

NOTA II

« Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. V, (1^o sem. 1896), pp. 34-40 (*).

Riprendendo gli sviluppi e le formule della Nota precedente dobbiamo ora occuparci di determinare $\mu(\zeta)$ dalla relazione

$$(1'') \quad - \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a) dz = h_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(\zeta-s) \mu(\zeta) d\zeta.$$

Sarà tuttavia necessario premettere alcune osservazioni sulla natura della funzione $h_1(t)$. In primo luogo essa non si annulla per t differente da zero.

Per dimostrarlo, prendiamo $h_1(t)$ sotto la forma: $4 \int_0^{\infty} \cos \pi t \lambda \cdot k \cdot K d\lambda$ ed osserviamo dalle (2) (3) (della Nota precedente) che k e quindi K deccescono costantemente (convergendo il primo verso 0, il secondo verso $\pi/2$) col crescere indefinito di $z - \zeta$, ossia di λ , mentre l'altro fattore $\cos \pi t \lambda$, che è positivo in un primo intervallo $[0(1/2t)]$, si riproduce poi periodicamente coi segni alternati nei successivi intervalli di ampiezza $1/2t$. L'integrale $\int_0^{\infty} \cos \pi t \lambda \cdot k \cdot K d\lambda$, della cui convergenza si ha in questo modo conferma diretta, si mantiene pertanto positivo per ogni valore di t finito e non nullo.

Esaminiamo altresì come si comporta la funzione $h_1(t)$ per $t = 0$, il che incidentalmente ci condurrà anche a stabilire lo sviluppo di $h_1(t)$ considerato come funzione del parametro a , quando il raggio a del cilindro sia abbastanza piccolo.

Converrà perciò assumere $h_1(t)$ sotto la forma:

$$h_1(t) = 2 \int_0^{\infty} \cos \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} = 8a \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}},$$

(*) Presentata dal Socio EUGENIO BELTRAMI nella seduta del 19 gennaio 1896.

ed esprimere l'integrale interno per funzioni cilindriche, valendosi di una formula di SONINE. Segue infatti dalle ricerche di questo autore ⁽¹⁾ che, per $-1 < m < 2(m + l) + 3/2$ e per l numero intero, si ha:

$$\int_0^{\infty} \frac{I_m(bx)x^{m+1} dx}{(x^2 + h^2)^{m+l+1}} = \frac{b^{m+l} h^{-l} i^l}{2^{m+l+1} \Pi(m+l)} \{ \pi i I_l(bhi) - Y_l(bhi) \},$$

dove I ed Y designano rispettivamente funzioni cilindriche di prima e di seconda specie d'ordine eguale al relativo indice, $\Pi(m+l)$ è la funzione fattoriale, che si può sostituire colla $\Gamma(m+l+1)$ (Γ indicando la funzione euleriana di seconda specie) e i è $\sqrt{-1}$ ⁽²⁾. Per applicare questa formula al caso nostro, facciamovi: $m = -1/2$, $b = \pi t$, $x = \lambda$, $h = 2a \cos \varphi$, $l = 0$ e notiamo ⁽³⁾ che:

$$I_{-1/2}(\pi t \lambda) \sqrt{\lambda} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{t}} \cos \pi t \lambda,$$

e che:

$$\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Avremo:

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{t} \sqrt{\pi t}} \{ \pi i I_0(2a i \pi t \cos \varphi) - Y_0(2a i \pi t \cos \varphi) \},$$

ossia:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \{ \pi i I_0(2a i \pi t \cos \varphi) - Y_0(2a i \pi t \cos \varphi) \}.$$

Ora è proprietà nota della funzione cilindrica di seconda specie Y_0 che la differenza $Y_0(x) - 2 \log x I_0(x)$ è finita per $x = 0$ e sviluppabile in serie di potenze di x . Noi possiamo trarne la triplice conseguenza che $Y_0(2a i \pi t \cos \varphi) - 2 \log t I_0(2a i \pi t \cos \varphi)$ è funzione di t regolare per $t = 0$, che $Y_0(2a i \pi t \cos \varphi) - 2 \log a I_0(2a i \pi t \cos \varphi)$ è funzione di a regolare per

⁽¹⁾ *Recherches sur les fonctions cylindriques*, « Math. Ann. », B. XVI, S. 51.

⁽²⁾ Il secondo membro della formula precedente è complesso solo in apparenza, come si potrebbe verificare, tenendo presenti gli sviluppi delle funzioni I ed Y . Per lo scopo nostro serve però benissimo la forma sopra indicata.

