XII.

SUL MOTO DEI SISTEMI CON TRE GRADI DI LIBERTÀ

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V° (2° sem. 1896), pp. 164-171. (*)

Oggetto di questa Nota si è lo studio dei sistemi materiali S a legami indipendenti dal tempo e con tre gradi di libertà, per cui, quando non agiscono forze, sussistono i tre integrali delle aree. Io mostrerò che tali ipotesi permettono di caratterizzare la natura della forza viva T e conducono a stabilire che, mediante una opportuna scelta di coordinate lagrangiane, T è certamente riducibile:

o alla forma propria di un corpo rigido con un punto fisso;

o alla forma

$$\frac{1}{2} H^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot \{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2\} .$$

Se ne deduce che, anche quando agiscono forze, la dinamica dei sistemi S sopra indicati equivale:

nel primo caso, identicamente, come è manifesto, alla dinamica di un corpo rigido intorno ad un suo punto, supposto fisso;

nel secondo caso (e nell'ipotesi che l'energia totale del sistema sia costante), *a meno di quadrature*, alla dinamica di un punto materiale.

Quest'ultima asserzione sarà giustificata a suo tempo in modo diretto; non lascio però di rilevare che essa si collega alla teoria generale delle trasformazioni delle equazioni dinamiche.

1. – Sia un sistema S, di punti materiali (x, y, z), soggetto a legami indipendenti dal tempo, i quali limitino a tre gradi la sua libertà, di guisa che se ne possa individuare una posizione mediante tre coordinate

(*) Presentata dal Socio E. Beltrami (6 settembre 1896).

lagrangiane. Si supponga di più che la natura dei vincoli sia tale da lasciare sussistere, quando non agiscono forze, i tre integrali delle aree:

$$(1) \qquad \sum m(yz'-zy') = \text{cost.}\,, \quad \sum m(zx'-xz') = \text{cost.}\,, \quad \sum m(xy'-yx') = \text{cost.}$$

La forza viva del sistema S sarà espressa in coordinate lagrangiane da una forma differenziale

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, a_{rs} q'_r q'_s\,,$$

sulla cui natura dobbiamo ora intrattenerci.

Introducendo al solito le variabili $p_i = \partial T / \partial q'_i$ $(i = 1, 2, 3)$, coniugate delle q'_i, si avranno per gli integrali (1) certe espressioni lineari ed omogenee nelle p:

$$(2) \qquad Z_1 f = \sum_1^3{}_r A_{1r} p_r = \text{cost.}, \quad Z_2 f = \sum_1^3{}_r A_{2r} p_r = \text{cost.}, \quad Z_3 f = \sum_1^3{}_r A_{3r} p_r = \text{cost.},$$

dei cui coefficienti A nulla si può ancora affermare. Tuttavia, provenendo per ipotesi $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ dagli integrali delle aree, si ha per le funzioni alternate [1]:

$$(3) \qquad (Z_1 Z_2) f = - Z_3 f\,, \quad (Z_2 Z_3) f = - Z_1 f\,, \quad (Z_3 Z_1) f = - Z_2 f\,.$$

Inoltre, risguardando le forme $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ come simboli di trasformazioni infinitesime, ciascuna di esse sarà ammessa dalla forza viva T del sistema materiale S [2], e complessivamente, in causa delle (3), costituiranno un gruppo Γ_3, a tre parametri (perchè, come vedremo, le Zf non possono essere legate da relazioni lineari a coefficienti *costanti*), il quale trasforma T in sè stessa.

Ciò posto, notiamo in primo luogo che le forme $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ possono non essere tutte e tre indipendenti; per altro due almeno sono tali. Qualora infatti si avesse per es.

$$Z_2 f = \lambda Z_1 f\,, \qquad Z_3 f = \pi Z_1 f\,,$$

si dedurrebbe dalle (3):

$$Z_1 \lambda \cdot Z_1 f = - \pi Z_1 f\,, \qquad (\lambda Z_1 \pi - \pi Z_1 \lambda) Z_1 f = - Z_1 f\,, \qquad Z_1 \pi \cdot Z_1 f = \lambda Z_1 f\,,$$

---

[1] Si cfr., per taluna notizia in proposito, le Note: *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, pubblicate testè in questi « Rendiconti » (§ 2); [in questo vol.: XI, pp. 253–267].

[2] Ibidem, § 1.

e quindi:

$$Z_1\lambda = -\pi\,, \qquad \lambda Z_1\pi - \pi Z_1\lambda = -1\,, \qquad Z_1\pi = \lambda\,,$$

ossia anche:

$$\lambda^2 + \pi^2 = -1\,,$$

il che è assurdo, poichè λ e π dovrebbero in ogni caso, come $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$, essere funzioni essenzialmente reali.

