XVI.

SULLA RIDUCIBILITÀ DELLE EQUAZIONI ELETTRODINAMICHE DI HELMHOLTZ ALLA FORMA HERTZIANA

« Nuovo Cimento », serie 4ª, vol. VI, agosto 1897,

pp. 93-108.

Le relazioni matematiche tra le forze elettriche e magnetiche nell'etere libero, assegnate da CLERK MAXWELL, vennero (colle debite modificazioni) estese da HERTZ ad un campo qualunque, sì da abbracciare l'intera classe dei fenomeni elettromagnetici.

È noto che MAXWELL aveva dedotto le sue equazioni da ipotesi piuttosto complicate e con ragionamenti non sempre corretti; per non incorrere in simili inconvenienti, parve a HERTZ miglior cosa di prescindere (almeno nel caso dei corpi in quiete) da ogni giustificazione *a priori*, limitandosi a far risaltare il perfetto accordo fra la rappresentazione matematica e quasi tutti i fatti sperimentali finora studiati.

Dal punto di vista positivo, null'altro (1) si potrebbe esigere, qualora di molti fenomeni elettromagnetici (per es. degli stazionarii) non si possedessero già trattazioni sistematiche, conformi del pari all'esperienza e seducenti non meno pel rigore logico dell'insieme che per la limpida semplicità delle ipotesi fondamentali.

---

(1) Rimane però, *anche dal lato strettamente fisico*, la possibilità di ricondurre i fenomeni in questione ad altri più semplici o di tipo più intuitivo, come, ad esempio, i fenomeni dinamici. Una tale possibilità, congiunta forse al bisogno psicologico di risalire nei legami causali, diede origine a molte teorie ed interpretazioni meccaniche dell'elettromagnetismo, le quali sono tutte astrattamente possibili, ma in realtà solo dall'esperienza potrebbero, e potranno forse un giorno, venir sancite o reiette. Prescindendo dall'importanza matematica, esse hanno per ora appena il valore di un modello. Si consulti nei riguardi di tutto ciò: H. EBERT, *Zur Theorie der magnetischen und elektrischen Erscheinungen* e *Ueber die Bewegungsformen, welche den elektromagnetischen Erscheinungen zu Grunde gelegt werden können*, « Wiedemann's Annalen », B. 51 e 52.

Queste Memorie del sig. EBERT, oltre all'esposizione di una nuova teoria, contengono un'accurata letteratura sull'argomento.

L'insigne valore storico e metodologico di queste teorie classiche vieta che si possano ora tacciare di speculazioni metafisiche; talchè si rende più tosto desiderabile che venga fatto di raccogliere nello stesso indirizzo tutte le manifestazioni dell'elettromagnetismo. A tale scopo vennero proposte da fisici e matematici eminenti ipotesi disparate, di cui, se alcune si possono impugnare per conseguenze fisicamente inaccettabili (2), altre, nelle loro deduzioni bene armonizzanti, e non contradette finora dai fatti, richiedono matura discussione.

Fra le teorie classiche della elettrodinamica, quella è senza alcun dubbio particolarmente notevole, che fu stabilita e svolta ampiamente da HELMHOLTZ (3), in base alla legge potenziale di F. NEUMANN. Se essa coincida in sostanza con quella di HERTZ o dove e come ne differisca, non fu esaminato per anco (4), ma la indagine non è, parmi, superflua, onde vorrei intrattenerne i lettori di questo periodico.

Espongo frattanto il resultato ottenuto e alcune considerazioni, che vi si connettono intimamente.

La teoria elettrodinamica di HELMHOLTZ (corrispondente alla legge potenziale di F. NEUMANN) *conduce alle equazioni hertziane, qualora si ammetta che le azioni a distanza* (tanto di origine elettrostatica, quanto di origine elettrodinamica) *si propaghino con velocità finita* (5).

