

NOTA II

Ibidem, pp. 565-577.

7. - Riprendiamo lo studio dei gruppi infiniti di operazioni funzionali e mostriamo che ciascuno di essi contiene la operazione identica. Si osservi a tale scopo che una espressione del tipo

$$\int_l j(x, y)v(y) dy,$$

sarà atta a rappresentare la funzione $v(x)$ le quante volte la linea l del piano y sia chiusa, non contenga alcun punto singolare della funzione $v(y)$ e il solo punto singolare $y = x$ della funzione $j(x, y)$ col residuo $1/2\pi i$.

Se dunque si può determinare un integrale $j(x, y)$ della (3), che divenga infinito del primo ordine col residuo $1/2\pi i$ per $y = x$ e si mantenga regolare in un certo campo, per y diverso da x , questo integrale $j(x, y)$, scegliendo opportunamente la linea l , dà luogo all'operazione identica.

Per mostrare l'esistenza di un integrale siffatto, si ponga nella (3) $a(x, y) = 1/b(x, y)$ e si trasformi la (3) stessa in modo che la funzione incognita sia $b(x, y)$. Per un punto x, y_0 , nel quale i coefficienti dell'equazione trasformata si comportano regolarmente, esiste, in base al teorema della signora KOVALEWSKI, se l'ordine dell'equazione differenziale è maggior d'uno (per l'equazione di prim'ordine si veggia il § 3), un integrale, regolare in un certo intorno della coppia (x, y_0) , che si annulla per $y = y_0$ ed ha la derivata

$$\left(\frac{\partial b(x, y)}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 2\pi i.$$

Di questo integrale $b(x, y)$ si può inoltre asserire che non si annulla in due intorni assegnabili dei punti x, y_0 (esclusa, si intende, la coppia x, y_0).

In particolare, se si prende x in modo che, nel punto x del piano $x, y_0 = x$ del piano y , i coefficienti dell'equazione trasformata sieno regolari, si avrà un integrale $b(x, y)$, che si annulla per $y = x$, si mantiene finito e diverso da zero in un certo campo, per y differente da x , ed ha la derivata

$$\left(\frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right)_{y=x} = 2\pi i.$$

La funzione reciproca $j(x, y) = 1/b(x, y)$ è la funzione cercata. Essa infatti è, in un certo campo, regolare per y diverso da x ed ha nel punto $y = x$ un infinito di prim'ordine; il residuo corrispondente è dato da:

$$\lim_{y \rightarrow x} (y - x)j(x, y) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y - x}{b(x, y)} = \frac{1}{\left(\frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right)_{y=x}} = \frac{1}{2\pi i},$$

come volevasi dimostrare.

8. - La proprietà caratteristica, che ci ha condotto ai gruppi infiniti di operazioni si è la permutabilità con una forma lineare Δ , espressa dall'equazione:

$$(2) \quad \Delta \Delta v(y) = \Delta \Delta v(y).$$

Indicando con t una costante e aggiungendo $t\Delta v(y)$ da una parte e dall'altra, ne deduciamo la relazione più generale:

$$(11) \quad \Delta(\Delta + t)v(y) = (\Delta + t)\Delta v(y),$$

da cui, se si suppone che la funzione $v(y)$ soddisfaccia all'equazione differenziale ordinaria:

$$(\Delta + t)v(y) = 0,$$

segue, ponendo al solito $\Delta v(y) = u(x)$,

$$(\Delta + t)u(x) = 0,$$

cioè a dire:

Le operazioni del gruppo permutabile con una forma lineare Δ trasformano le soluzioni di una qualunque equazione differenziale

$(\Delta + t)v(y) = 0$ (dove t è un parametro arbitrario) in soluzioni della stessa equazione. In altri termini:

Le equazioni differenziali lineari $(\Delta + t)v(y) = 0$ hanno, qualunque sia il valore di t , carattere invariante di fronte a tutte le operazioni A del gruppo permutabile con Δ .

Le equazioni gruppali (3), come fu osservato a § 3, si possono scrivere:

$$\Delta a(x, y) - \Delta' a(x, y) = 0,$$

dove Δ' è la forma aggiunta a Δ .

