VII.

SULL' INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI NEL CAMPO REALE

« Atti Acc. Torino », vol. XXXI (1895-96), pp. 25-51

In alcune ricerche di analisi pura e in moltissimi problemi di fisica e di meccanica fa d'uopo invertire qualche integrale definito. Si può anzi affermare che non v'è ramo della fisica matematica, in cui non si incontrino difficoltà di questa natura. Con tutto ciò, per quanto almeno è a mia cognizione, non fu ancora dedicata a siffatto problema alcuna indagine sistematica; se ne considerarono soltanto, in causa del frequente loro apparire, alcuni casi particolari, per la cui trattazione furono da varii autori proposti disparati artifizii.

A tacere di alcune fomule di Cauchy, che pur rientrano in quest'ordine di studii, Abel, per il primo, da taluna ricerca sul moto brachistocrono venne condotto ad un teorema di inversione, che porta il suo nome e che, come mise in chiara luce il prof. Beltrami [1], è suscettibile di forme svariatissime, tanto che ad esso (finchè si resta nel campo reale [2]) quasi unicamente possono riportarsi i casi di inversione, che gli altri autori hanno ritrovato.

Molti di questi tuttavia presentano grande interesse per la questione che ne vien risolta e basterà ricordare tra i più notevoli il teorema di Schlömlich (sugli sviluppi in serie procedenti per funzioni cilindriche di argomenti mutlipli) e le molteplici applicazioni dello stesso prof. Beltrami.

Se io non mi inganno, eccedono il teorema di Abel soltanto una generalizzazione di esso riportata da Sonine nelle sue *Recherches sur les fonctions*

---

[1] *Intorno ad un teorema di* Abel, « Rend. dell'Istituto Lombardo », ser. II, vol. XIII; *Sulla teoria della attrazione degli ellissoidi*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. IV, tom. I.

[2] Nel campo complesso la questione fu già discussa sotto aspetto più generale da Abel e da Riemann; venne poi recentemente ripresa dal Prof. Pincherle, dal sig. Hj. Mellin e da me stesso.

cylindriques [3] e una breve, ma importantissima nota del prof. VOLTERRA [4], la quale costituisce forse il primo ed unico esempio di un criterio generale di inversione; il risultato è di ricondurre la questione ad altra più semplice della stessa natura, sì che talora anche riesce di raggiungere lo scopo definitivo.

Ciò accade del pari nel presente scritto; esso si informa (salvo le necessarie modificazioni, dovute alla maggior generalità delle funzioni, con cui si opera) allo stesso concetto fondamentale, che esposi già nella nota *I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti* [5].

Il primo § è destinato a dare il profilo generale di un metodo, che può condurre alla determinazione di $v(y)$ dalla formula:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, v(y)\, dy\,,$$

dove $u(x)$ e $v(y)$ si intendono funzioni integrabili e $f(x, y)$ soddisfa ad una equazione lineare a variabili separate del tipo:

$$\sum_0^n{}_r\, p_r(x) \frac{\partial^{n-r} f(x, y)}{\partial x^{n-r}} + \sum_0^m{}_s\, q_s(y) \frac{\partial^{m-s} f(x, y)}{\partial y^{m-s}} = 0\,,$$

che chiamo equazione caratteristica; i §§ seguenti sono dedicati alle applicazioni. Io ho considerato esclusivamente il caso che la equazione caratteristica in f sia del primo ordine, nella quale ipotesi si può ridurre senza difficoltà alla forma canonica:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x - y)\, v(y)\, dy\,.$$

Il procedimento accennato riesce completamente per due casi particolari molto interessanti, cioè:

$$u(x) = \int_a^x f(x - y) v(y)\, dy \quad \text{e} \quad u(x) = \int_a^b f(x - y) v(y)\, dy \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti}).$$

Per la prima di queste relazioni, ammessa press'a poco soltanto l'integrabilità della u e della f, immaginando data $u(x)$ in un intervallo qua-

(3) « Math. Ann. », B. XVI.

(4) *Sopra un problema di elettrostatica*, « Acc. dei Lincei », Transunti, ser. 3ª, vol. VIII (1884).

(5) « Rend. dell'Ist. Lombardo », ser. II, vol. XXVIII. (1895) [in questo vol.: V, pp. 125-152].

lunque (ab), assegno una espressione analitica (cioè formata cogli ordinari simboli di calcolo) atta a rappresentare $v(y)$ nello stesso intervallo; come casi particolari ritrovo il teorema di ABEL e la generalizzazione indicata da SONINE. Per la seconda formula invece, giungo ad un risultato utile, soltanto quando la $u(x)$ è nota ed integrabile in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Quanto alle equazioni caratteristiche d'ordine superiore al primo, debbo rimetterne lo studio ad altra comunicazione, per non oltrepassare i giusti limiti della presente.

Spero che nel frattempo mi si offra anche occasione di applicare lo stesso metodo a qualche problema di fisica.

1. – Data l'equazione:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)v(y)\,dy \,, \tag{1}$$

dove $a(x)$, $b(x)$, $f(x, y)$, $u(x)$ si suppongono funzioni conosciute (le prime tre finite, continue e derivabili quanto occorre e la $u(x)$ integrabile in un intervallo pur dato), il problema di inversione consiste nel determinare una funzione $v(y)$ atta all'integrazione, per cui la (1) riesca identicamente soddisfatta.

Ogni qualvolta la funzione $f(x, y)$, che si può chiamare *caratteristica*, soddisfaccia ad una equazione *caratteristica* a derivate parziali e a variabili separate del tipo:

$$\{ \Delta_x^{(n)} + \Theta_y^{(m)} \} f = 0, \tag{2}$$

$$\left(\Delta_x^{(n)} \equiv \sum_0^n {}_r\, p_r(x) \frac{\partial^{n-r}}{\partial x^{n-r}} \,, \quad \Theta_y^{(m)} \equiv \sum_0^m {}_s\, q_s(y) \frac{\partial^{m-s} f}{\partial y^{m-s}} \right),$$

(cioè essendo $\Delta_x^{(h)}$, $\Theta_y^{(m)}$ forme differenziali lineari qualunque in x, y dell'ordine rispettivo n, m), si può seguire per l'inversione della (1) un criterio direttivo, che permette in qualche caso di andare in fondo.

Gioverà premettere alcune brevi osservazioni.