Più precisamente noi introdurremo l'ipotesi che, in un mezzo indefinito, generalmente omogeneo (6) ed isotropo, la velocità di propagazione sia uniforme ed espressa da $1/(A\sqrt{\varepsilon\mu})$, dove $1/A$ è la velocità della luce nell'etere, ε e μ rappresentano rispettivamente le costanti di dielet-

---

(2) Veggasi per es., in più memorie di H. HELMHOLTZ (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, B. 1, pp. 537-687) la critica della legge di WEBER.

(3) Loco citato, pp. 537-820; siccome però noi qui dovremo occuparci dei corpi in quiete, basterà riferirsi quasi esclusivamente alla prima delle memorie elettrodinamiche (*Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper*, ibidem, pp. 545-628).

(4) HELMHOLTZ fece vedere che le equazioni di MAXWELL (e quindi le hertziane) rientrano come caso limite in quelle da lui stabilite. Però codesto passaggio al limite snatura completamente il punto di vista primitivo, nè si presta ad un confronto fra le relazioni, che legano, nei due casi, le stesse quantità fisiche. Un tentativo in questo senso fu fatto da HERTZ nello scritto *Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik* (« Ges. Werke », B. 1, pp. 295-319) dove si trovano assegnate le correzioni, mediante cui, nel caso dell'etere, si può passare dalle equazioni dell'elettrodinamica ordinaria a quelle di MAXWELL. Non si può tacere tuttavia che le ipotesi dell'illustre estinto sono fisicamente infelici e in aperta contraddizione collo svolgimento matematico. Cfr. C. NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen*, Leipzig, 1896, achtes Capitel, § 5.

(5) Si avverta che l'idea di attribuire alle azioni a distanza una velocità di propagazione finita è tutt'altro che nuova: anzi GAUSS e RIEMANN ritennero che in essa si dovesse cercare il fondamento della elettrodinamica. Quanto all'esistenza qualitativa del fenomeno (o di altro equivalente per le conseguenze sperimentali), se ne ha attualmente una prova indiscutibile nelle celebri esperienze di HERTZ sui raggi di forza elettrica.

(6) Intendiamo con ciò un mezzo, la cui omogeneità abbia soltanto eccezioni superficiali.

tricità e di magnetizzazione del mezzo. Per brevità, designeremo talora questa ipotesi colla lettera (I).

Si vede subito che, per attribuirle forma matematica, basta sostituire, al potenziale elementare

$$\frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta, t)}{r} \quad (r = \sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}),$$

di una massa o componente di corrente Ω, esistente all'istante t nel punto (ξ, η, ζ), il potenziale

$$\frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta, t - A\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot r)}{r}.$$

Le due espressioni coincidono, se Ω non dipende da t, cioè per tutti i fenomeni di carattere stazionario; in ogni caso, per essere $A\sqrt{\varepsilon\mu}$ una quantità molto piccola, la ipotesi (I) ha, rispetto alla teoria di Helmholtz, soltanto un valore correttivo e le divergenze sono trascurabili, finchè il campo, entro cui avvengono e si osservano le azioni elettromagnetiche, sia abbastanza ristretto, rispetto alla velocità della luce. Di qua risulta che, qualora le equazioni di Hertz corrispondano effettivamente alla realtà, assai poco se ne scostano, entro certi limiti, anche le originarie equazioni di Helmholtz.

La ipotesi (I) le fa coincidere identicamente colle equazioni hertziane o, per essere esatti, le fa diventare *integrali* (funzionali) di quelle.

Le relazioni integrali, così per incidenza assegnate, sono meno semplici delle equazioni di Hertz, ma dicono manifestamente qualche cosa di più e potranno rendere talora utili servizi anche dal punto di vista matematico.

Merita di essere notata un'altra circostanza, resa probabile dalla nostra ricerca, cioè che, *fra le leggi elementari di induzione elettrodinamica, proposte da* Ampère, Faraday, Grassmann, F. Neumann, W. Weber, C. Neumann (7)), *la più attendibile, anche per circuiti aperti, è* (nel caso dei corpi in quiete e tenuto conto della ipotesi correttiva (I) sopra indi-

(7) Cfr. H. Helmholtz, *Wiss. Abh.*, B. I, pp, 774-790.