Ora è noto che, se di due forme lineari una è aggiunta dell'altra, la relazione è reciproca; sicchè dall'essere Δ' aggiunta a Δ segue Δ aggiunta a Δ' . Ne viene che, se si assume come fondamentale la forma Δ' e si cercano le operazioni permutabili con essa, per definire le funzioni caratteristiche, si deve ritrovare la medesima equazione (3), salvo però lo scambio delle variabili x ed y . In altri termini ciascun integrale $a(x, y)$ della (3) viene a mutarsi in $a(y, x)$ e corrispondentemente ogni operazione funzionale

$$Av(x) = \int_i a(x, y)v(y) dy$$

nella sua associata

$$A'v(x) = \int_i a(x, y)v(x) dx.$$

Si ha quindi immediatamente:

Come le equazioni $(\Delta + t)v(y) = 0$ hanno carattere invariante di fronte alle operazioni A , così le equazioni aggiunte $(\Delta' + t)v(y) = 0$ hanno carattere invariante rispetto alle operazioni associate A' .

Di questo risultato dovremo far uso a suo tempo (§ 11).

9. - Applichiamo le considerazioni precedenti al caso particolare di una forma Δ del primo ordine e mostriamo come esse permettano di invertire l'integrale:

$$(12) \quad w(z) = \int_i a(z, y)v(y) dy \quad (l \text{ linea del tipo } b), c),$$

quando la funzione caratteristica $a(z, y)$ rende soddisfatta l'equazione grupale del prim'ordine:

$$p_0(z) \frac{\partial a}{\partial z} + p_0(y) \frac{\partial a}{\partial y} + \left\{ p_1(z) - p_1(y) + p'_0(y) \right\} a = 0,$$

ha cioè, come si è visto (§ 3), la forma:

$$(3') \quad a = \frac{1}{p_0(y)} e^{\int_{z_0}^z \frac{p_1(z)}{p_0(z)} dz - \int_{y_0}^y \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy} \Phi \left(\int_{z_0}^z \frac{dz}{p_0(z)} - \int_{y_0}^y \frac{dy}{p_0(y)} \right).$$

Sostituendo nella (12) per $a(z, y)$ la sua espressione effettiva (3') e ponendo:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{z_0}^z \frac{dz}{p_0(z)} = \zeta, \quad \int_{y_0}^y \frac{dy}{p_0(y)} = \eta, \\ e^{-\int_{z_0}^z \frac{p_1(z)}{p_0(z)} dz} w(z) = w_1(\zeta), \quad e^{-\int_{y_0}^y \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy} v(y) = v_1(\eta), \end{array} \right.$$

si ottiene:

$$(12') \quad w_1(\zeta) = \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta) d\eta,$$

dove la linea λ è la immagine della l nel piano

$$\eta = \int_{y_0}^y \frac{dy}{p_0(y)}.$$

Possiamo dunque, in luogo che dalla (12), prender le mosse dalla relazione più semplice (12').

I problemi di inversione, che rientrano nel tipo (12'), si sanno risolvere (*) a mezzo dei polinomi di APPELL. Essi permettono di costruire una funzione $\Phi'(\zeta - \xi)$, per la quale, scelta opportunamente una linea di integrazione λ' ,

$$v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w(\zeta) d\zeta.$$

(*) PINCHERLE, *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des integrales définies*, « Acta Math. », vol. 10, 1887; PINCHERLE, *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell*, « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei », ser. 4, tom. 2 (1886).

Tuttavia con tale procedimento si determinano bensì i successivi coefficienti dello sviluppo di $\Phi'(\xi - \zeta)$ per potenze di $\xi - \zeta$, ma non vien fatto di assegnarne una espressione complessiva. Vi si arriva invece in modo assai semplice, applicando la osservazione del paragrafo precedente alle funzioni caratteristiche della forma $\Phi(\zeta - \eta)$. Per esse vale l'equazione di APPELL

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0,$$

che è la più semplice delle equazioni gruppali (3); la forma Δ si riduce alla derivazione D e le corrispondenti equazioni invariantive sono tanto per il gruppo, quanto per il suo associato (§ 8): $(D + t)v_1(\eta) = 0$, da cui discende che, se una funzione $v_1(\eta)$ la rende soddisfatta, cioè $v_1(\eta) = Ce^{-t\eta}$, la funzione trasformata $w_1(\zeta)$ sarà anch'essa necessariamente del tipo $C'e^{-t\zeta}$ con C' costante generalmente diversa da C .