Formiamo l'equazione:

$$\{ \Delta'^{(n)}_x - \chi(\tau) \} \mu(x) = 0 \,, \tag{3}$$

dove Δ'^n_x è la forma aggiunta a Δ^n_x e $\chi(\tau)$ è una funzione, che si può scegliere a piacere, di un parametro τ; e poniamo:

$$\nu_\tau(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\mu_\tau(x)\,dx \,, \tag{4}$$

essendo $\mu_\tau(x)$ una soluzione determinata della (3). Sarà:

$$\{ \Theta_y^{(m)} + \chi(\tau) \} \nu_\tau(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \{ \Theta_y^{(m)} + \chi(\tau) \} f(x, y) \mu_\tau(x) \, dx$$

+ termini provenienti dalla derivazione dei limiti.

Ma, in causa della (2): $\Theta_y^{(m)} f(x, y) = - \Delta_x^{(n)} f(x, y)$, e, per la definizione stessa di forma aggiunta,

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \Delta_x^{(n)} f(x, y) \mu_\tau(x) \, dx = + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \Delta'^{(n)}_x \mu_\tau(x) \, dx$$

+ termini ai limiti.

Chiamando complessivamente $\Omega(y, \tau)$ i termini fuori dell'integrale, che sono perfettamente conosciuti, e avendo riguardo alla (3), si conclude che le funzioni $\nu_\tau(y)$ definite dalla (4) soddisfanno, qualunque sia il valore di τ, ad una equazione differenziale del tipo:

(5) $$\{ \Theta_y^{(m)} + \chi(\tau) \} \nu = \Omega(y, \tau) \,,$$

la quale le individua completamente, purchè le costanti di integrazione si determinino attribuendo ad y nella (4) valori particolari.

Ciò posto, riprendiamo l'equazione (1) e integriamo rispetto ad x fra certi limiti c e d, dopo aver moltiplicato ambo i membri per una funzione F da determinarsi, dipendente da x e, ove convenga, da altre variabili ausiliarie z, t, ecc.

Avremo:

$$\int_c^d F u(x) \, dx = \int_c^d F \, dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) v(y) \, dy \,.$$

Supponendo di poter in qualche modo invertire le due integrazioni rispetto ad x e ad y, la relazione precedente assumerà l'aspetto:

(6) $$\int_c^d F u(x) \, dx = \int_\gamma^\delta v(y) \, dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) F \, dx \,.$$

Si tratta ora (e a ciò si trova ricondotta tutta la difficeltà della questione) di operare in modo che il secondo membro della (6) divenga una rappresentazione integrale della funzione $v(y)$; in tale ipotesi infatti, il primo membro, che potrà riguardarsi conosciuto, fornirà l'inversione richiesta.

In generale è noto [6] che:

$$\int_0^\infty dt \int_\gamma^\delta \Psi\{t(y-z)\}\, v(y)\, dy = v(z)\,, \quad (\gamma < z < \delta)\,,$$

essendo $v(y)$ generalmente finita e continua, ed integrabile nell'intervallo $(\gamma\delta)$ e Ψ funzione *fluttuante*.

Se dunque si giunge a conoscere una funzione $F(x, z, t)$ tale che:

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) F(x, z, t)\, dx = \Psi\big(t(y-z)\big),$$

basta poi integrare il primo membro della (6) fra 0 e ∞ per avere una rappresentazione analitica della funzione v.

Ciò vale qualunque sia la funzione caratteristica $f(x, y)$; l'ipotesi restrittiva da noi introdotta, che essa soddisfaccia ad una equazione del tipo (2), permette di fare un passo più avanti e di riportare la questione, che ci occupa, ad altra, se non risoluta, certo più studiata e in qualche caso già nota.

Infatti, dato il sistema di funzioni $v_\tau(y)$ $(\tau = 1, 2, ..., \infty)$ definite dalla (5), dico essere sufficiente per lo scopo nostro che si sappia sviluppare una funzione assegnata $\varphi(y)$ in serie procedente per funzioni $v_\tau(y)$ del sistema, si possa cioè, per quanto con restrizioni sulla natura di $\varphi(y)$, porre:

$$\varphi(y) = \sum_0^\infty{}_\tau\, C_\tau v_\tau(y)\,,$$

colle C_τ indipendenti da y.

Per provare questo asserto, si scelga una qualunque funzione fluttuante, che soddisfaccia alle volute restrizioni (ve ne ha certamente, perchè anzi le forme più note sono addirittura funzioni analitiche) e si

[6] W. Hamilton, *On fluctuating function*, «Transaction of the Royal Irish Academy», vol. XIX, 1843; P. Du Bois-Reymond, *Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von, Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört*, «Crelle's Journal», B. LIX 1868; C. Neumann, *Ueber die nach Kreis-Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen*, Leipzig, 1881; veggasi in particolare Cap. 3, § 6; L. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik*. Erster Band, Leipzig, 1894, p. 77.

avrà per $\Psi(t(y-z))$, risguardata come funzione della sola y coi due parametri t e z, una identità del tipo:

$$\Psi\{t(y-z)\} = \sum_0^\infty {}_\tau\, C_\tau(t, z)\nu_\tau(y) . \tag{7}$$

Se quindi si pone nella (6)

$$F(x, z, t) = \sum_0^\infty {}_\tau\, C_\tau(t, z)\mu_\tau(x) ,$$

tenendo presente la (4) e la (7), si ha

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, z, t)f(x, y)\, dx = \Psi\{t(y-z)\} ,$$

e per conseguenza, in base a quanto si è osservato a proposito della (6) stessa,

$$v(z) = \int_0^\infty dt \int_c^d \sum_0^\infty {}_\tau\, C_\tau(t, z)\mu_\tau(x)u(x)\, dx , \qquad (\gamma < z < \delta) . \tag{8}$$

Le condizioni di effettiva validità per il procedimento formale qui indicato sono manifestamente pochissimo restrittive; il discuterle partitamente ci porterebbe molto in lungo con scarso profitto, essendo assai più semplice riconoscerlo nei casi singoli.

Mi pare degna di nota la seguente circostanza: Ogniqualvolta i coefficienti dell'equazione differenziale (5) sono analitici (il che per esempio, accade certamente, quando lo sieno le $q_s(y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $f(x, y)$), il problema di invertire la (1) si riduce ad una questione concreta nel campo analitico, alla sviluppabilità di una data funzione in serie procedente per funzioni del sistema (5) [7].

2. – Passiamo ora a considerare con qualche dettaglio il caso che l'equazione caratteristica in f sia del primo ordine.