Ci restano pertanto due soli casi da esaminare:

1) Le forme Zf sono tutte e tre indipendenti.

2) Due Zf sono indipendenti, la terza essendone una combinazione lineare.

2. – Nella prima ipotesi, cui ora vogliamo riferirci, il gruppo Γ_3, generato dalle Zf, riesce transitivo ed è quindi, come si sa (3), simile ad ogni altro gruppo isomorfo pure transitivo e nello stesso numero di variabili. In particolare possiede questa proprietà il gruppo G_3 spettante alla forza viva di un corpo rigido (4), le cui trasformazioni infinitesime (assumendo come coordinate lagrangiane i parametri di Rodrigues) possono essere scritte:

$$\begin{cases} Y_1 f = \dfrac{1}{2}\,\{(1 + y_1^2)p_1 + (-y_3 + y_1 y_2)p_2 + (y_2 + y_1 y_3)p_3\}\,, \\[2ex] Y_2 f = \dfrac{1}{2}\,\{(y_3 + y_1 y_2)p_1 + (1 + y_2^2)p_1 + (-y_1 + y_2 y_3)p_3\}\,, \\[2ex] Y_3 f = \dfrac{1}{2}\,\{(-y_2 + y_1 y_3)p_1 + (y_1 + y_2 y_3)p_2 + (1 + y_3^2)p_3\}\,. \end{cases}$$

I gruppi Γ_3 e G_3 sono dunque *simili*; esiste cioè un cambiamento di variabili:

$$(4) \qquad q_1 = f_1(y_1, y_2, y_3)\,, \quad q_2 = f_2(y_1, y_2, y_3)\,, \quad q_3 = f_3(y_1, y_2, y_3)\,,$$

(la cui ricerca esige al più l'integrazione del sistema completo $Z_i f + Y_i f = 0$ $(i = 1, 2, 3)$), che fa passare dalle trasformazioni infinitesime $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$

(3) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. I, Theor. 64, p. 340.

(4) *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, § 2. [In questo vol.: XI, pp. 253–267]

alle $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$; anzi, per essere le Yf legate da relazioni identiche alle (3), si può asserire che le (4) trasformano ordinatamente $Z_1 f$ in $Y_1 f$, $Z_2 f$ in $Y_2 f$, $Z_3 f$ in $Y_3 f$. La forza viva T, espressa per le nove variabili y, diverrà: $T = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, b_{rs} y'_r y'_s$, le b essendo certe funzioni delle y, che ci verrà fatto ben presto di caratterizzare, valendoci della circostanza che la forma quadratica $\frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, b_{rs} y'_r y'_s$ deve ammettere tutte le trasformazioni del gruppo G_3. Questa proprietà fondamentale di T si può esprimere, dicendo che $T = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, b_{rs} y'_r y'_s$ è un invariante del gruppo G_3, esteso alle velocità dy_j/dt, ossia, come è ben noto, integrale di un certo sistema completo:

$$\overline{Y}_1 f = 0\,, \qquad \overline{Y}_2 f = 0\,, \qquad \overline{Y}_3 f = 0\,, \tag{5}$$

(con tre equazioni *distinte* e sei variabili indipendenti), che ommetto, per brevità, di scrivere distesamente, osservando invece addirittura che le tre funzioni:

$$I_1 = \frac{2}{\tau^2}\{ y'_1 + y_3 y'_2 - y_2 y'_3 \}\,, \qquad I_2 = \frac{2}{\tau^2}\{ y'_2 + y_1 y'_3 - y_3 y'_1 \}\,,$$

$$I_3 = \frac{2}{\tau^2}\{ y'_3 + y_2 y'_1 - y_1 y'_2 \}\,,$$

dove è $\tau^2 = 1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, costituiscono una terna di integrali indipendenti del sistema ([5]), talchè T dev'essere una funzione dei soli argomenti I_1, I_2, I_3. Siccome le I sono lineari e omogenee nelle x', si avrà identicamente:

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, b_{rs} y'_r y'_s = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, C_{rs} I_r I_s\,,$$

([5]) Si può accertarsene tanto mediante diretta verifica, quanto, e più comodamente, notando che la forza viva di un corpo rigido:

$$\frac{2}{\tau^4}\{ A(y'_1 + y_3 y'_2 - y_2 y'_3)^2 + B(y'_2 + y_1 y'_3 - y_3 y'_1) + C(y'_3 + y_2 y'_1 - y_1 y'_2)^2 \}\,,$$

ammette il gruppo G_3; per modo che, *qualunque sieno i valori delle costanti* A, B, C, il trinomio precedente è integrale delle (5). Ciò implica che appunto separatamente I_1, I_2, I_3 sieno integrali.

le C_{rs} essendo costanti il cui determinante:

$$\sum \pm C_{11}C_{22}C_{33} = \frac{\sum \pm b_{11}b_{22}b_{33}}{\dfrac{8}{\tau^6}\begin{vmatrix} 1 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 1 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\tau^4}{8}\sum \pm b_{11}b_{22}b_{33}$$

è positivo.