⁽³⁾ *Ib.* S. 34.

$a = 0$ e che $Y_0(2ai\pi t \cos \varphi) - 2 \log \cos \varphi I_0(2ai\pi t \cos \varphi)$ è funzione di φ , regolare per $\varphi = \pi/2$.

Dopo ciò, si conclude senza difficoltà ⁽⁴⁾ che, per certi intorni di $t = 0$ e di $a = 0$, si ha:

$$(5) \quad h_1(t) = -4\pi a \log t + R_1(t) + t^2 \log t R_2(t),$$

$$(6) \quad \frac{h_1(t)}{a} = -4\pi \log a + R_3(a) + a^2 \log a R_4(a),$$

R_1, R_2, R_3 ed R_4 designando serie di potenze.

Cerchiamo da ultimo ciò che avviene della funzione $h_1(t)$, quando t cresce indefinitamente. Osserviamo a tale scopo che l'espressione precedente di $h_1(t)$:

$$h_1(t) = 8a \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty \frac{\cos \pi t \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}},$$

tenuto conto del valore testè trovato per l'integrale interno, diviene:

$$h_1(t) = 4a \int_0^{\pi/2} \{ \pi i I_0(2ai\pi t \cos \varphi) - Y_0(2ai\pi t \cos \varphi) \} d\varphi.$$

La quantità sotto il segno, come si è già osservato, è una funzione della variabile φ solo apparentemente complessa, la quale diviene infinita logicamente appena nell'estremo superiore dell'intervallo di integrazione ($\varphi = \pi/2$); potremo dunque applicare il primo teorema della media e attribuire ad $h_1(t)$ la forma:

$$h_1(t) = 2\pi a \{ \pi i I_0(2ai\pi t \cos \bar{\varphi}) - Y_0(2ai\pi t \cos \bar{\varphi}) \},$$

$\bar{\varphi}$ essendo un certo valore di φ , compreso fra 0 e $\pi/2$.

Sotto questo aspetto si riconosce subito che $h_1(t)$ si annulla d'ordine 1/2 per $t = \infty$, poichè, secondo una osservazione di POISSON, tale proprietà, al crescere indefinito dell'argomento, appartiene sì alla funzione I_0 che alla Y_0 ⁽⁵⁾.

⁽⁴⁾ Basta tener presente che la I è una funzione pari, eguale all'unità per il valore zero dell'argomento.

⁽⁵⁾ Per dare a questa dimostrazione un carattere di completo rigore, avremmo dovuto mostrare altresì che il gruppo dei valori, assunti dalla funzione $\bar{\varphi}$ al crescere indefinito di t , non ammette $\pi/2$ come punto limite: ciò avrebbe per altro richiesto considerazioni minuziose, soverchiamente discoste dallo scopo della presente Nota.

Riassumendo, abbiamo stabilito che la funzione $h_1(t)$ della variabile t e del parametro a , supposto $a > 0$, diviene infinita logaritmica per $t = 0$, è diversa da zero e positiva per ogni valore finito di t e si annulla all'infinito d'ordine $1/2$; oltre a ciò, in un certo intorno di $a = 0$, sussiste la (6).

Ciò posto, notiamo ancora che il potenziale P delle masse inducenti è, nei punti ad esse esterni, ed in particolare sopra la superficie cilindrica, una funzione analitica di z e quindi ammette derivate di tutti gli ordini, nulle anch'esse all'infinito. Questo permette di eseguire in $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)P(z, a) dz$ una duplice integrazione per parti rispetto a z , assumendo ciascuna volta il fattore trigonometrico come fattore differenziale; siccome i termini ai limiti svaniscono, dividendo anche per $h_1(t)$, si ha l'identità:

$$-\frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)P(z, a) dz = \frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} dz,$$

da cui agevolmente deduciamo che la funzione:

$$-\frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)P(z, a) dz,$$

è integrabile rispetto a t fra 0 e ∞ . E per verità, ciò che si è visto, rispetto alla natura della funzione $h_1(t)$ per valori finiti di t , stabilisce senz'altro l'integrabilità di

$$-\frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)P(z, a) dz,$$

in ogni intervallo finito; la relazione identica sopra accennata permette poi di assumere per limite superiore anche l'infinito.

