

$$\text{(12)}\qquad \psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{t_1-t}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma.$$

È questa la formula generale a cui volevamo pervenire. Essa esprime $\psi(x_1 y_1 t_1)$ mediante i valori di ψ e delle sue derivate lungo la superficie σ.

5. Mostriamo ora che la formula di Poisson è un caso particolare della (12), come pure sono casi particolari della formula stessa le (1) e (2).

Si supponga dapprima che la superficie σ sia il piano xy.

Avremo allora che σ si ridurrà ad un cerchio di raggio $|t_1|$. Oltre a ciò si avrà sopra σ

$$\frac{\partial t}{\partial n} = \pm 1 \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = 0;$$

per conseguenza la (12) diverrà

$$\psi(x_1, y_1, t_1) =$$

$$\pm \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{t_1^2 - r^2}} \psi \, d\sigma \pm \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{t_1^2 - r^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\sigma$$

che non è altro che la formula (6).

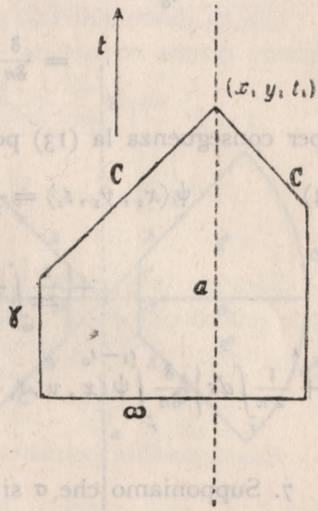

Fig. 3.

6. Si supponga ora di essere nel primo caso e che σ si riduca ad un cilindro γ colle generatrici parallele all'asse t, limitato da un piano ω normale alle generatrici stesse come lo indica la fig. 3 che rappresenta una sezione fatta con un piano passante per a. Inoltre si ammetta che la intersezione di σ col cono C appartenga al cilindro γ.

In tali ipotesi avremo sopra γ

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0$$

e sopra ω

$$t = \text{cost.} = t_0 \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial t}{\partial n} = 1 .$$

Quindi chiamando s il contorno di ω, la (12) diverrà

$$(13) \quad \psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}} \psi \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}} \frac{t - t_1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \psi \, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}} \psi \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_s ds \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial n} \int_{t_0}^{t_1 - r} \frac{t - t_1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}} \psi \, dt - \int_{t_0}^{t_1 - r} \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}} \frac{\partial \psi}{\partial n} dt \right\} .$$

Ponendo $t_1 - t = u$, abbiamo

$$\int_{t_0}^{t_1-r} \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}} \frac{\partial\psi}{\partial n} dt = \int_r^{t_1-t_0} \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \psi_2(x, y, t_1-u) = \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{t_1-t_0} \psi(x, y, t_1-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-r} \frac{t-t_1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}} \psi\, dt = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1-t_0} \frac{-u\, du}{\sqrt{u^2-r^2}} \psi(x, y, t_1-u)$$

$$= \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{t_1-t_0} \psi(x, y, t_1-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}$$

e per conseguenza la (13) potrà scriversi

$$(14) \qquad \psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}} \psi(x, y, t_0)\, d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}} \psi_2(x, y, t_0)\, du$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{t_1-t_0} \psi(x, y, t_1-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{t_1-t_0} \psi(x, y, t_1-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

7. Supponiamo che σ si riduca ad un cilindro γ limitato da un piano ω e che la intersezione di σ con C appartenga *a* γ, ma ammettiamo di essere nel secondo caso come lo indica la fig. 4; allora, ripetendo un calcolo perfettamente analogo a quello fatto nel paragrafo precedente, si giunge alla formula

$$(15) \qquad \psi(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}} \psi(x, y, t_0)\, d\omega$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}} \psi_2(x, y, t_0)\, d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{t_0-t_1} \psi(x, y, t_1+u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{t_0-t_1} \psi(x, y, t_1+u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

Le formule (14) e (15) che abbiamo ora ottenute comprendono evidentemente le (1) e (2).

Supponiamo dapprima che per valori di t inferiori ad un certo limite, $\psi(x, y, t)$ si annulli; allora basterà prendere nella (14) $t_0 = -\infty$ perché essa si riduca alla (1).

Se ammettiamo poi che $\psi(x, y, t)$ sia eguale a 0 per valori di t sufficientemente grandi la (15) dà luogo alla (2) prendendo $t_0 = \infty$.

8. Passiamo ora a dare delle formule più generali delle (3) e (4) procedendo con un metodo analogo a quello seguìto nei precedenti paragrafi.

A tal fine mediante una superficie σ limitiamo uno spazio esterno al cono C adiacente al vertice e togliamo da esso la porzione inclusa nel cilindro c di rotazione di raggio ε avente per asse a. Chiamiamo S il solido così ottenuto.