È facile ora passare alla forma definitiva di T, eseguendo sulle variabili y una sostituzione ortogonale *a coefficienti costanti*. Poniamo per ciò:

$$(6) \qquad y_r = \sum_{1}^{3}{}_p\, \alpha_{rp} x_p\,, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

$$\tau^2 = 1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma^2\,,$$

$$J_1 = \frac{2}{\sigma^2}(x_1' + x_3 x_2' - x_2 x_3')\,, \qquad J_2 = \frac{2}{\sigma^2}(x_2' + x_1 x_3' - x_3 x_1')\,,$$

$$J_3 = \frac{2}{\sigma^2}(x_3' + x_2 x_1' - x_1 x_2')\,.$$

Si verifica immediatamente che fra le I e le J passano le stesse relazioni che fra le y e le x, ossia:

$$I_r = \sum_{1}^{3}{}_p\, \alpha_{rp} J_p \qquad (r = 1, 2, 3),$$

e da queste segue senz'altro (col noto procedimento, che equivale geometricamente a riferire l'ellissoide $\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, C_{rs} I_r I_s = 1$ ai suoi assi) che T può essere ricondotta alla forma propria del corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2}\{ A J_1^2 + B J_2^2 + C J_3^2 \} =$$

$$= \frac{2}{\sigma^4}\{ A(x_1' + x_3 x_2' - x_2 x_3')^2 + B(x_2' + x_1 x_3' - x_3' x_1)^2 + C(x_3' + x_2 x_1' - x_1 x_2')^2 \}\,.$$

3. – Se delle forme Zf due soltanto sono indipendenti, potremo sempre, per la simmetria delle (3), risguardare tali $Z_1 f$ e $Z_2 f$, e porre:

$$Z_3 f = \mu Z_1 f + \nu Z_2 f\,.$$

Avremo le identità:

$$(Z_2Z_3)f = -Z_1f = \{ Z_2\mu + \mu^2 \} Z_1f + \{ Z_2\nu + \mu\nu \} Z_2f ,$$
$$(Z_3Z_1)f = -Z_2f = -\{ Z_1\mu - \mu\nu \} Z_1f - \{ Z_1\nu - \nu^2 \} Z_2f ,$$

le quali, per l'indipendenza di Z_1f, Z_2f, dànno:

$$(7) \quad Z_2\mu + \mu^2 = -1 , \quad Z_2\nu + \mu\nu = 0 , \quad Z_1\mu - \mu\nu = 0 , \quad Z_1\nu - \nu^2 = 1 .$$

Di qua si deduce che le quantità *reali* μ e ν sono funzioni indipendenti delle variabili q_1, q_2, q_3 e quindi in particolare che nessuna di esse è costante. Difatti, qualora passasse fra μ e ν una relazione $\psi(\mu, \nu) = 0$, indipendente dalle q, si potrebbe risolvere l'equazione $\psi(\mu, \nu) = 0$, rispetto ad uno almeno dei due argomenti μ o ν e porre, per es., $\nu = \omega(\mu)$; le (7) diverrebbero allora:

$$Z_2\mu + \mu^2 = -1 , \quad \omega'(\mu)Z_2\mu + \mu\omega(\mu) = 0 , \quad Z_1\mu - \mu\omega(\mu) = 0 ,$$
$$\omega'(\mu)Z_1\mu - \omega^2(\mu) = 1 ,$$

donde:

$$1 + \mu^2 + \omega^2(\mu) = 0 ,$$

il che è assurdo.

Dopo ciò si conclude che le trasformazioni infinitesime Z_1f, Z_2f, Z_3f, sono anche in questo caso indipendenti e generano quindi un gruppo Γ_3' a tre parametri (intransitivo), che dico essere simile al gruppo G_3', le cui trasformazioni infinitesime sono:

$$Y_1f = y_2p_3 - y_3p_2 , \quad Y_2f = y_3p_1 - y_1p_3 , \quad Y_3f = y_1p_2 - y_2p_1 ,$$

legate, come le Zf, da relazioni del tipo (3).

