VI.

# DI UNA ESPRESSIONE ANALITICA ATTA A RAPPRESENTARE IL NUMERO DEI NUMERI PRIMI IN UN DETERMINATO INTERVALLO

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV, (1º sem., 1895),

pp. 303-309 (*).

La questione di rappresentare con una funzione il numero dei numeri primi compreso in un intervallo determinato, o l'altra, sotto un certo rispetto equivalente, di fissare un carattere distintivo dei numeri primi diede origine a ricerche importanti di molti matematici, colle quali, se non fu raggiunto l'intento, tuttavia venne largo contributo alla scienza di considerazioni feconde. Basterà ricordare che GAUSS, DIRICHLET e TCHEBICHEFF, prendendo le mosse da questo problema, furono condotti a notevoli risultati di teoria dei numeri e oltre a ciò assegnarono espressioni più o meno approssimate del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo.

RIEMANN nella Memoria: *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeneben Grösse* (1), risolse in certo senso una tale questione, poichè riescì a rappresentare con una funzione $F(x)$ il numero dei numeri primi inferiori ad $x$; però codesta soluzione, malgrado la sua grande genialità, apparisce oltremodo complicata e, quasi direi, speciosa, se si osserva che, per costruire la funzione $F(x)$ di RIEMANN si ha la formola

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f(x^{1/m}) ,$$

(*) Presentata dal Socio corrispondente G. VERONESE nella seduta del 7 Aprile 1895.

(1) Ges. Werke, p. 136, Leipzig, (1876); cfr. anche P. BACHMANN, *Zahlentheorie*, Zweiter Theil, p. 382, Leipzig, (1894).

dove, essendo $f(x)$ una funzione, che si può risguardare conosciuta

$$\left(f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \log\left\{\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^s}\right\}\frac{ds}{s}\right),$$

la sommatoria va estesa successivamente a tutti i numeri $m$ non divisibili per alcun quadrato all'infuori dell'unità, e $\mu$ designa il numero dei fattori primi di $m$. Ne viene che, per calcolare effettivamente $F(x)$, bisognerebbe immaginare di conoscere, per ciascun numero naturale $m$, se esso ammette fattori primi eguali e, quando siano tutti differenti, se il loro numero è pari o dispari. In altri termini si dovrebbe risguardar nota la funzione $\mu(m)$ di MERTENS (²).

Parmi pertanto non superfluo di riprendere sotto un diverso punto di vista questo stesso problema, proponendomi di eliminare la difficoltà, che si incontra nel procedimento di RIEMANN. In ciò che segue, si troverà assegnata (a mezzo di un integrale definito) l'espressione analitica del numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo; incidentalmente mi si presenterà occasione di indicare un criterio di immediata applicabilità per riconoscere se un dato numero sia primo.

La serie (di LAMBERT) (³) $\sum_1^\infty {}_m\, x^m/1 - x^m$ converge, come si riconosce agevolmente, per tutti i punti $|x| < 1$ ed è sviluppabile in serie di potenze di $x$ entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Si sa, e questa costituisce la proprietà caratteristica dello sviluppo, osservata già da LAMBERT, che il coefficiente di $x^n$ è uguale al numero dei divisori di $n$; quindi, escludendo per $n$ il valore 1, questo coefficiente sarà eguale a 2, quando $n$ è un numero primo, maggiore di due nel caso opposto.

Ponendo

(1) $$S(x) = \sum_1^\infty {}_m \frac{x^m}{1 - x^m} - \frac{2x^2}{1 - x} - x\,,$$

si potrà, per $|x| < 1$, avere $S(x)$ espresso sotto la forma

(2) $$S(x) = \sum_1^\infty {}_m\, c_m x^m\,,$$

---

(²) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, « Giornale di Crelle », tomo LXXVII, (1874) p. 289.

(³) Veggasi, ad es., G. EISENSTEIN, « Giornale di Crelle », tomo XXVII (1844); M. CURTZE, *Notes diverses sur la série de* LAMBERT *et la loi des nombres premiers*, « Ann. di Mat. », ser. 2ª, t. I (1867–68), p. 285; S. PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », serie IV, tomo III (1882).

dove $c_m$ è nullo, se $m$ è un numero primo, maggiore o eguale ad 1 in tutti gli altri casi.

