VIII.

SULLA DISTRIBUZIONE INDOTTA IN UN CILINDRO INDEFINITO DA UN SISTEMA SIMMETRICO DI MASSE

NOTA I

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV, (2º sem. 1895), pp. 332-336 (*).

Il problema dell'induzione elettrica presenta, come è noto, anche per conduttori di forma semplicissima, difficoltà analitiche rimaste fino ad ora quasi sempre insuperate. Per il caso particolare, in cui le masse inducenti e la superficie del conduttore posseggano uno stesso asse di simmetria, il prof. BELTRAMI immaginò alcuni procedimenti analitici (1), che se permettono di risolvere con grande eleganza il problema da lui trattato dell'induzione sopra un disco circolare, non si possono poi utilizzare (almeno direttamente) per altre questioni, neppure ad esempio per il cilindro, che tuttavia ha, come il disco, rettilinee le sezioni meridiane.

La presente Nota ha per iscopo di determinare la densità della distribuzione, indotta in un cilindro circolare indefinito, da un sistema simmetrico di masse. Il calcolo, che vi conduce (quantunque a bello studio non esiga alcun richiamo) è una applicazione immediata del metodo per l'inversione degli integrali definiti, che esposi in uno scritto recente (2). Io dovrò qui limitarmi a far vedere come la equazione funzionale, da cui dipende il proposto problema, si possa ben facilmente ricondurre ad un tipo già noto. Ho poi trovato (e mi propongo di mostrarlo tra breve), assegnando in tal modo una espressione analitica della quantità incognita, e supponendo molto piccolo il raggio del cilindro, che la densità (lineare) della distribuzione indotta in un filo è proporzionale al potenziale delle

(*) Presentata dal Socio EUGENIO BELTRAMI nella seduta del 15 dicembre 1895.

(1) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. IV. tom. II.

(2) *Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale*, « Atti dell'Acc. di Torino », vol. XXXI. [In questo vol.: VII, pp. 159-184].

masse inducenti e varia da filo a filo in ragione inversa del logaritmo del raggio della sezione.

Questi risultati relativi ai fili presentano, a mio credere, particolare interesse, perchè valgono senz'altro anche per distribuzioni inducenti non simmetriche.

È appena necessario aggiungere che la nostra ricerca dà mezzo di risolvere *approssimativamente* il problema dell'induzione elettrica, quando il cilindro od il filo, senz'essere indefiniti, sieno abbastanza lunghi, ma però in comunicazione col suolo.

Noto da ultimo che non si sarebbe potuto partire dai noti risultati di F. Neumann e di Lipschitz relativi all'ellissoide allungato, immaginando poi grandissimo l'asse di rotazione, poichè le formole di questi autori, anche prescindendo dalla loro estrema complicazione, presuppongono essenzialmente *finita* la lunghezza di detto asse e quindi non si prestano per un facile passaggio al limite; avrei potuto invece prender le mosse da alcune considerazioni di Kirchhoff (3) relative al potenziale di masse distribuite sulla superficie di un cilindro, ma il procedimento seguito sembrami assai più semplice e diretto.

Dato un cilindro circolare γ di raggio a, si fissi un sistema cartesiano ortogonale, di cui l'asse delle z coincida con quello del cilindro, poi si ponga: $x = r\cos\vartheta$, $y = r \operatorname{sen}\vartheta$ e si intendano adottate, come sistema di riferimento, le coordinate cilindriche z, r, ϑ.

Il potenziale di un sistema simmetrico di masse dipenderà, come è manifesto, soltanto da z e da r, e sarà quindi una funzione $P(z, r)$, che, nei punti esterni alle masse potenzianti, soddisfa all'equazione di Laplace:

$$\Delta_2 P \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left\{r\dfrac{\partial P}{\partial r}\right\}}{\partial r} = 0 .$$

Sulla superficie cilindrica γ, essendo $P(z, a)$ il valore di questo potenziale esterno, quello incognito V della distribuzione indotta dovrà essere $c - P(z, a)$, dove però la costante è da porsi addirittura eguale a zero, perchè il cilindro si estende indefinitamente.

Nè la funzione V, nè, si intende, la corrispondente densità μ della distribuzione indotta dipendono da ϑ, perchè una rotazione arbitraria intorno all'asse delle z lascia inalterate le condizioni del fenomeno.

Avremo poi, indicando con ζ, a, τ le coordinate di un punto generico

(3) *Ueber der inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* « Crelle's Journal », B. 48.

di γ, con z, r, ϑ quelle del punto potenziato, con $d\sigma = a\,d\tau\,d\zeta$ un elemento superficiale:

$$V = \int_\gamma \mu(\zeta) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a\cos\tau - r\cos\vartheta)^2 + (a\,\mathrm{sen}\,\tau - r\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\,d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau-\vartheta)}},$$

dove l'integrale interno rappresenta il potenziale di una circonferenza omogenea di altezza ζ, di raggio a e di densità 1, sul punto z, r, ϑ ed è quindi evidente [4] che si può addirittura farvi $\vartheta = 0$, dopo di che otterremo:

$$V(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\,d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\tau}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\,d\zeta \int_0^{\pi} \frac{2a\,d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\tau}},$$