In una importante memoria («Leipz. Berichte», 1896) il signor C. Neumann discusse con profonda analisi la forma matematica delle leggi elementari elettrodinamiche ed espose sommariamente alcuni risultati di grande interesse. Mettendoli in relazione col presente lavoro, se ne desume un argomento in pregiudizio di certa ipotesi Epsilon, che il chiar.mo Autore sembra prediligere, senza per altro attribuirvi un valor essenziale.

cata) *la legge potenziale di* F. NEUMANN [8]) *in quanto essa e soltanto essa* [9] *permette di arrivare alle equazioni di* HERTZ.

Io mi sono qui limitato a considerare le azioni elettromagnetiche in un mezzo indefinito generalmente omogeneo, isotropo ed in quiete, poichè, tolta su questo terreno la discrepanza fra la elettrodinamica classica e la hertziana, si intuisce senza alcuna difficoltà come, proseguendo in modo analogo, si possa pervenire ad un accordo completo.

Così ad esempio, per un mezzo in movimento, basterà secondo la via tracciata dal Prof. VOLTERRA [10], possedere le trasformate in coordinate generali delle equazioni di HELMHOLTZ.

Ma di ciò eventualmente in altra occasione. Dovrei allora entrare in più minuti dettagli, per preludere alla trattazione di un campo elettromagnetico generale, dopo di che mi sarebbe possibile (invocando il principio della conservazione dell'energia) di indagare la legge delle azioni ponderomotrici.

Pel momento sembrami conveniente di escludere ogni complicazione, nella lusinga che la semplicità dello svolgimento sia per conciliarmi la benevola attenzione degli studiosi.

1. – Sia S un mezzo indefinito, generalmente omogeneo, isotropo ed in quiete, in cui avvengano fenomeni elettrodinamici. Dicansi complessivamente σ le superficie, situate comunque, purchè, si intende, fisse in S, lungo cui può venire meno la omogeneità dello stesso S.

Gli elementi, che determinano lo stato fisico del mezzo (considerando il fenomeno del movimento dell'elettricità nel suo aspetto più generale, ma prescindendo da manifestazioni d'altra natura) sono la densità elettrostatica e le componenti della corrente in ciascun punto (ξ, η, ζ) e in ciascun istante t. Supporremo che la distribuzione della elettricità statica e delle correnti sia generalmente di volume, ma che possa aver luogo sopra le σ anche una distribuzione elettrostatica a due dimensioni. Si indicheranno con $E(\xi, \eta, \zeta, t)$, $u(\xi, \eta, \zeta, t)$, $v(\xi, \eta, \zeta, t)$, $w(\xi, \eta, \zeta, t)$, la densità elettrostatica di volume e le componenti della corrente in un generico punto (ξ, η, ζ) di S e nell'istante t; con $e(\xi, \eta, \zeta, t)$ la densità superficiale in un punto (ξ, η, ζ) delle superficie σ e pure nell'istante t.

---

[8] Ricordo a questo proposito che HELMHOLTZ si attenne costantemente alla legge potenziale di F. NEUMANN e non celò il proprio convincimento che essa fosse per prevalere in via definitiva.

[9] Non ho, per vero dire, mostrato esplicitamente che *soltanto* la legge di F. NEUMANN permette di arrivare alle equazioni di HERTZ, ma lo si può riconoscere, assumendo a punto di partenza un'altra qualunque tra le leggi mentovate ed applicando ad essa il procedimento, che sarà qui impiegato per la legge di F. NEUMANN. In tal modo si otterrebbero equazioni *contraddittorie* con quelle di HERTZ.

[10] *Sopra le equazioni di* HERTZ, (in questo giornale, t. 29, 1891).

Le funzioni E, u, v, w si risguarderanno nulle all'infinito d'ordine superiore al secondo e, per ogni valore di t, finite, continue e derivabili in tutto lo spazio S, fatta eccezione per le superfici σ, passando attraverso alle quali potranno subire delle discontinuità. La densità superficiale e si intenderà finita, continua e derivabile rispetto al tempo sopra ogni superficie σ.

