XIX.

SUI NUMERI TRANSFINITI

NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (1° sem. 1898).

pp. 91-96 (*).

In un lavoro, pubblicato alcuni anni or sono ([1]), mostrai come, con opportune convenzioni, si riesca a costruire un sistema di numeri finiti, infiniti ed infinitesimi, per cui valgono tutte le ordinarie regole di calcolo. Fui condotto a tale sistema, cercando di svolgere con indirizzo puramente aritmetico un'idea fondamentale del prof. VERONESE. I miei numeri tuttavia non sono atti a rappresentare l'intero edificio di VERONESE, ma ne comprendono (essendo per qualche rispetto più generali) solo una parte. Completo ora la mia ricerca, mostrando in qual modo si possa generare, per via di simboli, un sistema, nel cui tipo può farsi rientrare quello di VERONESE, e per cui conservano la loro validità tutte le ordinarie leggi dell'aritmetica.

Contro i procedimenti del prof. VERONESE sono state sollevate talune obbiezioni da critici eminenti. Se mi si concede di esprimere il mio modesto avviso, direi:

Le obbiezioni, prese in sè, sono generalmente giuste, ma non si possono applicare al sistema di Veronese, che è definito (specie per quanto si riferisce agli elementi infiniti d'ordine infinito) in modo alcun poco diverso da quello inteso dai critici, e sfugge così ai loro appunti.

Fu per certo il carattere eminentemente astratto dei concetti di VERONESE e la insolita forma di intuizione geometrica, di che egli seppe rivestirli, origine e alimento alle divergenze. Io mi lusingo che le mie osservazioni di carattere esclusivamente aritmetico parranno esenti da ogni

---

(*) Presentata dal Corrispondente GIUSEPPE VERONESE nella seduta del 20 Febbraio 1898.

([1]) *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, « Atti dell'Istituto Veneto », s. 7ª, t. IV, 1893. [In questo vol.: I, pp. 1–39].

difficoltà e contribuiranno a far cessare il malinteso, col mettere in luce per altra via il senso preciso delle ipotesi geometriche del prof. VERONESE.

Chieggo venia al lettore se l'indole delicata della questione mi obbligherà ad essere alquanto prolisso, sì da dedicare questa prima comunicazione ai preliminari, richiamando cose, dette già altrove, in modo non molto diverso. Seguirà in una Nota prossima la parte sostanziale della generalizzazione annunciata.

1. – Sia un insieme ordinato di elementi (numeri nel significato più generale della parola) e si intendano adottati i segni $>$ e $<$, per esprimere l'ordine degli elementi; si scriva cioè $b > a$, se, nell'insieme ordinato, a precede b, ecc. Si supponga di poter definire, per gli elementi dell'insieme, certe quattro operazioni, che si comportino come le fondamentali dell'aritmetica, per modo:

che gli elementi dell'insieme costituiscano un corpo rispetto alle operazioni stesse;

che valgano tutte le ordinarie regole di calcolo (incluse quelle delle disuguaglianze algebriche) [2].

Chiameremo *sistema* A (ovvero A', A'', ecc) un insieme siffatto.

Costituisce, per esempio, un sistema A l'insieme di tutti i numeri reali positivi e negativi, quando come criterio ordinativo si assuma quello della grandezza algebrica. Colla medesima convenzione si possono risguardare come sistemi A: l'insieme di tutti i numeri razionali, o più generalmente un qualsiasi corpo di numeri algebrici reali; infine l'insieme di elementi finiti, infiniti ed infinitesimi, che studiai nel citato mio scritto.

Non possiede invece tutti i requisiti di un sistema A l'insieme degli ordinari numeri reali e complessi (qualora si abbia riguardo soltanto alla grandezza dei rispettivi moduli); bisognerebbe aggiungere una qualche convenzione, atta a farli divenire un insieme ordinato.

Ci gioverà ancora di contraddistinguere con una denominazione speciale, *sistema* N (ovvero N', N'', ecc.) un insieme ordinato, il quale da un lato soddisfaccia a ipotesi meno restrittive di A, in quanto si esiga solamente che gli elementi dell'insieme costituiscano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione (valendo sempre, si intende, le ordinarie regole di calcolo); ma dall'altro verifichi una condizione di più. Si ammetta cioè sotto la forma seguente il così detto *assioma di* ARCHIMEDE: Se ω, ω' ed $\omega'' > \omega'$ sono tre elementi dell'insieme, esiste sempre un numero intero positivo k, tale che:

$$\omega < k(\omega'' - \omega') .$$

[2] Cioè, per es., da $a > b$, $c > d$, segua $a + c > b + d$ e via dicendo.