---

[4] Se si volesse proprio la conferma analitica che un integrale del tipo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau-\vartheta)}}$$

non dipende da ϑ, si potrebbe procedere nel modo seguente:

Dall'identità:

$$(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau-\vartheta) = \left\{\frac{\sqrt{(z-\zeta)^2+(a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2+(a-r)^2}}{2}\right\}^2$$

$$+ \left\{\frac{\sqrt{(z-\zeta)^2+(a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2+(a-r)^2}}{2}\right\}^2 - 2\left\{\frac{\sqrt{(z-\zeta)^2+(a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2+(a-r)^2}}{2}\right\}$$

$$\cdot \left\{\frac{\sqrt{(z-\zeta)^2+(a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2+(a-r)^2}}{2}\right\} \cos(\tau-\vartheta),$$

apparisce che ponendo:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2+(a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2+(a-r)^2}}{\sqrt{(z-\zeta)^2+(a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2+(a-r)^2}},$$

($\alpha < 1$, per z, r non contemporaneamente eguali a ζ, a), il nostro integrale può essere e, ponendo $\tau = 2\varphi$, verrà come espressione definitiva:

$$V(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2 - 4ar \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

la quale sarà valida anche sopra la superficie cilindrica ($r = a$) e dovrà ivi ridursi a $-P(z, a)$.

Il nostro problema è adunque ricondotto alla determinazione di $\mu(\zeta)$ dalla equazione:

$$(1) \qquad -P(z, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

ossia all'inversione dell'integrale definito, che compare nel secondo membro.

---

scritto:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta)}}$$

$$= \frac{4}{\left\{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}\right\}} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}}.$$

Siccome si è notato che, nei punti esterni alla circonferenza potenziante, $\alpha < 1$, il radicale sotto il segno è sviluppabile in serie di potenze e precisamente si avrà, come è ben noto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}} = \sum_0^{\infty}{}_n\, \alpha^n P_n \{\cos(\tau - \vartheta)\},$$

P_n essendo simbolo della funzione sferica d'indice n. Ora si sa pure dalla teoria delle funzioni sferiche che:

$$P_n \{\cos(\tau - \vartheta)\} = \sum_0^{n}{}_\nu\, a_{n,\nu} \cos \nu(\tau - \vartheta),$$

colle a costanti; ne viene che, quando si eseguisce, rispetto a τ, l'integrazione di

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}},$$

fra 0 e 2π, i termini contenenti coseni ($\nu < 0$) dànno risultato nullo e il valore dell'integrale riesce, come si era asserito, indipendente da ϑ.

Notiamo, prima di passare alla effettiva inversione, che, ponendo:

(2) $$k = \frac{2a}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2}},$$

(3) $$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

la (1) si può anche scrivere:

(1') $$-P(z, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \cdot 2kK\, d\zeta\,.$$

Per una proprietà caratteristica delle funzioni potenziali, la $P(z, a)$ si annulla all'infinito, in modo anzi che: $\lim\limits_{z=\pm\infty} |z| P(z, a) = M$ (somma algebrica delle masse potenzianti); segue da ciò e da note proposizioni di calcolo che la funzione $\cos \pi t(z-s) \cdot P(z, a)$, dove t ed s sono costanti arbitrarie, di cui la prima differente da zero, è integrabile in tutto l'intervallo $-\infty, \infty$. Si avrà pertanto dalla (1):

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz \cos \pi t(z-s) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\,.$$

Osservando che, per t diverso da zero, si riconosce, come sopra, l'integrabilità di

$$\cos \pi t(z-s) \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

nell'intervallo da $z = -\infty$ a $z = +\infty$, e, ammettendo di più l'invertibilità delle integrazioni rispetto a z e a ζ [5], si ricava:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)\, P(z, a)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)\, dz \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\,.$$

---

[5] Ciò riescirà giustificato a posteriori, quando a suo tempo constateremo, mediante diretta sostituzione nella (1), che la trovata espressione di $\mu(\zeta)$ vi soddisfa effettivamente.

Cambiando nel secondo integrale la variabile z in $\lambda = z - \zeta$, avremo:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) P(z, a)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \left\{ \cos \pi t(\zeta - s) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen} \pi t\, (\zeta - s) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right\},$$

e, siccome

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0\,,$$

così, posto:

$$(4) \qquad h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \cos \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 4 \int_0^{\infty} \cos \pi t\lambda \cdot k \cdot K\, d\lambda\,,$$

rimarrà semplicemente:

$$(1'') \qquad - \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, P(z, a)\, dz = h_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(\zeta - s) \mu(\zeta)\, d\zeta\,.$$

La (1″) è una conseguenza della relazione (1), da cui siamo partiti e si presenta apparentemente cogli stessi caratteri, nel senso che la determinazione di $\mu(\zeta)$ equivale ancora all'inversione di un integrale definito. Però la particolare natura della funzione sotto il segno, col sussidio del teorema di FOURIER, permette in questo caso di raggiungere agevolmente lo scopo.

Riservo ad una prossima Nota gli sviluppi necessarî per il rigore del procedimento, proponendomi, come ebbi ad accennare, di aggiungervi anche qualche considerazione relativa ai fili conduttori.