---

[7] Veggansi a tale proposito alcune considerazioni generali utili in molti casi, contenute nella Memoria del Prof. S. PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. IV, tom. III (1882).

Avremo:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) v(y) \, dy \,, \tag{9}$$

con:

$$\{ \Delta_x^{(1)} + \Theta_y^{(1)} \} f(x, y) \equiv p_0(x) \frac{\partial f}{\partial x} + p_1(x) f + q_0(y) \frac{\partial f}{\partial y} + q_1(y) f = 0 \,, \tag{10}$$

alle quali, ove si ponga:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} \,, \quad y_1 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{q_0(y)} \,, \quad f_1(x_1, y_1) = f(x, y) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{q_1(y)}{q_0(y)} dy} \,, \\ & u_1(x_1) = u(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} \,, \quad v_1(y_1) = v(y) \cdot q_0(y) \cdot e^{-\int_{y_0}^{y} \frac{q_1(y)}{q_0(y)} dy} \,, \\ & a_1(x_1) = \int_{y_0}^{a(x)} \frac{dy}{q_0(y)} \,, \quad b_1(x_1) = \int_{y_0}^{b(x)} \frac{dy}{q_0(y)} \,, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

si attribuisce la forma canonica [8]:

$$u_1(x_1) = \int_{a_1(x_1)}^{b_1(x_1)} f_1(x_1, y_1) v_1(y_1) \, dy_1 \,,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 \,.$$

Scrivendo nuovamente x, y, ..., al posto di x_1, y_1, ..., ed osservando che l'integrale generale di $\partial f / \partial x + \partial f / \partial y = 0$ è $f(x - y)$, le due precedenti equazioni si possono sostituire con:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x - y) v(y) \, dy \,, \tag{12}$$

dove f è simbolo di funzione arbitraria.

---

[8] Con ovvie modificazioni delle (11) si perviene a questo stesso risultato, anche quando $p_0(x)$ o $q_0(x)$ sieno nulli.

Finchè i limiti di integrazione $a(x)$ e $b(x)$ rimangono indeterminati, il criterio generale di inversione, indicato nel precedente §, non si lascia applicare alla (12) in modo da raggiungere un risultato definitivo; si possono però trattare esaurientemente due casi notevoli ($a =$ cost., $b(x) = x$; $a, b =$ cost.), che molto spesso si incontrano nell'analisi applicata.

A questi due casi limiteremo il nostro studio, occupandoci successivamente di determinare $v(y)$ dalla equazione:

$$u(x) = \int_a^x f(x-y)v(y)\,dy\,, \tag{13}$$

ovvero dalla:

$$u(x) = \int_a^b f(x-y)v(y)\,dy\,. \tag{14}$$

La ricerca consterà di due parti: 1) ammessa l'esistenza della funzione $v(y)$, determinarne una espressione analitica; 2) assegnare per questa espressione le condizioni di effettiva validità.

3. – Riferendosi alla (13) ([9]), suppongasi $u(x)$ atta all'integrazione nell'intervallo $(a\,\infty)$, si moltiplichino ambo i membri della (13) per $\cos \pi t(x-z)\,dx$ e si integri fra a ed ∞. Verrà:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(x - z)u(x)\,dx = \int_a^\infty \cos \pi t(x-z)\,dx \int_a^x f(x-y)v(y)\,dy\,,$$

od anche, invertendo le integrazioni colla regola di Dirichlet:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(x - z)u(x)\,dx = \int_a^\infty v(y)\,dy \int_y^\infty f(x-y) \cos \pi t\,(x-z)\,dx\,.$$

([9]) Nella (13) si è scritto $\int_a^x$, supponendo, tanto per fissare le idee, $a < x$; i risultati, che stabiliremo in appresso si dovranno senz'altro ritenere estesi anche agli integrali del tipo $\int_x^b$ $(x < b)$. Basterà infatti scambiare x in $-x$, y in $-y$, b in $-a$, $f(\lambda)$ in $f(-\lambda)$, ecc., per essere ricondotti al primo caso.

Se nell'integrale interno del secondo membro si assume $\lambda = x - y$ come variabile di integrazione e si pone:

$$h(t) = \int_0^\infty f(\lambda) \cos \pi t\lambda \, d\lambda, \tag{15}$$

$$k(t) = \int_0^\infty f(\lambda) \operatorname{sen} \pi t\lambda \, d\lambda, \tag{16}$$

si ha immediatamente:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(x-z)u(x)\, dx = h(t)\int_a^\infty \cos \pi t(y-z)v(y)\, dy - k(t)\int_a^\infty \operatorname{sen} \pi t(y-z)v(y)\, dy.$$

In modo analogo:

$$\int_a^\infty \operatorname{sen} \pi t(x-z)u(x)\, dx = k(t)\int_a^\infty \cos \pi t(y-z)v(y)\, dy + h(t)\int_a^\infty \operatorname{sen} \pi t(y-z)\, v(y)\, dy,$$

da cui, purchè $h(t)$ e $k(t)$ non si annullino contemporaneamente:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(y-z)v(y)\, dy = \int_a^\infty u(x)\, \frac{h(t) \cos \pi t(x-z) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(x-z)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dx.$$

Integrando ambo i membri rispetto a t fra 0 e ∞, qualora $v(y)$ sia funzione generalmente finita e continua, atta all'integrazione fra 0 e ∞ e dotata soltanto di un numero finito di massimi e minimi, o più generalmente tale che le si possa applicare la rappresentazione integrale di FOURIER ([10]), si riconosce che dovrà aversi *generalmente* (ciò che basta per il nostro scopo):

$$\int_0^\infty dt \int_a^\infty u(x)\, \frac{h(t) \cos \pi t(x-z) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(x-z)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dx = v(z), \qquad (z > a), \tag{17}$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^\infty u(x)\, \frac{h(t) \cos \pi t(x-z) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(x-z)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dx = 0, \qquad (z < a). \tag{18}$$

([10]) D'ora innanzi chiamerò brevemente *funzioni di* FOURIER quelle, che si possono *generalmente* rappresentare mediante il noto integral doppio scoperto da questo autore. Veggasi in proposito: P. DU BOIS-REYMOND, *Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln*, « Math. Annalen », B. IV.