Tracciata una circonferenza $C$ col centro nell'origine, di raggio $\varrho$, eguale, per esempio, ad 1/2, la serie $\sum_1^\infty {}_m\, c_m x^m$ convergerà in egual grado lungo $C$ e sarà quindi integrabile termine a termine; lo stesso si potrà dire del prodotto $x^z \sum_1^\infty {}_m\, c_m x^m$, qualunque sia il numero finito $z$ reale o complesso, poichè $x$ non si annulla, nè diviene infinito lungo la circonferenza. C'è da osservare soltanto che, $x^z$ essendo funzione multiforme, bisogna fissare come e su quale degli infiniti rami di $x^z \sum_1^\infty {}_m\, c_m x^m$ si opera l'integrazione. Questo si fa nel modo più semplice, ponendo $x = \varrho e^{i\theta}$ e conducendo l'integrazione lungo la circonferenza $C$ da $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$. Le altre determinazioni dello stesso integrale si avrebbero facendo variar $\theta$ da un valore iniziale arbitrario $\theta_0$ a $\theta_0 + 2\pi$.

Ponendo pertanto

$$(3) \qquad P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1} S(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varrho^z e^{iz\theta} S(\varrho e^{i\theta})\, d\theta\,,$$

resta determinato in modo unico una funzione uniforme $P(z)$ della variabile complessa $z$, singolare soltanto per $z = \infty$, cioè una trascendente intera.

Indicando con $n$ un numero intero, si ha immediatamente

$$(4) \qquad P(n) = 0 \qquad (n \geqslant 0)\,,$$

$$(5) \qquad P(-n) = c_n \qquad (n \geqslant 1)\,.$$

La (5) merita di essere notata, perchè, dato ad arbitrio un numero intero $n$, permette di decidere se esso sia o no primo.

Per ogni altro valore non intero di $z$, ponendo ancora $x = \varrho e^{i\theta}$ e tenendo presente l'osservazione fatta, si può scrivere $P(z)$ sotto la forma

$$(6) \qquad P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_1^\infty {}_m\, c_m x^{m+z-1}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \sum_1^\infty {}_m\, c_m \frac{x^{m+z}}{m+z} \right\}_{\varrho e^0}^{\varrho e^{2\pi i}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\, \varrho^z (e^{2\pi i z} - 1) \sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m+z}\,.$$

Se $z$ non è reale e quindi del tipo $\mu + i\nu$ (con $\nu$ diverso da zero), mettendo in evidenza in $\sum_1^\infty{}_m c_m \varrho^m/(m+z)$ la parte reale e la parte immaginaria, potremo scrivere

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\varrho^z(e^{2\pi i z}-1)\left\{\sum_1^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m(m+\mu)}{(m+\mu)^2+\nu^2} - i\nu\sum_1^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m}{(m+\mu)^2+\nu^2}\right\},$$

da cui apparisce che $P(z)$ non può annullarsi per valori complessi dell'argomento $z$. Infatti, $\varrho^z$, $e^{2\pi i z}-1$ non vanno certamente a zero per valori finiti non interi di $z$ e nel terzo fattore il coefficiente dell'unità immaginaria

$$-\nu\sum_1^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m}{(m+\mu)^2+\nu^2)},$$

siccome i termini della serie sono tutti positivi, non si può annullare per $\nu \lessgtr 0$, quindi il fattore stesso è certamente diverso da zero.

Ciò posto, noi ci proponiamo di determinare per ciascun numero intero negativo $-n$ un cerchio di centro $-n$ e di raggio $r_n$, entro cui non cade alcuna o tutt'al più una radice dell'equazione $P(z)=0$. Siccome si è visto or ora che $P(z)$ non può avere radici immaginarie, basterà prendere in esame i valori reali di $z$ nell'intorno di ciascun $-n$.

Supporremo dapprima $n$ non primo. Allora, facendo nella (6), $z=-n\pm r_n$, il terzo fattore

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n},$$

potrà essere scritto

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n} = -\sum_1^{n-1}{}_m \frac{c_m\varrho^m}{n-m\mp r_n} \pm \frac{c_n\varrho^n}{r_n} + \sum_{n+1}^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n}, \quad (c_n>0).$$

Assumendo $r_n$ già minore di $1/2$, avremo manifestamente nelle due sommatorie del secondo membro

$$\left|\frac{1}{m-n\pm r_n}\right| < 2, \qquad c_m < m,$$

qualunque sia $m$, e per conseguenza

$$\left|-\sum_1^{n-1}{}_m \frac{c_m\varrho^m}{n-m\mp r_n} + \sum_{n+1}^\infty{}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n}\right| < 2\sum_1^\infty{}_m m\varrho^m < \frac{2\varrho}{(1-\varrho)^2} = 4,$$

per essersi fin da principio assunto $\varrho = 1/2$; ne viene che, prendendo $r_n$ in modo da rendere

$$\frac{c_n \dfrac{1}{2^n}}{r_n} \geqslant 4\,,$$

cioè, per esempio, $r_n = 1/2^{n+2}$, nell'intervallo da $(-n - 1/2^{n+2})$ a $(-n + 1/2^{n+2})$ non cade alcuna radice dell'equazione.