Il piano α avente per equazione $t = t_1$ divide ciascuna delle figure S, σ, c, C in due parti che distingueremo ponendo alla lettera corrispondente uno o due apici. Faremo la convenzione che i punti corrispondenti alle parti

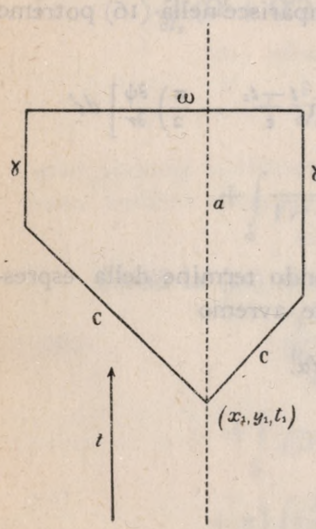

Fig. 4.

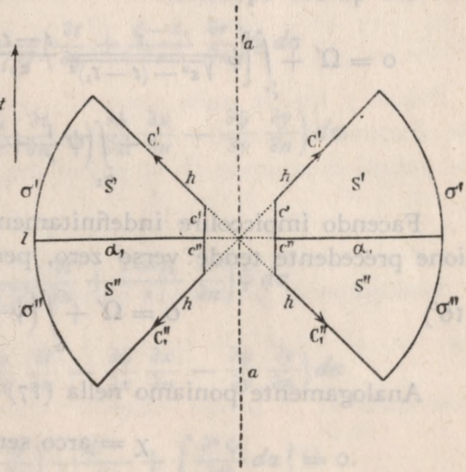

Fig. 5.

contrassegnate con un apice abbiano una coordinata t superiore a t_1; quelli corrispondenti alle parti contrassegnate con due apici abbiano una coordinata t inferiore a t_1 [2].

Ciò premesso la formula (7) applicata agli spazî S′ e S″ dà

$$
(16) \quad 0 = \int_{\sigma'} \left[\psi \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) - \chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] d\sigma'
$$

$$
- \int_{C'_1} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial h} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial h} \right) dC'_1 - \int_{c'} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dc' + \int_{\alpha_1} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\alpha_1 ,
$$

$$
(17) \quad 0 = \int_{\sigma''} \left[\psi \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) - \chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] d\sigma''
$$

$$
- \int_{C''_1} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial h} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial h} \right) dC''_1 - \int_{c''} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dc'' - \int_{\alpha_1} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\alpha_1 ,
$$

chiamando C'_1, C''_1, α_1 le parti residue di C', C'', α togliendo quelle incluse entro c.

(2) Vedi la fig. 5 che rappresenta una sezione di S eseguita con un piano passante per a.

Prendiamo ora nella (16)

$$\chi = \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r} - \frac{\pi}{2}$$

(Vedi § 3, form. (10)). Avremo sopra C'

$$\chi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \chi}{\partial h} = 0.$$

Quindi chiamando Ω' il primo integrale che comparisce nella (16) potremo scrivere questa equazione

$$0 = \Omega' + \int_{c'} \left[\psi \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - (t-t_1)^2}} \frac{t-t_1}{\varepsilon} + \left(\text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial r}\right] dc'$$
$$+ \int_{\alpha_1} \left(\psi \frac{1}{r} + \frac{\pi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\alpha_1 .$$

Facendo impiccolire indefinitamente ε, il secondo termine della espressione precedente tende verso zero, perciò al limite avremo

$$(16') \qquad 0 = \Omega' + \int_{\alpha} \left(\psi \frac{1}{r} + \frac{\pi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\alpha.$$

Analogamente poniamo nella (17)

$$\chi = \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r} + \frac{\pi}{2}$$

si otterrà analogamente

$$(17') \qquad 0 = \Omega'' - \int_{\alpha} \left(\psi \frac{1}{r} - \frac{\pi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\alpha$$

chiamando Ω'' il primo integrale che comparisce nella (17). Sommando membro a membro le equazioni (16') e (17') si otterrà

$$(18) \qquad \Omega' + \Omega'' + \pi \int_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\alpha = 0,$$

nella quale potremo scrivere

$$(19) \qquad \Omega' + \Omega'' = \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 - (t-t_1)^2}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}\right) \psi \right.$$
$$\left. - \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}\right) \right\} d\sigma$$
$$+ \frac{\pi}{2} \left\{ \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma' - \int_{\sigma''} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma'' \right\}.$$

Osserviamo ora che la (18) vale comunque si prenda t_1. Derivandola rispetto a t_1 otterremo dunque

$$(20) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}(\Omega' + \Omega'') + \pi \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\alpha = 0.$$

Ma, come risulta facilmente,

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\alpha = \int_l \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}\frac{dl}{\operatorname{sen}\widehat{(tn)}} + \int_\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\, d\alpha$$

denotando con l la intersezione di σ con α.