Per stabilire queste due formule noi ci siamo appoggiati alle relazioni

$$\int_y^\infty f(x-y) \cos \pi t(x-z)\, dx = h(t) \cos \pi t(x-z) - k(t) \operatorname{sen} \pi t(y-z),$$

$$\int_y^\infty f(x-y) \operatorname{sen} \pi t(x-z)\, dx = k(t) \cos \pi t(y-z) + h(t) \operatorname{sen} \pi t(y-z),$$

che si giustificano con un semplice cambiamento della variabile di integrazione; non è tuttavia fuori di luogo il notare come esse si ritrovino, seguendo il concetto direttivo esposto a § 1. Abbiamo infatti, applicando le notazioni di allora al caso presente ed assumendo

$$\chi(\tau) = -i\pi\tau, \qquad \frac{d\mu}{dx} - i\pi t\mu = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d\nu}{dy} - i\pi t\nu = 0,$$

ossia

$$\nu_t(y) = g(t)\, e^{i\pi ty}$$

la costante $g(t)$ potendosi determinare col fare $y = 0$ nella

$$\nu_t(y) = \int_y^\infty f(x-y)\mu_t(x)\, dx,$$

ciò che, prendendo

$$\mu_t(x) = e^{i\pi tx},$$

dà

$$g(t) = \int_0^\infty f(x)\, e^{i\pi tx}\, dx.$$

Ora, se si pone: $g(t) = h(t) + ik(t)$, le funzioni $h(t)$, $k(t)$ coincidono con quelle definite dalle (15), (16) e scindendo la

$$\nu_t(y) = \int_y^\infty f(x-y)\mu_t(x)\, dx$$

nelle sue parti reale ed immaginaria, si ottengono le identità

$$\int_y^\infty f(x-y) \cos \pi tx\, dx = h(t) \cos \pi ty - k(t) \operatorname{sen} \pi ty,$$

$$\int_y^\infty f(x-y) \operatorname{sen} \pi tx\, dx = k(t) \cos \pi ty + h(t) \operatorname{sen} \pi ty,$$

donde agevolmente le due riferite sopra. L'artificio, usato precedentemente nel dedurle, presenta il vantaggio di non esigere la derivabilità della funzione $f(x-y)$, che si presuppone invece nel metodo generale.

Ritenuto ciò, converrà riprendere l'espressione trovata sopra per $v(y)$ e verificarla mediante diretta sostituzione nella (13). Finora infatti noi abbiamo stabilito che:

Se esiste una funzione di FOURIER $v(y)$ atta all'integrazione fra a e ∞, che rende

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = u(x),$$

essendo $u(x)$ pure integrabile nell'intervallo $(a\ \infty)$; se la f, risguardata come funzione di un argomento λ, è generalmente finita e continua e integrabile in ogni intervallo finito, e se di più hanno significato i due integrali:

$$h(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\cos\pi t\lambda\,d\lambda\,, \qquad k(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\pi t\lambda\,d\lambda\,,$$

e non si annullano contemporaneamente per alcun valore di t compreso fra 0 e ∞, sussiste la duplice relazione (17), (18), ossia, più comodamente, cambiando x in z e z in y

$$(17') \qquad \int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = v(y)\,, \qquad (y>a),$$

$$(18') \qquad \int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = 0\,, \qquad (y<a)\,.$$

Reciprocamente importa di ricercare se, per una f, che soddisfaccia alle condizioni sopra dichiarate, data ad arbitrio una funzione integrabile u (e ci converrà qui aggiungere di FOURIER) il primo membro della (17′) (di cui prescindendo dall'ipotesi preventiva dell'esistenza di v, nulla potrebbe dirsi), sostituito al posto di v nella (13), la renda identicamente verificata.

Sarà per questo necessario, in conformità a quanto si è detto sopra, che la (17′) definisca una funzione di FOURIER e che sussista la (18′). D'altra parte però, come ora vedremo, queste condizioni sono anche sufficienti.

Avremo infatti dalle (17′) e (18′), moltiplicandone ambo i membri per $f(x-y)$ ed integrando, rispetto ad y fra $-\infty$ ed x:

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^x f(x-y)\,dy\int_0^\infty dt\int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz$$

$$=\int_0^\infty dt\int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\int_{-\infty}^x f(x-y)\cos\pi t(z-y)\,dy+k(t)\int_{-\infty}^x f(x-y)\operatorname{sen}\pi t(z-y)\,dy}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz;$$

ponendo nei due integrali interni $x-y=\lambda$, e ricordando le (15) e (16) si ha immediatamente:

$$\int_{-\infty}^x f(x-y)\cos\pi t(z-y)\,dy=h(t)\cos\pi t(z-x)-k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-x),$$

$$\int_{-\infty}^x f(x-y)\operatorname{sen}\pi t(z-y)\,dy=k(t)\cos\pi t(z-x)+h(t)\operatorname{sen}\pi t(z-x),$$

donde segue:

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy=\int_0^\infty dt\int_a^\infty \cos\pi t(z-x)u(z)\,dz,$$

ossia, applicando alla u il teorema di FOURIER:

$$u(x)=\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy\,. \tag{13}$$

In questa dimostrazione, è bene notarlo, non sarebbe necessaria per $v(y)$ la restrizione d'essere funzione di FOURIER, ma basterebbe la integrabilità; tuttavia noi abbiamo aggiunto, come faremo anche in seguito, tale restrizione, perchè, ricordando quanto si è visto al principio di questo §, siamo così in grado di asserire che *quando esiste una soluzione della* (13), *essa è necessariamente esprimibile per mezzo della* (17′) *e quindi unica.*

L'inversione della (13) offerta dalla (17′) è suscettibile di una modificazione assai notevole, la quale permette di assegnare la incognita funzione $v(y)$ per valori di y compresi in un intervallo prefissato (ab), *mediante la sola conoscenza dei valori di* $u(x)$ *relativi allo stesso intervallo.*

Suppongasi infatti data $u(x)$ fra a e b; si può immaginarne una estensione fittizia oltre b, ponendo, per esempio, $u(x)=0$, $x>b$. La funzione $u(x)$ riesce così determinata in tutto l'intervallo $(a\ \infty)$ e vi soddisfa alle condizioni di FOURIER: quindi, ogniqualvolta esista una funzione $v(y)$, per cui:

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = u(x)\,, \qquad (a<x<b)\,,$$

e

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = 0\,, \qquad (x>b)\,,$$

sappiamo già che dovrà essere:

$$\int_0^\infty dt\int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = v(y)\,, \qquad (y>a)\,,$$

$$\int_0^\infty dt\int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = 0\,, \qquad (y<a)\,,$$

cioè, nel caso nostro:

$$(19) \qquad \int_0^\infty dt\int_a^b u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = v(y)\,, \qquad (y>a)\,,$$

$$(20) \qquad \int_0^\infty dt\int_a^b u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = 0\,, \qquad (y<a)\ ;$$

inversamente poi si prova come sopra che, qualora la (20) sia soddisfatta e la (19) definisca una funzione di FOURIER $v(y)$, essa $v(y)$, per x compreso fra a e b, verifica la (13).