Prendendo infatti

$$-\frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)P(z, a) dz$$

sotto la forma:

$$\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} dz,$$

abbiamo che separatamente i due fattori

$$\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)} \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} dz,$$

soddisfanno alle condizioni di integrabilità, quando il limite superiore converge verso l'infinito;

$$\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)},$$

in quanto ha all'infinito uno zero d'ordine 3/2 e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} dz,$$

in causa del teorema di FOURIER, per cui, avendosi:

$$\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial^2 P(s, a)}{\partial s^2},$$

siamo fatti certi che

$$\lim_{\beta, \beta' = \infty} \int_{\beta}^{\beta'} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} dz = 0.$$

Dimostrata così la convergenza di

$$-\int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a) dz,$$

avremo dalla (1''), dividendone entrambi i membri per $h_1(t)$ e integrando fra 0 e ∞ :

$$-\int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a) dz = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(\zeta-s) \mu(\zeta) d\zeta.$$

Supponendo che all'incognita funzione $\mu(\zeta)$ sia applicabile il teorema di FOURIER, abbiamo per essa l'espressione:

$$\mu(s) = - \int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a) dz,$$

di cui oramai ci resta solo a constatare l'effettiva validità mediante diretta sostituzione nella (1). In primo luogo, ponendo ζ al posto di s , e s al posto di z , potremo scrivere:

$$(7) \quad \mu(\zeta) = - \int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s-\zeta) P(s, a) ds,$$

e il secondo membro della (1) assumerà l'aspetto:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s-\zeta) P(s, a) ds \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Invertendo, il che si riconosce facilmente essere lecito, l'integrazione rispetto a ζ con entrambe le intermedie rispetto a t e ad s , si ottiene:

$$(7') \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} \\ = - \int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} P(s, a) ds \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s-\zeta) d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Ora, se nel terzo integrale si assume $\lambda = \zeta - z$ come variabile di integrazione, si ha l'identità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s-\zeta) d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} \\ = \cos \pi t(s-z) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} \\ + \sin \pi t(s-z) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t\lambda d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}},$$

la quale, in causa della (4), e per essere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t \lambda d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0,$$

si riduce semplicemente a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s - z) d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = h_1(t) \cos \pi t(s - z).$$

Infine, portando questo valore nella (7'), troviamo:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ &= - \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s - z) P(s, a) ds = - P(z, a), \end{aligned}$$

in virtù del teorema di FOURIER.

Con ciò resta provato che la funzione $\mu(\zeta)$, definita dalla (7) soddisfa effettivamente all'equazione (1) e rappresenta per conseguenza la richiesta densità della distribuzione indotta.

Abbiamo dalla (7) che la quantità di materia, la quale viene a disporsi sulla superficie di un segmento cilindrico di spessore $d\zeta$, può essere espressa da:

$$2\pi a \mu(\zeta) d\zeta = - d\zeta \int_0^{\infty} \frac{2\pi a}{h_1(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s - \zeta) P(s, a) ds.$$

Supponendo a molto piccolo, cioè passando al caso limite del filo conduttore, il primo membro, diviso per $d\zeta$, rappresenta la densità lineare, che indicherò con $\nu(\zeta)$; la (6) ci dà poi:

$$-\frac{2\pi a}{h_1(t)} = \frac{1}{2 \log a} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{R_3(a)}{4\pi \log a} + \frac{a^2 R_4(a)}{4\pi} \right)^n \right\},$$

e, supponendo a così piccolo che i termini del tipo $1/(\log a)^2$, $a^2/\log a$

(e a più forte ragione i successivi $a^p/(\log a)^q$, $p \geq 1$, $q \geq 2$, ovvero $p \geq 2$, $q \geq 1$) si possano trascurare di fronte ad $1/\log a$, ne deduciamo:

$$-\frac{2\pi a}{h_1(t)} = \frac{1}{2 \log a};$$

quindi:

$$v(\zeta) = \frac{1}{2 \log a} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s - \zeta) P(s, a) ds,$$

donde, al solito, applicando il teorema di FOURIER:

$$(8) \quad v(\zeta) = \frac{1}{2 \log a} P(\zeta, a).$$

Leggiamo in quest'ultima formula la proposizione seguente:

Un filo rettilineo indefinito a sezione circolare, in presenza di masse esteriori, si elettrizza in modo che la densità lineare della distribuzione indotta è, in ciascun punto, direttamente proporzionale al potenziale esterno, e varia da filo a filo in ragione inversa del logaritmo del raggio della sezione.

Nell'enunciato di questo teorema non è detto che la distribuzione inducente sia simmetrica, poichè il teorema stesso può ritenersi indipendente da tale condizione restrittiva. Qualora infatti lo spessore del filo sia abbastanza piccolo, il potenziale esterno può assumersi costante lungo ciascuna sezione circolare ed è quindi applicabile il procedimento testè indicato.