Posto ciò, osservo che, se λ è una curva chiusa, l'integrale (12)' si potrà dire invertito, quando siasi determinata una funzione $\Phi'(\xi - \zeta)$ e una linea λ' tali che

$$(14) \quad \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta)\Phi(\zeta - \eta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i(1 - e^{\xi - \eta})},$$

dove il secondo membro rientra nell'espressione generale dianzi assegnata per le funzioni $j(x, y)$.

Intendendo di prendere il segno superiore o inferiore secondochè la parte reale di η sarà maggiore o minore di quella di ξ , si potrà porre,

$$\frac{1}{2\pi i(1 - e^{\xi - \eta})} = \frac{1}{2\pi i} \sum_0^{\infty} e^{\pm t(\xi - \eta)}$$

e riescirà di soddisfare almeno formalmente all'equazione (14) con una funzione:

$$(15) \quad \Phi'(\xi - \zeta) = \sum_0^{\infty} C_t e^{\pm t(\xi - \zeta)},$$

purchè si prenda:

$$(16) \quad C_t = \frac{1}{2\pi i \int_{\lambda'} \Phi(\zeta) e^{\mp t\zeta} d\zeta}.$$

Si avrà infatti:

$$\int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) \Phi(\zeta - \eta) d\zeta = \sum_0^{\infty} C_t e^{\pm t\xi} \int_{\lambda'} \Phi(\zeta - \eta) e^{\mp t\zeta} d\zeta,$$

e, siccome le funzioni del tipo $e^{\mp t\zeta}$ mantengono la loro forma, dovranno sussistere le identità:

$$\int_{\lambda'} \Phi(\zeta - \eta) e^{\mp t\zeta} d\zeta = C'_t e^{\mp t\eta} \quad (t = 0, 1, \dots, \infty).$$

Facendo $\eta = 0$, segue $C'_t = 1/(2\pi i C_t)$, dopo di che la (14) si trova senz'altro verificata.

La linea di integrazione λ' si dovrà scegliere in modo che, per tutti i valori ζ di λ' e per i valori ξ di un certo campo S , interno ad un tempo a λ e a λ' , una almeno delle due serie

$$\sum_0^{\infty} C_t e^{t(\xi - \zeta)}, \quad \sum_0^{\infty} C_t e^{-t(\xi - \zeta)}$$

riesca convergente; con tale avvertenza quella delle due soluzioni formali espresse dalle (15) (16), che corrisponde alla serie convergente, acquista senz'altro un valore effettivo.

Invero ponendo:

$$v'_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w_1(\zeta) d\zeta,$$

per i valori di ζ , che appartengono ad S , $\Phi'(\xi - \zeta)$ sarà dato da,

$$\sum_0^{\infty} C_t e^{t(\xi - \zeta)},$$

immaginando, per fissar le idee, di assumere il segno superiore.

Sostituendo per $w_1(\zeta)$ il valore (12') verrà:

$$v(\xi) = \int_{\lambda'} \sum_0^{\infty} C_t e^{t(\xi - \zeta)} d\zeta \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta) d\eta,$$

e, invertendo le integrazioni:

$$\begin{aligned} v'_1(\xi) &= \int_{\lambda} v_1(\eta) d\eta \sum_0^{\infty} C_t e^{t\xi} \int_{\lambda'} \Phi(\zeta - \eta) e^{-t\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} v_1(\eta) d\eta \sum_0^{\infty} e^{t(\xi - \eta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} v_1(\eta) \frac{1}{1 - e^{\xi - \eta}} d\eta; \end{aligned}$$

l'ultimo integrale, corrispondentemente ai punti ξ di S , pei quali appunto è legittimo il seguito procedimento, ha il valore $v_1(\xi)$, come si voleva provare. Naturalmente, conoscendo $v_1(\xi)$ entro S , basta continuarlo analiticamente per averlo in tutto il piano. È opportuno osservare che l'espressione