Si intende che il simbolo $k(\omega'' - \omega')$ è soltanto un'abbreviatura della somma:

$$\overbrace{(\omega'' - \omega') + (\omega'' - \omega') + \ldots + (\omega'' - \omega')}^{k \text{ volte}},$$

cui, per le convenzioni poste, corrisponde effettivamente un elemento di N. A questo proposito si può osservare che tanto i sistemi A, quanto i sistemi N constano di un numero infinito di elementi e comprendono necessariamente lo zero. Infatti, se ω è un elemento di uno di questi sistemi, anche ω, 2ω, 3ω, ..., *ad infinitum* debbono appartenere all'insieme; del pari $\omega - \omega$, che è poi lo zero, per essersi ammessa la conservazione delle leggi formali.

Sono sistemi N tutti gli A, citati poc'anzi, ad eccezione dell'ultimo; si ha invece un esempio di sistema N (ma non A) nell'insieme di tutti i numeri interi positivi e negativi, col solito criterio ordinativo della grandezza algebrica; così i multipli di un qualsiasi numero reale, ecc.

2. – Dico che, assunti ad arbitrio un sistema A ed un sistema N, è possibile, con opportune convenzioni, costruire un nuovo sistema A' il quale:

1) comprende tra i suoi elementi tutti quelli di A;

2) ne comprende altri, che hanno, rispetto ai primi, carattere di infiniti e di infinitesimi.

Per questa costruzione, basta seguire l'identico metodo, che vale, quando A e N rappresentano l'insieme dei numeri reali (3).

Siano a, b, c, ecc., elementi di A; ν, μ, ϱ, ecc., elementi di N; un generico elemento si dirà, come di solito, positivo o negativo, secondochè esso sia $>$ o $<$ di zero.

Ciò posto, ad ogni coppia a_ν faccio corrispondere un nuovo elemento, che dico *monosemio*. Chiamo a la caratteristica, ν l'indice del monosemio. Risguardo il monosemio a_0 identico al primitivo elemento a di A; pongo di più $0_\nu = 0$, qualunque sia l'indice ν: in ogni altro caso, attribuisco alla eguaglianza di due monosemii il senso della identità.

Per ordinare l'insieme dei monosemii, procedo nel modo seguente.

Considero dapprima due monosemii a_ν e b_μ, le cui caratteristiche sieno entrambe positive o entrambe negative. Se $\nu = \mu$, pongo $a_\nu \gtreqless b_\mu$,

(3) Loc. cit., passim; ivi ho anche accennato (p. 45 [in questo vol. p. 33]) ad una estensione del procedimento al caso che A sia lo stesso sistema, da me costruito. Qui non faccio altro che applicare gli stessi principi, senza specializzare la natura del sistema.

secondochè $a \gtreqqless b$; se invece ν è diverso da μ, pongo $a_\nu \gtrless b_\mu$, secondochè $\nu \gtrless \mu$.

Venendo al caso, in cui le caratteristiche a e b sono l'una, poniamo a, positiva o nulla, e l'altra b negativa o nulla, stabilisco sia $a_\nu > b_\mu$; va però esclusa l'ipotesi $a = b = 0$, per cui s'è posto $0_\mu = 0_\nu = 0$.

Si verifica senza difficoltà che queste definizioni permettono effettivamente di ordinare l'insieme dei monosemii; sono cioè soddisfatte le leggi caratteristiche dei segni $=$, $>$ e $<$. Per es., da $a_\nu > b_\mu$, $b_\mu > c_\varrho$, segue $a_\nu > c_\varrho$, e così via.

Consideriamo ora un insieme (finito o infinito) di elementi N, tale però che sia in ogni caso *finito* il numero di quelli tra essi, che superano un elemento ω dello stesso N, comunque si scelga ω. Chiameremo per brevità *ellittico* un insieme di tal natura; esso è necessariamente numerabile, o, in particolare, finito; anzi è manifesto che, facendo decrescere ω in N, se ne possono ordinare gli elementi (tra loro distinti) in una successione decrescente finita:

$$\nu^{(0)}, \quad \nu^{(1)}, \ldots, \quad \nu^{(n)},$$

o decrescente indefinitamente

$$\nu^{(0)}, \quad \nu^{(1)}, \ldots, \quad \nu^{(n)}, \ldots$$

Si dimostra per questi insiemi ellittici:

Lemma I. Se $\nu^{(r)}$, $\mu^{(s)}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ costituiscono due insiemi ellittici, anche l'insieme di elemento generale $\nu^{(r)} + \mu^{(s)}$ è ellittico.

Lemma II. Nelle stesse condizioni è ellittico l'insieme di elemento generale:

$$(\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)}) + (\mu^{(p_1)} - \mu^{(0)}) + (\mu^{(p_2)} - \mu^{(0)}) + \ldots + (\mu^{(p_k)} - \mu^{(0)}),$$
$$(\tau, k, p_1, p_2, \ldots, p_k = 0, 1, \ldots, n, \ldots).$$

La dimostrazione di questi due lemmi si fa come nella citata mia Nota. Ivi ho supposto che l'insieme N sia costituito da tutti i numeri reali, ma si constata immediatamente che intervengono nella dimostrazione soltanto proprietà, spettanti ad ogni N.