Designeremo con p', E', v', w', f'; p'', E'', u'', v'', w'', f'' le due direzioni della normale, i valori limiti di E, u, v, w, e più generalmente di una qualsiasi funzione f, da una parte e dall'altra di σ (11); con $\alpha' = -\alpha''$, $\beta' = -\beta''$, $\gamma' = -\gamma''$ i coseni direttori di p' e di p''.

Per completare la determinazione analitica del fenomeno, considerato isolatamente, basta aver riguardo alle relazioni fondamentali (equazioni di continuità):

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma' + u''\alpha'' + v''\beta'' + w''\gamma''. \tag{2}$$

2. – Ciò posto, occupiamoci di collegare il movimento della elettricità con altri concetti fisici e, in primo luogo, dette rispettivamente ε e μ le costanti di dielettricità e di magnetizzazione del mezzo S, consideriamo, accanto alle densità vere E, e e alle correnti vere u, v, w, le quantità:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{\varepsilon}, \qquad \mathbf{e} = \frac{e}{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = \mu u, \quad \mathbf{v} = \mu v, \quad \mathbf{w} = \mu w. \tag{4}$$

chiamate, come è noto, densità dell'elettricità *libera* e componenti della corrente *libera*, poichè appunto esse quantità (e non le corrispondenti italiche) rimangono, o rispettivamente divengono *libere* di esercitare azioni a distanza. I potenziali relativi sarebbero, secondo l'ordinaria teoria della propagazione istantanea,

$$\int_S \frac{\mathbf{E}}{r}\, dS, \quad \int_\sigma \frac{\mathbf{e}}{r}\, d\sigma, \quad \int_S \frac{\mathbf{u}}{r}\, dS, \quad \text{ecc.}$$

$$(\text{con } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad \text{e} \quad dS = d\xi\, d\eta\, d\zeta).$$

(11) Per non essere prolissi, ragioneremo sempre come se le superficie σ possedessero in ciascun punto piano tangente. Intenderemo tuttavia che tale condizione sia soddisfatta solo generalmente, bastando ciò a legittimare le operazioni di calcolo, che dovremo eseguire.

Ammessa invece l'ipotesi (I) che la velocità di propagazione sia $1/(A\sqrt{\varepsilon\mu})$, avremo i potenziali:

$$\begin{aligned}(5)\qquad \boldsymbol{F}(x, y, z, t) = \int_S \frac{\boldsymbol{E}(\xi, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\,dS \,+ \\ + \int_\sigma \frac{\boldsymbol{e}(\xi, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\,d\sigma\,,\end{aligned}$$

$$(6)\qquad \left|\begin{aligned} \boldsymbol{U}(x, y, z, t) &= \int_S \frac{\boldsymbol{u}(\xi, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\,dS\,, \\ \boldsymbol{V}(x, y, z, t) &= \int_S \frac{\boldsymbol{v}(\xi, \eta, \xi, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\,dS\,, \\ \boldsymbol{W}(x, y, z, t) &= \int_S \frac{\boldsymbol{w}(\zeta, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\,dS\,. \end{aligned}\right.$$

Rispetto alla natura analitica delle funzioni $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$, si osserva quanto segue ([12]):

La funzione $\boldsymbol{F}$ e le sue derivate prime sono finite e continue in tutto lo spazio, fatta eccezione per le superficie σ, dove la $\boldsymbol{F}$ stessa e le derivate tangenziali rimangono continue, mentre le derivate normali presentano la discontinuità:

$$(5a)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}'}{\partial p'} + \frac{\partial \boldsymbol{F}''}{\partial p''} = -\,4\pi \boldsymbol{e}\,;$$

in ogni punto di S, non appartenente alle superficie σ, è verificata l'equazione:

$$(5')\qquad \underset{2}{\Delta}\boldsymbol{F} - A^2\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial t^2} = -\,4\pi E\,;$$

le funzioni $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$, sono ovunque finite e continue, assieme alle loro