$$v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w_1(\zeta) d\zeta$$

vale, qualora si faccia per $v_1(\xi)$ l'ipotesi che si mantenga regolare lungo la linea λ ; secondo la natura delle singolarità, di cui la v_1 stessa si suppone dotata, si ha per $v_1(\xi)$ una espressione diversa, ma sempre determinata in modo univoco, scelta che sia la linea λ' . Così per esempio, se si immagina che, nei punti α_i ($i = 1, 2, \dots, h$) essa abbia dei poli di prim'ordine di residuo H_i , l'integrale precedente:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} v_1(\eta) \frac{1}{1 - e^{\xi - \eta}} d\eta,$$

riesce eguale a:

$$v_1(\xi) + \sum_1^h H_i \frac{1}{1 - e^{\xi - \alpha_i}},$$

e quindi l'espressione di $v_1(\xi)$ a mezzo di $w_1(\zeta)$ diviene:

$$v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w(\zeta) d\zeta - \sum_1^h H_i \frac{1}{1 - e^{\xi - \alpha_i}}.$$

Accennerò ancora, benchè sia cosa nota ⁽¹⁰⁾, che la questione di sviluppare una funzione assegnata $w_1(\zeta)$ in serie ordinata secondo un sistema di polinomi di APPELL $P_n(\zeta)$, si riconduce all'inversione di un integrale della forma (12').

Si ha infatti, essendo A una operazione qualunque del gruppo di APPELL: $P_n(\zeta) = A\xi^n$, poichè, per l'invertibilità di A con D , vale la relazione caratteristica: $DP_n(\zeta) = nP_{n-1}(\zeta)$ e, siccome $A\xi_0 = \text{cost.}$, così le funzioni P_n sono effettivamente dei polinomi.

Sia in particolare:

$$P_n(\zeta) = \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) \eta^n d\eta$$

⁽¹⁰⁾ PINCHERLE, loco citato.

il sistema di polinomi, secondo cui si debba sviluppare una funzione assegnata $w_1(\zeta)$.

Si ponga:

$$v_1(\eta) = \int_{\lambda'} \Phi'(\eta - \zeta) w_1(\zeta) d\zeta,$$

e si immagini di avere lo sviluppo $\sum_0^{\infty} c_n \eta^n$ di $v_1(\eta)$ per le potenze positive di η ; siccome la funzione $v_1(\eta)$ è tale che:

$$\int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta) d\eta = w_1(\zeta),$$

così potremo scrivere

$$w_1(\zeta) = \sum_0^{\infty} c_n \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) \eta^n d\eta,$$

che porge appunto $w_1(\zeta)$ sviluppata per il sistema di polinomi:

$$P_n(\zeta) = \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) \eta^n d\eta.$$

10. — Per dare un esempio di effettiva inversione, supponiamo che la linea λ sia una circonferenza di raggio R col centro nell'origine delle coordinate e che la funzione $\Phi(\zeta)$ abbia tutte le sue singolarità comprese entro un cerchio di raggio non maggiore di $R/3$.

Rispetto alla natura di queste singolarità noi non facciamo alcuna ipotesi, ammettiamo soltanto che almeno un polo isolato sia situato nel semipiano negativo.

Posto ciò, essendo $v_1(\eta)$ una funzione regolare entro il cerchio di raggio R , la:

$$(12') \quad w_1(\zeta) = \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta) d\eta$$

rappresenta, entro un cerchio di raggio minore di $(2/3)R$, quindi per esempio entro un cerchio di raggio $R/3$, una funzione regolare di ζ .

Assumiamo per λ' una linea chiusa di forma qualunque tutta contenuta entro il cerchio λ , che non passi, si intende, per nessun punto singolare di $\Phi(\zeta)$ e comprenda nel suo interno un certo numero finito di

poli $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, di cui mai due situati sulla stessa parallela all'asse immaginario e uno almeno appartenente al semipiano negativo.

È lecito porre tali condizioni, poichè si è ammesso che tra i punti singolari vi sia certamente un polo isolato nel semipiano negativo.