Noi abbiamo così stabilite le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia invertibile la (13) *per una determinata funzione u nota fra a e b e supposta nulla oltre b.* Tuttavia può ancora accadere che, per qualche funzione u data fra a e b, la (19), la quale presuppone l'accennata estensione oltre b, non abbia alcun significato, mentre invece esista una $v(y)$, che rende soddisfatta la (13). Di ciò daremo un effettivo esempio nel § seguente.

Sotto le solite ipotesi vi hanno altresì (e queste presentano il maggior interesse) funzioni caratteristiche f, per cui la (13) è invertibile, *comunque si assegni la funzione u nell'intervallo* $(a\ \infty)$. Vediamo in qual modo si possa riconoscere codesta insigne proprietà.

Si osservi che, se u può essere fissata a piacere, dovrà sussistere la (20), anche prendendo $u(z)=0$ $(a<z<c)$, $u(z)=1$ $(c<z<d)$, $u(z)=0$ $(z>d)$, qualunque sieno c e d. Ciò dà:

$$\int_0^\infty dt \int_c^d \frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz=0\,, \qquad (y<a), \tag{21}$$

o se si vuole, eseguendo l'integrazione rispetto a z e tenendo presente la (19):

$$\int_0^\infty \frac{h(t)\{\operatorname{sen}\pi t(d-y)-\operatorname{sen}\pi t(c-y)\}-k(t)\{\cos\pi t(d-y)-\cos\pi t(c-y)\}}{\pi t\{h(t)^2+k(t)^2\}}\,dt=0\,.$$
$$(y<a)\,.$$

Reciprocamente però, come ora vedremo, la (20) si trova soddisfatta per ogni funzione u di Fourier, qualora sia verificata la (21) per una qualunque coppia di numeri c e d maggiori di a. Sarà questo pertanto il criterio cercato.

Noi ci limiteremo per brevità a considerare nella dimostrazione il caso che u sia generalmente finita e continua, integrabile e senza infiniti massimi o minimi; il risultato si intenderà senz'altro esteso a qualunque funzione di Fourier mediante il metodo seguito dal Du Bois-Reymond ([11]).

In primo luogo sia u finita in tutto l'intervallo (ab); avendosi ammesso che essa è generalmente continua e dotata di un numero finito di massimi e minimi, si potrà scindere l'intervallo (ab) in un numero finito di segmenti tali che entro ciascuno di essi sia $u(z)$ continua e mai crescente o decrescente.

Dicasi generalmente $(\gamma\delta)$ uno di questi segmenti; potremo scrivere:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz$$
$$=\sum\int_0^\infty dt\int_\gamma^\delta u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz\,.$$

([11]) Loco citato in ([10]).

In ciascun intervallo $(\gamma\delta)$, essendo $u(z)$ finita e mai crescente o decrescente e l'altro fattore (trigonometrico) integrabile, è lecito applicare il secondo teorema della media, dal che si trae:

$$\int_\gamma^\delta u(z)\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz$$

$$=u(\gamma)\int_\gamma^j\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz$$

$$+u(\delta)\int_j^\delta\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz\,,\quad(\gamma<j<\delta),$$

e quindi:

$$\int_0^\infty dt\int_a^b u(z)\frac{\cos\pi t(z-y)h(t)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz$$

$$=\sum u(\gamma)\int_0^\infty dt\int_\gamma^j\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz$$

$$+\sum u(\delta)\int_0^\infty dt\int_j^\delta\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz\,,$$

dove il secondo membro è nullo in causa della (21), come si era asserito. Allo stesso risultato si giunge poi anche se la funzione u, pur mantenendosi integrabile, diviene infinita in qualche punto α dell'intervallo (ab): infatti, escludendo questi punti α mediante piccoli intorni $(\alpha'\alpha'')$ si può fare in modo che la porzione di integrale (20), relativa al complesso di tali intorni, sia in valore assoluto minore di una quantità $\varepsilon>0$ prefissata arbitrariamente piccola; dividendo poi l'intervallo totale (ab), esclusi gli intorni $(\alpha'\alpha'')$, in segmenti $(\gamma\delta)$, si trova, ragionando come sopra, che i relativi integrali si annullano, quindi il primo membro della (20) può rendersi in valore assoluto minore di ε, per quanto si scelga piccolo ε. Ciò basta per potere, anche nel caso presente, concludere giusta l'enunciato.

Sarà opportuno riassumere quanto si è trovato finora nel seguente:

Teorema. – *Sia $f(\lambda)$ funzione dell'argomento λ finita e continua in tutto l'intervallo* $(0\ \infty)$, *integrabile in ogni intervallo finito e tale che riescano convergenti i due integrali*:

$$h(t)=\int_0^\infty f(\lambda)\cos\pi t\lambda\,d\lambda,\qquad k(t)=\int_0^\infty f(\lambda)\operatorname{sen}\pi t\lambda\,d\lambda$$

e non si annullino contemporaneamente per alcun valore finito di t; sia $u(x)$ funzione di Fourier *nell'intervallo* (ab); *è necessario e basta affinchè, ponendo*:

$$(19)\qquad v(y)=\int_0^\infty dt\int_a^b u(z)\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz,\ (a<y<b),$$

riesca soddisfatta la (13), *che*:

1) *Il secondo membro della* (19) *rappresenti nell'intervallo* (ab) *una funzione di* Fourier.

2) *Si abbia, per* $y<a$:

$$(20)\qquad \int_0^\infty dt\int_a^b u(z)\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz=0\,.$$

La (20) *si trova verificata identicamente, qualunque sia la funzione di* Fourier, $u(z)$, *le quante volte, per ogni coppia* c, d *compresa fra* a *e* b *e per* $y<a$, *sussista la relazione*:

$$(21)\qquad \int_0^\infty dt\int_c^d \frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}dz=0\,.$$

Tenuto conto delle ipotesi restrittive da noi introdotte, si ha ancora, per $b=\infty$ (pag. 171), *oppure, per* b *qualunque, quando sia soddisfatta la* (21): *Se esiste una funzione* $v(y)$, *che soddisfaccia alla* (13), *essa è unica e rappresentabile sotto la forma* (19).