([12]) V. VOLTERRA, *Sul principio di Huygens*, tomi 31, 32 e 33 di questo giornale.

derivate prime, e soddisfano ordinatamente alle equazioni:

$$(6') \quad \begin{cases} \underset{2}{\Delta} U - A^2\varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi u , \\ \underset{2}{\Delta} V - A^2\varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi v , \\ \underset{2}{\Delta} W - A^2\varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -4\mu w . \end{cases}$$

Oltre a queste proprietà, dovute esclusivamente alla forma della (5) e delle singole (6), si può stabilire una relazione importantissima tra le quattro funzioni F, U, V, W.

Notiamo a tale scopo che, in causa delle (3), (4), le (1), (2) danno:

$$(1') \qquad -\varepsilon\mu \frac{\partial E}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} ,$$

$$(2') \qquad -\varepsilon\mu \frac{\partial e}{\partial t} = u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma' + u''\alpha'' + v''\beta'' + w''\gamma'' ,$$

ossia, cambiando t in $t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu}$ e designando per brevità con $\bar{f}$ ciò, che diviene una funzione f di t, quando si sostituisce $t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu}$ al posto di t:

$$(1'') \qquad -\varepsilon\mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} + A\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right\} ,$$

$$(2'') \qquad -\varepsilon\mu \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \bar{u}'\alpha' + \bar{v}'\beta' + \bar{w}'\gamma' + \bar{u}''\alpha'' + \bar{v}''\beta'' + \bar{w}''\gamma'' ;$$

d'altra parte:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \int_S \left\{ \frac{\partial \dfrac{\bar{u}}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \dfrac{\bar{v}}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \dfrac{\bar{w}}{r}}{\partial z} \right\} dS =$$

$$= -\int_S \left\{ \bar{u}\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial \xi} + \bar{v}\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial \eta} + \bar{w}\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial \zeta} \right\} dS +$$

$$+ A\sqrt{\varepsilon\mu}\int_S \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \zeta} \right\} dS =$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} + A\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{ \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \zeta} \right\} \right] \frac{dS}{r} +$$

$$+ \int_\sigma [\bar{u}'\alpha' + \bar{v}'\beta' + \bar{w}'\gamma' + \bar{u}''\alpha'' + \bar{v}''\beta'' + \bar{w}''\gamma''] \frac{d\sigma}{r} ,$$

per cui, confrontando colle (1″), 2″), si deduce:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial z} = -\,\varepsilon\mu \int\limits_S \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\,\frac{dS}{r} - \varepsilon\mu \int\limits_\sigma \frac{\partial \bar{e}}{\partial t}\,\frac{d\sigma}{r}\,,$$

e, siccome il secondo membro, in virtù della (5), equivale a $-\,\varepsilon\mu\,(\partial \boldsymbol{F}/\partial t)$, risulta in definitiva:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial z} = -\,\varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\,, \tag{7}$$

che è la relazione annunciata.

3. – Nel paragrafo precedente si sono considerati i potenziali $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ soltanto sotto l'aspetto matematico, come funzioni definite dalle (5), (6). Ne stabiliremo ora gli attributi fisici, mettendoli in relazione *colle forze e colle polarizzazioni elettriche e magnetiche.*

Si designino con X, Y, Z, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, le componenti della forza e della polarizzazione elettrica, con L, M, N, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ le componenti della forza e della polarizzazione magnetica.

La teoria elettrodinamica di Helmholtz (tenuto conto, si intende, della ipotesi correttiva (I)) conduce a porre:

$$\begin{cases} \mu L = \mathbf{L} = A\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} - \dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial y}\right), \\[2ex] \mu M = \mathbf{M} = A\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x} - \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}\right), \\[2ex] \mu N = \mathbf{N} = A\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} - \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}\right), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{X}}{\varepsilon} = X = -\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} - A^2 \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\mathbf{Y}}{\varepsilon} = Y = -\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} - A^2 \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\mathbf{Z}}{\varepsilon} = Z = -\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} - A^2 \dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}. \end{cases} \tag{9}$$

Non sarà male ricordare brevemente come si giustificano queste equazioni, o, se si vuole, quali sono le leggi fisiche (elementari), da cui esse provengono. Potremo limitarci al caso di un mezzo non polarizzabile, poichè l'estensione al caso generale si fa poi in modo ovvio ([13]).