Tenendo presenti queste ipotesi, avremo dalla (16), adottando il segno superiore:

$$C_t = \frac{1}{2\pi i \int_{\lambda'} \Phi(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta} = - \frac{1}{4\pi^2 \sum_1^m K_i e^{-t\beta_i}}.$$

Dallo sviluppo di $\Phi(\zeta)e^{-t\zeta}$ nell'intorno di un punto singolare β_i , si riconosce che le K_i possono contenere potenze di t , però soltanto in numero finito perchè i punti β_i non sono singolarità essenziali; essendo pertanto ciascun K_i un polinomio in t , si avrà per considerazioni note $\lim_{t \rightarrow \infty} K_i e^{-t} = 0$.

Ciò posto, si può far corrispondere l'indice $i = m$ a quel punto singolare β , che ha la parte reale minima. Si potrà allora scrivere:

$$C_t = - \frac{e^{-t\beta_m}}{4\pi^2 K_m \left\{ 1 + \sum_1^{m-1} \frac{K_i}{K_m} e^{-t(\beta_i - \beta_m)} \right\}},$$

in cui, siccome ciascuna $-(\beta_i - \beta_m)$ ha la parte reale negativa, prendendo t sufficientemente grande, la

$$\sum_1^{m-1} \frac{K_i}{K_m} e^{-t(\beta_i - \beta_m)}$$

può rendersi in modulo piccola quanto si vuole, per esempio $< 1/2$; quindi, a partire da un certo valore τ di t , si avrà:

$$|C_t| < \frac{|e^{t\beta_m}|}{2\pi^2 |K_m|};$$

di più, per $t < \tau$, le singole C_t avranno un valore finito, se si esclude il caso particolarissimo che gli indici dei punti singolari e i residui corrispondenti soddisfacciano a relazioni della forma:

$$(17) \quad \sum_1^m K_i e^{-t\beta_i} = 0,$$

per qualche valore intero di t compreso fra 0 e τ .

Si prenda ora a considerare la serie:

$$\Phi'(\xi - \zeta) = \sum_0^{\infty} C_t e^{t(\xi - \zeta)};$$

per $t > \tau$, i suoi termini sono in valore assoluto minori di:

$$\frac{1}{2\pi^2 |K_m|} |e^{t(\xi - \zeta + \beta_m)}|,$$

quindi la serie stessa converge, quando $R(\xi - \zeta + \beta_m) < 0$, il simbolo $R(\xi - \zeta + \beta_m)$ designando la parte reale di $\xi - \zeta + \beta_m$.

Ora sia $-p$ (certamente negativa perchè λ' contiene per ipotesi almeno un punto singolare di Φ situato nel semipiano negativo) la proiezione sull'asse reale del punto più a destra di λ' e si guidi per il punto di ascissa $-p - R(\beta_m)$, che è più a destra di $-p$, perchè $R(\beta_m) < 0$, la parallela all'asse immaginario; riesce determinata una regione non nulla S di punti interni a λ' e situati a sinistra della detta parallela, la quale regione potrebbe come caso particolare comprendere tutto l'interno di λ' .

Si ha per i punti ξ di S

$$R(\xi) < p - R(\beta_m), \quad \text{cioè} \quad R(\xi) + p + R(\beta_m) > 0;$$

d'altra parte, per ogni punto ζ situato sopra la linea λ' :

$$R(\zeta) > p \quad \text{cioè} \quad -R(\zeta) < p,$$

onde sommando $R(\xi - \zeta + \beta_m) < 0$, la quale disuguaglianza, che assicura la convergenza della serie, si trova così soddisfatta per tutte le coppie ξ, ζ di punti situati rispettivamente entro S e sopra λ' .

Si ha dunque per i punti ξ di S :

$$(18) \quad v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w_1(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\lambda'} \sum_0^{\infty} \frac{e^{t(\xi - \zeta)}}{\sum_1^m K_i e^{-t\beta_i}} w_1(\zeta) d\zeta.$$

Nella maggior parte dei casi la funzione Φ avrà soltanto un numero finito di poli; escluso che tra essi passino relazioni del tipo (17), si può a priori fissare per linea di integrazione λ' la circonferenza concentrica a λ di raggio eguale a $R/3$.