Tenendo presente la (19) avremo poi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\Omega' + \Omega'') = -\pi\int_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{dl}{\operatorname{sen}\widehat{(tn)}}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{2}{\sqrt{r^2 - (t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Perciò la (20) si scriverà

$$(21) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$+ \pi\left\{\int_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{dl}{\operatorname{sen}\widehat{(tn)}} + \int_\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\, d\alpha\right\} = 0.$$

Abbiamo

$$(22) \quad \frac{\partial x}{\partial n}\frac{1}{\operatorname{sen}(tn)} = \frac{\cos nx}{\operatorname{sen}(tn)} = \cos \nu x = \frac{\partial x}{\partial \nu}\,;\ \frac{\partial y}{\partial n}\frac{1}{\operatorname{sen}(tn)} = \frac{\cos ny}{\operatorname{sen}(tn)} = \cos \nu y = \frac{\partial y}{\partial \nu}$$

essendo ν la normale ad l situata nel piano α, diretta verso l'interno di α. Tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

l'ultimo termine della (21) si scriverà

$$\pi\left\{\int_l \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, dl + \int_\alpha \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) d\alpha\right\}$$

che per il lemma di GREEN sappiamo essere eguale a zero. Otteniamo dunque la formula

$$(23) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

9. Poniamo

$$\int_0^\theta \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = f(\theta).$$

Si verifica facilmente che

$$\chi_1 = \int_0^{t-t_1} \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} = f\left(\frac{t-t_1}{r}\right) + \log r \cdot \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r}$$

soddisfa l'equazione (5). Quindi potremo prendere nella (16)

$$\chi = \chi_1 - f(1) - \frac{\pi}{2}\log r.$$

Poiché χ risulta nullo sopra C', così nella (16) sparirà il secondo integrale. Facendo impiccolire indefinitamente ε, il terzo integrale tenderà verso zero; quindi chiamando Π' il primo integrale, avremo

$$(16'') \qquad \Pi' + \int_\alpha \left[\frac{\log r}{r}\psi + \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] d\alpha = 0.$$

Analogamente prendendo nella (17)

$$\chi = \chi_1 + f(1) + \frac{\pi}{2}\log r$$

e chiamando Π'' il primo integrale otterremo

$$\Pi'' - \int_\alpha \left[\frac{\log r}{r}\psi - \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] d\alpha = 0,$$

onde sommando questa equazione membro a membro colle (16″) risulterà

$$(24) \qquad \Pi' + \Pi'' + 2\int_\alpha \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\alpha = 0.$$

Ma questa eguaglianza vale qualunque sia t_1; perciò derivando rapporto a t_1, si avrà

$$(25) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}(\Pi' + \Pi'') + 2\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\alpha \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\alpha = 0.$$

Abbiamo ora

$$\begin{aligned}
\Pi' + \Pi'' = \int_\alpha \Bigg\{ &\left[\log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\,\text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r}\right]\psi \\
&- \left[f\left(\frac{t-t_1}{r}\right) + \log r\,\text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r}\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\Bigg\} d\sigma \\
&+ \frac{\pi}{2}\left\{\int_{\sigma'} \psi\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\sigma' - \int_{\sigma''} \psi\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\sigma''\right\} \\
&+ \int_{\sigma'} \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma' \\
&- \int_{\sigma''} \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma'';
\end{aligned}$$

quindi derivando otterremo

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\Pi' + \Pi'') = \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \log\left(\frac{r^2 - (t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi d\sigma$$

$$+\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\psi d\sigma$$

$$+\int_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$-\pi\int_l \psi\frac{\partial\log r}{\partial n}\frac{dl}{\operatorname{sen}(tn)} - 2\int_l\left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{dl}{\operatorname{sen}(tn)}.$$

Inoltre si ha

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\alpha\left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}d\alpha = f(1)\left\{\int_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}\frac{dl}{\operatorname{sen}(tn)} + \int_\alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}d\alpha\right\}$$

$$+\frac{\pi}{2}\left\{\int_l \log r\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}\frac{ds}{\operatorname{sen}(tn)} + \int_\alpha \log r\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}d\alpha\right\}.$$

Avuto riguardo alle relazioni (22) ed al lemma di GREEN, la (25) potrà quindi scriversi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma \tag{26}$$

$$+\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\psi\, d\sigma$$

$$+\int_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$+\pi\left\{\int_l\left(\log r\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl + \int_\alpha \log r\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)d\alpha\right\} = 0.$$

Ma pel teorema di GREEN, il termine scritto nell'ultima linea è eguale a $2\pi^2\psi(x_1, y_1, t_1)$; per conseguenza otteniamo finalmente la formula

$$-2\pi^2\psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma \tag{27}$$

$$+\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\psi\, d\sigma$$

$$+\int_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Supponendo che la superficie σ si riduca ad una superficie cilindrica avente le generatrici parallele all'asse t le due formule (27) e (23) si riducono immediatamente alle (3) e (4).