Avremo $\varepsilon = \mu = 1$ e $\boldsymbol{E} = E$, $\boldsymbol{e} = e$, $\boldsymbol{u} = u$, $\boldsymbol{v} = v$, $\boldsymbol{w} = w$, $\boldsymbol{L} = L$, $\boldsymbol{M} = M$, $\boldsymbol{N} = N$, $\boldsymbol{X} = X$, $\boldsymbol{Y} = Y$, $\boldsymbol{Z} = Z$. Secondo la *legge di* Coulomb, la azione elettrostatica, esercitata nell'istante t, dalla massa elettrica elementare $E(\xi, \eta, \zeta, t)\, dS$, sulla massa $+1$, situata in (x, y, z) avrebbe per componenti

$$-E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS\,, \quad -E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dS\,, \quad -E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS\,;$$

in conformità all'ipotesi (I), noi assumeremo invece

$$-\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial x}\,, \quad -\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial y}\,, \quad -\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial z}\,,$$

il che porta, nelle singole componenti appena una correzione *di secondo ordine* ([14]) *nella inversa della velocità della luce*. In modo analogo, per fis-

---

([13]) Si vegga: W. Voigt, *Kompendium der theoretischen Physik*, Leipzig, 1896, B. 2, pp. 48-58, 206-218.

([14]) Si ha infatti, considerando per es. la componente secondo l'asse delle x:

$$\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial x} = E(\xi, \eta, \zeta,\ t - Ar) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial E(\xi, \eta, \zeta,\ t - Ar)}{\partial x}\,,$$

e, siccome (ammettendo che la funzione E sia derivabile due volte rispetto a t) si può scrivere

$$E(\xi, \eta, \zeta,\ t - Ar) = E(\xi, \eta, \zeta,\ t) - Ar \frac{\partial E(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} A^2 r^2 \frac{\partial^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r)}{\partial t^2} \quad (0 < \theta < 1)\,,$$

ne segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial x} &= E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - Ar \frac{\partial E(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 r^2 \frac{\partial^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r)}{\partial t^2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{1}{r} A \frac{\partial E(\xi, \eta\, \zeta, t)}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} A^2 \frac{\partial^3 \{ r^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r) \}}{\partial t^2 \partial x} = \\ &= E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \left[r^2 \frac{\partial^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r)}{\partial t^2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \{ r^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r) \}}{\partial t^2 \partial x} \right], \end{aligned}$$

il che dimostra l'asserto.

sare la azione di un elemento di corrente ($u\,dS$, $v\,dS$, $w\,dS$) sopra un polo magnetico, sostituiremo alle componenti:

$$A\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dS\,,\quad A\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS\,,\quad A\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dS\,,$$

desunte dalla *legge di* Biot *e* Savard, le componenti:

$$A\left(\frac{\partial\frac{\overline{v}}{r}}{\partial z}-\frac{\partial\frac{\overline{w}}{r}}{\partial y}\right)dS\,,\quad A\left(\frac{\partial\frac{\overline{w}}{r}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{\overline{u}}{r}}{\partial z}\right)dS\,,\quad A\left(\frac{\partial\frac{\overline{u}}{r}}{\partial y}-\frac{\partial\frac{\overline{v}}{r}}{\partial x}\right),$$

la differenza essendo nel caso presente almeno *di terzo ordine* ([15]) in A.