Per la dimostrazione, basterà notare che le condizioni generali di similitudine fra due gruppi di trasformazioni (6) sono soddisfatte nel caso nostro, poichè G_3' ha la medesima struttura di Γ_3' e, delle sue trasformazioni infinitesime Yf, Y_1f e Y_2f sono indipendenti, mentre Y_3f risulta tale combinazione lineare

$$-\frac{y_1}{y_3} Y_1f - \frac{y_2}{y_3} Y_2f ,$$

---

(6) LIE-ENGEL, *Theorie*, ecc., B. I, Theor. 65, pp. 353-354.

delle prime due, che, avuto riguardo alle cose dette, le equazioni

$$\mu = -\frac{y_1}{y_3}, \quad \nu = -\frac{y_2}{y_3}$$

sono compatibili e si possono risolvere tanto rispetto a due delle variabili q, quanto rispetto a due delle variabili y.

Esiste adunque un cambiamento di variabili [7]:

$$(8) \qquad q_1 = \varphi_1(y_1, y_2, y_3), \quad q_2 = \varphi_2(y_1, y_2, y_3), \quad q_3 = \varphi_3(y_1, y_2, y_3),$$

atto a far passare dalle trasformazioni infinitesime Z_1f, Z_2f, Z_3f alle Y_1f, Y_2f, Y_3f rispettivamente.

Indicando con $\frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, \beta_{rs} y'_r y'_s$ l'espressione della forza viva T, dopo eseguita la trasformazione (8), si osserverà, come nel caso precedente, che $\frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs}\, \beta_{rs} y'_r y'_s$ deve essere un invariante del gruppo G'_3 (esteso alle velocità) e quindi, come si verifica senza difficoltà, una funzione dei soli argomenti $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2$, $y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3'$. Se ne conclude che la più generale espressione di T è:

$$T = \frac{1}{2}\left[K^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \cdot \{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2\} + \right.$$
$$\left. + K_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\{y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3'\}^2\right],$$

K e K_1 designando funzioni non ulteriormente determinabili dell'argomento indicato $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Col porre:

$$(9) \qquad \begin{cases} y_1 = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi, \quad y_2 = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \quad y_3 = \varrho\cos\vartheta, \\ r = e^{\int \frac{\sqrt{K^2(\varrho^2) + \varrho^2 K_1^2(\varrho^2)}}{\varrho K(\varrho)} d\varrho}, \quad H^2(r^2)\cdot r^2 = K^2(\varrho^2)\cdot\varrho^2, \end{cases}$$

il precedente valore di T si semplifica notevolmente e diviene:

$$T = \frac{1}{2} H^2(r^2)\{r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\varphi'^2\},$$

---

(7) In questo caso se ne hanno infiniti che si possono ottenere (LIE-ENGEL, loco citato, § 91) ponendo $\mu = -y_1/y_3$; $\nu = -y_2/y_3$ e $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ eguale all'integrale generale del sistema completo $Z_1f = 0$, $Z_2f = 0$. Tale ricerca esige in fondo, come si vede subito, al più l'integrazione di una equazione differenziale ordinaria.

dopo di che, facendo:

$$(10) \qquad x_1 = r \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi\,, \qquad x_2 = r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi\,, \qquad x_3 = r \cos \vartheta\,,$$

otteniamo la forma definitiva:

$$T = \frac{1}{2} H^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \{ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \}\,,$$

la quale differisce solo per il fattore H^2 da quella spettante alla forza viva di un punto materiale nello spazio ordinario.

È facile però riconoscere che la dinamica di un sistema S di forza viva T, quando esiste un potenziale e l'energia è una costante data (ciò che *fisicamente* non costituisce restrizione), equivale, a meno di quadrature, alla dinamica del punto materiale. Infatti le equazioni del moto pel sistema in questione, se si dica V la funzione delle forze (dipendente soltanto dalle coordinate) saranno:

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\,, \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

e sussisterà l'integrale delle forze vive:

$$(12) \qquad T - V = E\,.$$

Sostituendo alla variabile indipendente t una nuova variabile t_1, definita da:

$$dt_1 = \frac{dt}{H^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\,,$$

e avendo riguardo alla (12), le equazioni (11) si possono scrivere:

$$\frac{d^2 x_i}{dt_1^2} = (V + E)\frac{\partial H^2}{\partial x_i} + H^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial \{ H^2(V + E) \}}{\partial x_i}\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ond'è manifesto che il moto del sistema S, sollecitato da forze provenienti dal potenziale V e dotato di una energia totale E, ammette, nello spazio rappresentativo (x_1, x_2, x_3), le stesse traiettorie spettanti al moto di un punto materiale, soggetto al potenziale $H^2(V + E)$ e di energia nulla.

Note le traiettorie, la determinazione completa delle leggi del moto si raggiunge mediante una quadratura.

Per avere un esempio (oltre quello del punto materiale) di un sistema, con tre gradi di libertà, per cui, quando non agiscono forze, sussistono i tre integrali delle aree, (funzionalmente) non indipendenti, si può pensare al sistema di due punti materiali, collegati tra loro rigidamente, e costretti a rimanere allineati coll'origine delle coordinate.