In sostanza, prescindendo dalla continuità, integrabilità, ecc., la (20) può risguardarsi come la condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità della (13), qualunque sia u.

In modo del tutto analogo (veggasi la nota al principio di questo §) si stabilisce che, per soddisfare all'equazione:

$$u(x)=\int_x^b f(x-y)v(y)\,dy\,,\qquad (a<x<b)\,,$$

basta porre:

$$h(t)=\int_{-\infty}^0 f(\lambda)\cos\pi t\lambda\,d\lambda\,,$$

$$k(t)=\int_{-\infty}^0 f(\lambda)\operatorname{sen}\pi t\lambda\,d\lambda\,,$$

$$v(y)=\int_0^\infty dt\int_a^b \frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}u(z)\,dz\,,$$

purchè si abbia per $y > b$:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz = 0 \; ; \quad \text{ecc.}$$

Come caso particolare si potrà poi fare in queste formule o nelle precedenti $a = -\infty$, o $b = +\infty$, o insieme $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Giova osservare altresì che (quando l'intervallo (ab) è finito) entrano nella (13) valori della funzione f relativi esclusivamente all'intervallo $(0, b-a)$ e che quindi la f stessa potrà essere o risguardarsi data soltanto in questo intervallo; per la applicazione del nostro teorema, basterà poi poterne assegnare una qualunque estensione fittizia, che ottemperi alle condizioni sopra enumerate.

4. – Comincio con un esempio, che, se presenta per sè scarso o punto interesse, mi sembra nondimeno utile illustrazione delle cose dette.

Sia $f(\lambda) = e^{-\lambda}$ e quindi:

$$(15_1) \qquad h(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \cos \pi t\lambda \, d\lambda = \frac{1}{1+\pi^2 t^2},$$

$$(16_1) \qquad k(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \operatorname{sen} \pi t\lambda \, d\lambda = \frac{\pi t}{1+\pi^2 t^2},$$

le quali non si annullano contemporaneamente per alcun valore finito di t.

Secondo il precedente §, posto:

$$(19_1) \qquad v(y) = \int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \{\cos \pi t(z-y) + \pi t \operatorname{sen} \pi t(z-y)\} dz,$$

$$(a < y < b),$$

si dovrà constatare in primo luogo se $v(y)$ è funzione di FOURIER; dopo ciò, se si avrà:

$$(20_1) \qquad \int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \{\cos \pi t(z-y) + \pi t \operatorname{sen} \pi t(z-y)\} dz = 0, \qquad (y < a),$$

la $v(y)$ soddisferà all'equazione:

$$(13_1) \qquad u(x) = \int_a^x e^{-(x-y)} v(y)\, dy, \qquad (a < x < b).$$

Perchè le volute condizioni sieno effettivamente verificate, converrà nel caso presente aggiungere l'ipotesi che la funzione $u(x)$ si annulli per $x = a$ e per $x = b$, sia in tutto l'intervallo (ab) finita e continua e ammetta in ogni punto derivata prima soddisfacente alle condizioni di FOURIER. Avremo allora:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u'(z) \cos \pi t(z - y)\, dz = u'(y)\,, \qquad (a < y < b),$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u'(z) \cos \pi t(z - y)\, dz = 0\,, \qquad (y < a)\,.$$

Integrando per parti rispetto a z ed osservando che i termini ai limiti svaniscono, verrà:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \pi t \operatorname{sen} \pi t(z - y)\, dz = u'(y)\,, \qquad (a < y < b)\,,$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \pi t \operatorname{sen} \pi t(z - y)\, dz = 0\,, \qquad (y < a)\,.$$

Questi valori, portati nella (20_1), ove si abbia ancora riguardo al teorema di FOURIER, la verificano identicamente, di più la (19_1) diviene:

$$(19_1') \qquad v(y) = u(y) + u'(y),$$

e sotto questa forma è manifesto che $v(y)$ sarà funzione di FOURIER.

Alla $(19_1')$ si poteva arrivare più semplicemente in modo diretto, partendo dalla (13_1). Infatti, moltiplicando per e^x e derivando, si ottiene:

$$\frac{d\big(e^x u(x)\big)}{dx} = e^x v(x)\,,$$

ossia precisamente $v(x) = u(x) + u'(x)$, la quale, come si verifica subito, purchè sia $u(a) = 0$, soddisfa alla (13_1). È interessante osservare che in questo modo non occorre affatto supporre $u(b) = 0$, mentre prescindendo da tale ipotesi, la soluzione espressa dalla (19_1) perde ogni significato.

Ove infatti il secondo membro della (19_1) rappresentasse una funzione generalmente finita, essendo

$$v(y) = u(y) + \int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\pi t \operatorname{sen} \pi t(z-y)\,dz\,,$$

lo stesso dovrebbe accadere per l'integrale doppio

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\pi t \operatorname{sen} \pi t(z-y)\,dz\,,$$

e, siccome si ha:

$$u'(y) = \int_0^\infty dt \int_a^b u'(z) \cos \pi t(z-y)\,dz\,,$$

si dedurrebbe, integrando come sopra per parti, la convergenza di

$$u(b)\int_0^\infty \cos \pi t(b-y)\,dt\,,$$

ciò che è assurdo.

Si ha con ciò un esempio della possibile esistenza di una funzione di Fourier $v(y)$, che soddisfa alla (13) in un intervallo *finito* [12] (ab) e non è rappresentabile mediante l'espressione (19). Questa circostanza può presentarsi, come risulta dal precedente §, soltanto per quelle funzioni caratteristiche f, che *non* soddisfanno alla (21). Qui infatti il primo membro non soltanto non si annulla, ma non ha nemmeno un senso determinato; segue in particolare che non si può risolvere la (13_1) per una funzione $u(x)$, che sia 1 in un certo segmento (cd) e nulla al di fuori.

5. – Poniamo, come seconda applicazione, nella (13), $f(\lambda) = 1/\lambda^p$, p essendo compreso fra 0 e 1.