II. - Il procedimento, che abbiamo tenuto per invertire la (12'), si può applicare in modo analogo ad ogni integrale:

$$(19) \quad w(z) = \int_i a(z, y)v(y) dy,$$

dove $a(z, y)$ soddisfa ad una equazione grupale (3).

Come infatti nel caso precedente tutto sta nell'osservare che la operazione di APPELL, che è associata di sè stessa, trasforma le funzioni Ce^{tn} in funzioni della stessa forma, così il criterio generale, che passiamo ad esporre, trova il suo fondamento nella proprietà analoga, caratteristica delle operazioni del gruppo associato, di cambiare (§ 8) gli integrali di:

$$(\Delta' + t)v(y) = 0$$

in integrali dell'equazione identica:

$$(\Delta' + t)w(z) = 0.$$

Ricordiamo (§ 3) che, se insieme alla equazione $(\Delta + t)u(x) = 0$ si considera l'aggiunta $(\Delta' + t)v(y) = 0$ e si indicano con

$$X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(n)}; \quad Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, \dots, Y_t^{(n)},$$

due sistemi fondamentali di integrali, il prodotto di due qualunque tra essi soddisfa all'equazione a derivate parziali (3). Si faccia ora

$$X_t = \sum_1^n \delta_{tr} X_t^{(r)},$$

dove le δ sono costanti e si supponga che una espressione del tipo:

$$(20) \quad j(x, y) = \sum_0^\infty X_t \sum_1^n C_{tr} Y_t^{(r)}$$

sia atta a fornire l'operazione identica.

Io dico che si potrà formalmente invertire l'integrale (19) con una espressione del tipo:

$$v(x) = \int_i a'(x, z)w(z) dz,$$

ponendo:

$$(21) \quad a'(x, z) = \sum_0^{\infty} X_t \sum_1^n D_{ts} Z_t^{(s)},$$

e determinando in modo conveniente la linea di integrazione l' e le costanti D_{ts} .

Ammissa infatti per $a'(x, z)$ la forma (21), basterà, come al § 9, cercar di rendere:

$$\int_{l'} a'(x, z) a(z, y) dz = j(x, y).$$

Ora per l'invarianza di $(\Delta' + t)w(z) = 0$ di fronte a tutte le operazioni del gruppo associato, ogni espressione del tipo

$$\int_{l'} a'(z, y) Z_t^{(s)} dz$$

sarà ancora un integrale dell'equazione $(\Delta' + t)w(z) = 0$, quindi dovranno sussistere le identità:

$$(22) \quad \int_{l'} a(z, y) Z_t^{(s)} dz = \sum_1^{\infty} \gamma_{tsr} Y_t^{(r)} \quad (t = 0, 1, 2, \dots, \infty; s = 1, 2, \dots, n).$$

Ponendo in

$$\int_{l'} a'(x, z) a(z, y) dz$$

per $a'(x, z)$ il suo valore dato dalla (21), verrà in causa della (22)

$$\int_{l'} a'(x, z) a(z, y) dz = \sum_0^{\infty} X_t \sum_r^n Y_t^{(r)} \sum_1^n D_{ts} \gamma_{tsr}.$$

Basta quindi, per ciascun valore di t , determinare le n costanti D_{ts} in modo che:

$$\sum_1^n D_{ts} \gamma_{tsr} = C_{tr} \quad (t = 0, \dots, \infty; r = 1, 2, \dots, n)$$

e si ha in $a'(x, z)$ la funzione richiesta.

Si potrebbe assegnare l'espressione definitiva di $a'(x, z)$ e considerare qualche caso semplice, in cui la soluzione formale avesse anche un valore effettivo; ritengo tuttavia superfluo di insistere, bastandomi di aver accennato come i criteri gruppali si possano seguire con vantaggio in questi problemi di inversione.

Voglio ancora osservare (per la dimostrazione si cfr. il § 9) che le formule precedenti permettono di sviluppare una funzione assegnata $w(z)$ in serie procedenti per le funzioni del sistema:

$$P_n(z) = \int_i a(z, y) y^n dy,$$

$a(z, y)$ essendo una qualunque funzione gruppale.

Padova, Marzo 1895.