Infine, ricordando che la *legge potenziale di* F. Neumann assegna come componenti della induzione elettrica, dovuta all'elemento di corrente ($u\,dS$, $v\,dS$, $w\,dS$), in un punto (x, y, z), le espressioni:

$$-\frac{A^2}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial v}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial w}{\partial t}\,,$$

la ipotesi (I) ci porterà ad assumere:

$$-\frac{A^2}{r}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}\,,$$

con un divario dalle prime, che sarà anche qui almeno *di terzo ordine* ([16]) in A.

In base alle leggi, così modificate, di Coulomb, di Biot e Savard, e di F. Neumann, con una semplice integrazione a tutto il campo S, ricaviamo effettivamente le equazioni (8) e (9), dove si sia posto $\varepsilon = \mu = 1$ ([17]).

([15]) La dimostrazione è identica a quella indicata testè per le componenti dell'azione elettrostatica.

([16]) Lo si prova anche più semplicemente che negli altri due casi, arrestando al primo termine lo sviluppo di Taylor.

([17]) Prescindendo dall'ipotesi correttiva (I), sono le equazioni (19 b) e (3 b) della citata memoria di Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper*. Va notato che nell'ultimo paragrafo Helmholtz discute anche l'influenza delle polarizzazioni elettrica e magnetica, attenendosi alla teoria di Poisson. Le nostre equazioni (8), (9), rispecchiano il modo di vedere, dirò così, sbrigativo, dei moderni circa le dette polarizzazioni.

4. – È tempo ormai di conseguire lo scopo prefisso, mostrando che dalle equazioni generali (8) e (9) discendono le equazioni di HERTZ.

In primo luogo, eliminando dalle (9) la funzione $\boldsymbol{F}$, avremo:

$$A^2 \left\{ \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial z\, \partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial y\, \partial t} \right\} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$A^2 \left\{ \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial z\, \partial t} \right\} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$A^2 \left\{ \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial y\, \partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial x\, \partial t} \right\} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

e il confronto colle derivate delle equazioni (8) rispetto al tempo, ci darà:

$$(8') \quad \left| \begin{aligned} A \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Derivando invece le (9) rispetto al tempo, moltiplicandole per $A\varepsilon\mu$ e sostituendo ad

$$A^2 \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2}, \quad A^2 \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial t^2}, \quad A^2 \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}$$

i loro valori desunti dalle (6′), otteniamo:

$$A\mu \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = -A \left\{ \frac{\partial \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}}{\partial x} \varepsilon\mu + \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{U} + 4\pi \boldsymbol{u} \right\},$$

$$A\mu \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t} = -A \left\{ \frac{\partial \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}}{\partial y} \varepsilon\mu + \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{V} + 4\pi \boldsymbol{v} \right\},$$

$$A\mu \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial t} = -A \left\{ \frac{\partial \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}}{\partial z} \varepsilon\mu + \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{W} + 4\pi \boldsymbol{w} \right\};$$

d'altra parte, avuto riguardo alla (7), si ricava dalle (8):

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)=-A\left(\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial t}}{\partial x}\varepsilon\mu+\underset{2}{\Delta}U\right),$$

$$\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)=-A\left(\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial t}}{\partial y}\varepsilon\mu+\underset{2}{\Delta}V\right),$$

$$\mu\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)=-A\left(\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial t}}{\partial z}\varepsilon\mu+\underset{2}{\Delta}W\right),$$

onde infine, sottraendo ordinatamente queste relazioni dalle precedenti e ricordando le (4):

$$(9')\qquad\left\{\begin{aligned}&A\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}-4\pi Au\,,\\&A\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}-4\pi Av\,,\\&A\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}-4\pi Aw\,.\end{aligned}\right.$$

I sistemi (8′) e (9′) coincidono anche nella forma colle equazioni hertziane (9*a*) e (9*b*) ([18]). Restano da esaminare soltanto le condizioni ai limiti.