Se invece $n$ è primo e quindi $c_n = 0$, mettendo in evidenza il primo termine non nullo, potremo scrivere (per $n > 3$)

$$\sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n} = \frac{-\varrho^4}{n - 4 \mp r^n} - \sum_5^{n-1} {}_m \frac{c_m \varrho^m}{n - m \mp r_n} + \sum_{n+1}^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n}\,;$$

qui, assumendo ancora $r_n \leqslant 1/2$, avremo dappertutto

$$\left| \frac{c_m}{m - n \pm r_n} \right| < 2m\,,$$

onde per la parte positiva, sarà (*)

$$\sum_{n+1}^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n} < 2 \sum_{n+1}^\infty {}_m\, m\varrho^m = 2\varrho \left[ \frac{1}{(1-\varrho)^2} - 1 - 2\varrho - 3\varrho^2 - \ldots - n\varrho^{n-1} \right]$$

$$= \frac{2\varrho^{n+1}\{1 + n(1-\varrho)\}}{(1-\varrho)^2} = \frac{n+2}{2^{n-1}}\,, \quad \text{per} \quad \varrho = 1/2\,;$$

d'altronde la parte negativa non è certamente inferiore in valore assoluto al suo primo termine $\varrho^4/(n - 4 \mp r_n)$ e siccome

$$\frac{\varrho^4}{n - 4 \mp r_n} \geqslant \frac{1}{16(n - 4 + r_n)} > \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad \text{per} \quad n \geqslant 12\,,$$

così si può senz'altro asserire che, se $n$ è primo, nell'intervallo da $(-n - 1/2)$ a $(-n + 1/2)$ e quindi a più forte ragione nell'intervallo da $(-n - 1/2^{n+2})$ a $(-n + 1/2^{n+2})$, l'espressione $\sum_1^\infty {}_m\, c_m \varrho^m/(m + z)$ si mantiene costantemente negativa.

Riassumendo, si conclude che per $n \geqslant 12$, qualunque sia il numero intero $n$, entro il cerchio di centro $-n$ e di raggio $r_n = 1/2^{n+2}$ cade nessuna, ovvero soltanto una radice dell'equazione $P(z) = 0$. Si può proprio

(*) Nella formula successiva figura nell'originale qualche svista che è stata corretta. [N. d. R.].

asserire soltanto una, poichè i punti $-n$, con $n$ primo, in cui $P(z)$ si annulla, non sono radici multiple. Infatti, essendo $c_n = 0$, vale per $P(-n)$ l'espressione (6) e, siccome abbiamo visto che in questo caso $\sum_1^\infty {}_m c_m \varrho^m/(m+z)$ resta, per $z = -n$, finito e diverso da zero, $P(-n)$ si annulla come $e^{-2\pi i n} - 1$, cioè semplicemente.

Noi siamo ora in grado di determinare il numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo $(\alpha, \beta)$. Supporremo, ciò che si può fare senza restrizione, $\beta$, $\alpha$ non interi, $\beta > \alpha > 12$.

Indicando con $h$ un qualunque numero intero compreso fra $\alpha$ e $\beta$ e con $C_h$ la circonferenza di raggio $1/2^{n+2}$ descritta intorno a $-h$, per un noto teorema di CAUCHY, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_h} \frac{P'(z)}{P(z)}\, ex$$

rappresenta il numero delle radici di $P(z)$ comprese entro $C_h$, quindi 0 o 1 secondochè $h$ è numero composto o primo. Ne deduciamo che il numero $N_{\alpha\beta}$ dei numeri primi compresi fra $\alpha$ e $\beta$ potrà essere espresso da

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \int_{C_h} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz, \tag{7}$$

dove $E(\alpha)$, $E(\beta)$ designano, secondo la notazione di LEGENDRE, i massimi interi contenuti in $\alpha$ e $\beta$ rispettivamente, $P(z)$, come segue dalle (1), (3), è definito da

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C x^{z-1} \left\{ \sum_1^\infty {}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x \right\} dx = \sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{n!} z^n,$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\log x)^n \left\{ \sum_1^\infty {}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x \right\} \frac{dx}{x}.$$

Nell'espressione di $N_{\alpha\beta}$, le circonferenze $C_h$ si possono anche assumere tutte eguali alla minima tra esse $C_{E(\beta)}$ di raggio $\beta' = 1/2^{E(\beta)+2}$.

Indicando con $C'$ il cerchio di raggio $\beta'$ col centro nell'origine, si ha con facile trasformazione dalla (7)

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \int_{C'} \frac{P'(z-h)}{P(z-h)}\, dz = \frac{\beta'}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, d\theta \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \frac{P'(\beta' e^{i\theta} - h)}{P(\beta' e^{i\theta} - h)},$$

la qual formola risolve esplicitamente la questione, che ci eravamo proposti.