La funzione $1/\lambda^p$ è integrabile in ogni intervallo positivo finito, finita e continua ovunque, eccettuato soltanto il punto 0; di più i due integrali:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda}{\lambda^p}\,d\lambda\,, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi t\lambda}{\lambda^p}\,d\lambda\,,$$

[12] Per un intervallo infinito ($a\,\infty$), sappiamo invece che ciò non può accadere.

sono convergenti e non si annullano contemporaneamente per alcun valore finito di t, poichè si ha, come è ben noto:

$$(15_2)\qquad h(t)=\int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda}{\lambda^p}\,d\lambda=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\operatorname{sen} p\,\pi/2}{t^{1-p}},$$

$$(16_2)\qquad k(t)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi t\lambda}{\lambda^p}\,d\lambda=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\cos p\,\pi/2}{t^{1-p}},\quad t>0,$$

Γ essendo, al solito, simbolo della funzione euleriana di seconda specie.

In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, la (21) è soddisfatta.

Il primo membro infatti, svolta la integrazione interna, assume qui l'aspetto:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\left\{\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\pi t(d-y)-\operatorname{sen}\pi t(c-y)}{\pi t^p}\,dt\right.$$
$$\left.-\cos p\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\pi t(d-y)-\cos\pi t(c-y)}{\pi t^p}\,dt\right\},$$

e, siccome

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\pi t\,|d-y|}{t^p}\,dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\cos p\,\pi/2}{|d-y|^{1-p}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi t\,|d-y|}{t^p}\,dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\operatorname{sen} p\,\pi/2}{|d-y|^{1-p}},\quad \text{ecc.},$$

dovendo essere $y<a<c<d$, così le relazioni precedenti valgono anche togliendo il segno di valore assoluto e quindi effettivamente:

$$(21_2)\qquad \frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty dt\int_c t^{1-p}\left\{\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\cos\pi t(z-y)\right.$$
$$\left.+\cos p\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi t(z-y)\right\}dz=0,\qquad (y<a).$$

Ne viene che, ponendo:

$$(19_2)\qquad v(y)=\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty dt\int_a^b u(z)t^{1-p}\left\{\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\cos \pi t(z-y)\right.$$
$$\left.+\cos p\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi t(z-y)\right\}dz,$$

purchè sia $v(y)$ funzione di FOURIER, necessariamente soddisfa alla:

$$(13_2)\qquad u(x)=\int_0^x\frac{v(y)}{(x-y)^p}dy,\qquad (a<x<b).$$

Per riconoscere in $v(y)$ le dette proprietà e per attribuirle una forma praticamente più utile, giova aggiungere l'ipotesi che $u(x)$ ammetta nell'intervallo (ab) derivata integrabile.

Partendoci dalle identità:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\pi t|z-y|}{t^p}dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\frac{\operatorname{sen} p\,\pi/2}{|z-y|^{1-p}},$$

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}\pi t|z-y|}{t^p}dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\frac{\cos p\,\pi/2}{|z-y|^{1-p}},$$

avremo:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty\frac{dt}{t^p}u'(z)\left\{\cos p\frac{\pi}{2}\cos\pi t(z-y)-\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi t(z-y)\right\}$$
$$=\begin{cases}\operatorname{sen} p\pi\,\dfrac{u'(z)}{|z-y|^{1-p}}, & (z<y),\\ 0, & (z>y),\end{cases}$$

da cui, integrando rispetto a z fra a e b ed osservando che nel primo membro si possono invertire le integrazioni:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty dt\int_a^b u'(z)\left\{\frac{\cos p\,\pi/2\cos\pi t(z-y)-\operatorname{sen} p\,\pi/2\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{t^p}\right\}dz$$
$$=\operatorname{sen} p\pi\int_a^y\frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}dz,\qquad (a<y<b).$$

In quest'ultima formula è ancora lecita (a sinistra) una integrazione per parti rispetto a z, ciò che porge:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, u(b) \int_0^\infty dt\, \frac{\cos p\,\pi/2 \cos \pi t(b-y) - \operatorname{sen} p\,\pi/2 \operatorname{sen} \pi t(b-y)}{t^p}$$

$$-\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, u(a) \int_0^\infty dt\, \frac{\cos p\,\pi/2 \cos \pi t(a-y) - \operatorname{sen} p\,\pi/2 \operatorname{sen} \pi t(a-y)}{t^p}$$

$$+\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, \pi \int_0^\infty dt \int_a^b u(z) t^{1-p} \left\{ \operatorname{sen} p\,\frac{\pi}{2} \cos \pi t(z-y) \right.$$

$$\left. + \cos p\,\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi t(z-y) \right\} dz = \operatorname{sen} p\pi \int_a^y \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz\,.$$

D'altra parte, per essere $b > y$, il coefficiente di $u(b)$ è nullo, mentre il coefficiente di $u(a)$, essendo $a < y$, si riduce immediatamente a $-\operatorname{sen} p\pi/(y-a)^{1-p}$, quindi:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, \pi \int_0^\infty dt \int_a^b u(z) t^{1-p} \left\{ \operatorname{sen} p\,\frac{\pi}{2} \cos \pi t(z-y) \right.$$

$$\left. + \cos p\,\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi t(z-y) \right\} dz = \operatorname{sen} p\pi \left\{ \frac{u(a)}{(y-a)^{1-p}} + \int_a^y \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz \right\}.$$

Confrontando colla (19_2) si ricava:

$$(19_2') \qquad v(y) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \left\{ \frac{u(a)}{(y-a)^{1-p}} + \int_a^y \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz \right\}, \quad (a < y < b),$$

o finalmente, come si può stabilire con un facile passaggio al limite:

$$v(y) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi}\, \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{u(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz\,, \qquad (a < y < b)\,.$$

La $(19'_2)$ costituisce una generalizzazione, del resto già nota, di un celebre teorema di ABEL. Il SONINE [13] le attribuisce l'aspetto, solo apparentemente diverso, di una rappresentazione integrale della funzione u; per ricavarla, basta sostituire la precedente espressione di $v(y)$ nella (13_2), ciò che dà:

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} u(a) \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p (y-a)^{1-p}} + \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p} \int_a^x \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}} dz \,.$$

Ponendo $(y-a)/(x-a) = s$, l'integrale

$$\int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p (y-a)^{1-p}} \,,$$

diviene

$$\int_0^1 \frac{ds}{s^{1-p}(1-s)^p} = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{-p} ds \,,$$

cioè, per definizione $B(p, 1-p)$, B designando la funzione euleriana di prima specie; ma, per una nota proprietà di queste trascendenti,

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \,;$$

quindi:

$$u(x) - u(a) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p} \int_a^y \frac{u'(z)\, dz}{(y-z)^{1-p}} \,,$$

che è la forma, cui si alludeva sopra e che immediatamente si potrebbe ridurre a quella assegnata da SONINE.