Hertz ammette ([19]) che, lungo ogni superficie σ di separazione, rimangano continue le componenti tangenziali delle forze elettriche e magnetiche, ma si abbiano per le componenti normali (se si tratta di mezzi isotropi) le discontinuità:

$$(10)\qquad \mu'\left(\frac{\partial L'}{\partial t}\alpha'+\frac{\partial M'}{\partial t}\beta'+\frac{\partial N'}{\partial t}\gamma'\right)+\mu''\left(\frac{\partial L''}{\partial t}\alpha''+\frac{\partial M''}{\partial t}\beta''+\frac{\partial N''}{\partial t}\gamma''\right)=0\,,$$

$$(11)\qquad \varepsilon'\left(\frac{\partial X'}{\partial t}\alpha'+\frac{\partial Y'}{\partial t}\beta'+\frac{\partial Z'}{\partial t}\gamma'\right)+\varepsilon''\left(\frac{\partial X''}{\partial t}\alpha''+\frac{\partial Y''}{\partial t}\beta''+\frac{\partial Z''}{\partial t}\gamma''\right)=$$
$$=-4\pi(u'\alpha'+v'\beta'+w'\gamma'+u''\alpha''+v''\beta''+w''\gamma'')\,.$$

(18) Ges. Werke, Bd. II, p. 225; od anche tomo 28 di questo giornale, p. 207.
(19) Ibidem, § 8.

Nel caso nostro si tratta di un mezzo unico, o, meglio, ponendo mente alle superficie σ, di più mezzi isotropi, dotati delle stesse costanti di dielettricità e di magnetizzazione. Avuto riguardo a ciò, noi vogliamo far vedere che le funzioni X, Y, Z, L, M, N, definite dalle (8) e (9) soddisfanno effettivamente alle condizioni di HERTZ.

In primo luogo risulta dal § 2 che, passando attraverso ad una superficie σ, le derivate delle funzioni $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{M}$ rimangono continue, onde, per le (8), la stessa proprietà compete alle componenti della forza magnetica, e per conseguenza sarà verificata la (10), che esprime, in causa di $\mu' = \mu'' = \mu$, la continuità delle derivate rispetto al tempo delle componenti normali della forza magnetica.

Passando alle componenti della forza elettrica, si osserverà dalle (9) che le discontinuità possono essere soltanto di origine elettrostatica, e che, siccome, sempre a tenore del § 2, passando attraverso le superfici σ, le derivate tangenziali della funzione $\boldsymbol{F}$ si mantengono continue, lo stesso ha luogo delle componenti tangenziali. Quanto alla componente normale, si stabilisce la formula (11) nel seguente modo.

Si derivino le (9) rispetto al tempo e si sommino, dopo averle moltiplicate ordinatamente per $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$; verrà:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial t}\alpha + \frac{\partial Y}{\partial t}\beta + \frac{\partial Z}{\partial t}\gamma\right) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\gamma\right) - \\ - A^2\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}\gamma\right).$$

Osservando che le derivate rispetto al tempo di $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ sono funzioni continue, anche attraverso le σ, si ottiene immediatamente

$$\varepsilon'\left(\frac{\partial X'}{\partial t}\alpha' + \frac{\partial Y'}{\partial t}\beta' + \frac{\partial Z'}{\partial t}\gamma'\right) + \varepsilon''\left(\frac{\partial X''}{\partial t}\alpha'' + \frac{\partial X''}{\partial t}\beta'' + \frac{\partial Z''}{\partial t}\gamma''\right) = \\ = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}'}{\partial p'} + \frac{\partial \boldsymbol{F}''}{\partial p''}\right),$$

e da questa, per essere, in virtù delle (5a), (2′) e (4):

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}'}{\partial p'} + \frac{\partial \boldsymbol{F}''}{\partial p''}\right) = -4\pi\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{\mu}(\boldsymbol{u}'\alpha' + \boldsymbol{v}'\beta' + \boldsymbol{w}'\gamma' + \boldsymbol{u}''\alpha'' + \\ + \boldsymbol{v}''\beta'' + \boldsymbol{w}''\gamma'') = 4\pi(u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma' + u''\alpha'' + v''\beta'' + w''\gamma''),$$

si ricava la (11), come dovevasi dimostrare.