Come caso particolare, per $p = 1/2$, si hanno le due relazioni equivalenti:

$$\left\{ \begin{aligned} u(x) &= \int_a^x \frac{v(y)}{\sqrt{x-y}} dy \,, \\ v(y) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{u(z)}{\sqrt{y-z}} dz \,, \end{aligned} \right.$$

cioè il teorema di ABEL.

---

[13] Loco citato in [3]; art. 48.

Per stabilirlo, si ricorre ordinariamente ad artifici, semplici, finchè si vuole ed eleganti, ma inadatti, per quanto mi pare, a metterne in luce la vera natura; a ciò risponde forse il nostro procedimento, che permette di presentarlo quale corollario di una formula generale di inversione, dovuta ad un criterio direttivo bene determinato.

6. – Veniamo ora al secondo problema, di cui a § 2, proponiamoci cioè di invertire l'equazione:

$$u(x) = \int_a^b f(x-y)v(y)\,dy\,. \tag{14}$$

Il metodo è sostanzialmente identico a quello tenuto precedentemente, quindi mi limiterò ad un rapido cenno, tanto più che la maggior copia dei dati richiesti lo rendono meno vantaggioso.

Sieno f [14] ed u funzioni integrabili in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$ e si sappia che esiste una funzione di Fourier $v(y)$, la quale soddisfa alla (14).

Avremo, in seguito a simile ipotesi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(x-z)u(x)\,dx = \int_a^b v(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\cos \pi t(x-z)\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t(x-z)u(x)\,dx = \int_a^b v(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\operatorname{sen} \pi t(x-z)\,dx\,,$$

donde, ponendo:

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos \pi t\lambda\,d\lambda\,, \tag{22}$$

$$k_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\operatorname{sen} \pi t\lambda\,d\lambda\,, \tag{23}$$

e operando come a § 3, collo scambio di x in z e di z in y, senza diffi-

---

[14] Più propriamente basta rispetto ad f l'ipotesi che sia integrabile in ogni intervallo finito e che renda convergenti i due integrali $h_1(t)$ e $k_1(t)$.

coltà si deduce:

$$(24)\qquad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty u(z)\, \frac{h_1(t)\cos \pi t(z-y) + k_1(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h_1(t)^2 + k_1(t)^2}\, dz = 0\,, \quad (y < a),$$

$$(25)\qquad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty u(z)\, \frac{h_1(t)\cos \pi t(z-y) + k_1(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h_1(t)^2 + k_1(t)^2}\, dz = v(y), \quad (a<y<b),$$

$$(26)\qquad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty u(z)\, \frac{h_1(t)\cos \pi t(z-y) + k_1(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h_1(t)^2 + k_1(t)^2}\, dz = 0\,, \quad (y > b).$$

Dunque, se esiste una funzione di FOURIER, atta a verificare la (14), essa è necessariamente rappresentabile sotto la forma (25); oltre a ciò debbono valere le due relazioni identiche (24) e (26). Inversamente, se queste relazioni sono soddisfatte e se la (25) definisce una funzione di FOURIER, portandola nella (14), con riduzioni analoghe a quelle indicate per la (13), si riproduce effettivamente la funzione $u(x)$.

In questo modo non soltanto si è risoluta l'equazione funzionale (14), ma si è anche trovato un criterio per decidere della sua possibilità.

Il procedimento presenta però il gravissimo inconveniente di esigere la conoscenza e l'integrabilità della funzione $u(x)$ in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$, mentre nelle applicazioni accade il più delle volte di conoscere la funzione $u(x)$ *unicamente* nell'intervallo di integrazione (ab).

Si potrebbe bensì ricondursi a questo caso, con una condizione addizionale, come si è fatto nell'altro problema (formula (21)), ma la pratica applicabilità di questo espediente sarebbe ora pressochè nulla. Giova dunque, rispetto alle questioni di analisi applicata, riservare il metodo per il caso che l'intervallo di integrazione sia $(-\infty, \infty)$, nella quale ipotesi la funzione $u(x)$ viene ad essere conosciuta, come è per noi necessario, in tutto il campo reale; di più le due condizioni (24) e (26) relative alla possibilità del problema vengono a mancare e la $v(y)$, definita dalla (25), purchè dotata delle volute proprietà, soddisfa certamente alla (14).

Quantunque esca dall'ordine di idee, in cui ci siamo posti, stimo necessario di accennare ancora ad un importante risultato stabilito dal prof. VOLTERRA (loc. cit. [4])) relativamente alla determinazione di $v(y)$ da relazioni del tipo:

$$(27)\qquad u(x) = \int_a^b f(x, y) v(y)\, dy\,, \qquad (a < x < b),$$

dove i limiti si suppongono costanti e $f(x, y)$ è funzione simmetrica rispetto alle due invariabili x ed y. Il metodo del prof. VOLTERRA non inceppa nell'inconveniente ora lamentato della necessità di conoscere $u(x)$ fuori dell'intervallo (ab), e consiste nel ricondurre tutti gli infiniti problemi di inversione, che, al variare di $u(x)$, risultano dalla (27), ad una questione unica, alla ricerca cioè di una funzione $\lambda(y, z)$ tale che, per $a < y < z < b$:

$$\int_a^z \lambda(y, z) f(x, y) dy$$

riesca indipendente da z.

Il vantaggio di una tale risoluzione si palesa specialmente in molte questioni elettrostatiche, dove si può *a priori* asserire (in virtù del principio di DIRICHLET) l'esistenza della funzione λ e in alcuni casi anche determinarla effettivamente.

Non sarà da ultimo fuor di luogo il notare che, fin dal primo §, si è qui pure indicato un mezzo per rendere i problemi di inversione indipendenti dalla natura della funzione u, supposta nota soltanto nell'intervallo (ab). Basta a tal uopo trovare una funzione $F(x, z, t)$ che, per una conveniente scelta di α, β $(a < \alpha < \beta < b)$,

$$\int_\alpha^\beta F(x, z, t) f(x, y)\, dx$$

riesca eguale a $\Psi(t(y - z))$ con Ψ funzione fluttuante.