Risguarderò come nuovo ente (numero) un complesso di monosemii, *i cui indici siano distinti* e costituiscano un insieme ellittico. Come caso particolare rientrano in questa definizione i monosemii, i quali comprendono a lor volta gli elementi del sistema primitivo A (monosemii di indice zero). Designeremo con a', b', c', ecc., tali nuovi enti. *Essi costituiscono complessivamente un sistema A'.*

Le convenzioni, atte a ordinare il sistema e a definirne le operazioni fondamentali, la attendibilità di queste convenzioni e le loro principali conseguenze sono state discusse con dettaglio, nel predetto mio lavoro, per il caso che A e N constino di tutti i numeri reali; ognuno riconoscerà agevolmente che le ipotesi qui ammesse sui due sistemi bastano per il rigore del procedimento. Posso dunque limitarmi a ricordare le convenzioni.

Un numero a' sarà a ritenersi eguale a zero, se tutti i monosemii, che lo costituiscono, hanno caratteristica nulla.

Dati due numeri a' e b', si considerino i monosemii, che li costituiscono, nell'ordine decrescente degli indici; o le due successioni sono identiche, e allora porremo $a' = b'$; oppure si incontra in una di esse, poniamo in a', un primo monosemio a_ν, che non coincide col corrispondente b_μ (se quest'ultimo manca, il che può accadere, quando b' consta di un numero finito di elementi, lo si intenderà sostituito collo zero); risguarderemo $a' \gtrless b'$, secondochè $a_\nu \gtrless b_\mu$.

Per *somma algebrica* $a_\nu \pm b_\nu \pm c_\nu \pm \ldots$ *di un numero finito di monosemii, aventi il medesimo indice*, intendo il monosemio $(a \pm b \pm c \pm \ldots)_\nu$; *per somma algebrica di un numero finito di addendi* $a' \pm b' \pm c' \pm \ldots$ intendo il numero, che corrisponde all'insieme dei monosemii di tutti gli addendi. Siccome però, nella definizione di numero, ho supposto distinti gli indici dei monosemii, che lo costituiscono, così soddisferò a questa condizione, stabilendo di sostituire i monosemii, dotati di indice eguale, con la loro somma.

Chiamo *prodotto di due monosemii qualisivogliono* a_ν, b_μ il monosemio $(ab)_{\nu+\mu}$.

Siano rispettivamente $a^{(r)}_{\mu(r)}$, $b^{(s)}_{\mu(s)}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ i monosemii di due numeri a' e b'; chiamo *prodotto di* a' *per* b' quel numero c', i cui monosemii si ottengono, moltiplicando in tutti i modi possibili un monosemio di a' per uno di b', e avendo poi cura di sommare tra loro tutti i monosemii di indice eguale.

Il lemma I giustifica questa definizione.

La *divisione* si definisce come la operazione inversa della moltiplicazione. Il quoziente di due monosemii a_ν, b_μ è dunque $(a/b)_{\nu-\mu}$ (il divisore, e quindi b, si intende diverso da zero); per due numeri generali a' e b', se ne ordinano i monosemii, secondo la grandezza decrescente degli indici e si applica il solito algoritmo, che serve a trovare il quoziente di due polinomii.

Per il lemma II, i monosemii, che risultano in tal guisa, definiscono effettivamente un numero, il quale, moltiplicato per b', riproduce a'.

3. – Prendendo come sistema A l'insieme di tutti i numeri reali, come sistema N quello di tutti i numeri interi, si ha un A' sostanzialmente identico ai numeri di VERONESE finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito [4]. Per questi dunque (nè in ciò vi è controversia), valgono tutte le ordinarie ragioni di calcolo.

Quanto ai numeri, che rappresentano, secondo VERONESE, i segmenti più generali possibili sopra la retta [5], bisogna ricorrere, per averne l'equivalente aritmetico, ad un criterio costruttivo un po' più generale, che esporrò ben presto.

Noto intanto che, se si tratta solo di formare un sistema di tipo A, il quale, secondo il modo di dire abituale, comprenda elementi infiniti d'ordine infinito, basta applicare ripetutamente il procedimento, testè delineato, partendo, per esempio, dai numeri reali e assumendo ciascuna volta come sistema N ancora quello dei numeri reali. Dopo la prima operazione, abbiamo come sistema A' quello dei miei numeri, più volte menzionati, che si posson dire infiniti e infinitesimi d'ardine finito e generalizzano gli analoghi di VERONESE. Assumendo gli elementi di A' come caratteristiche e i numeri reali come indici si possono formare nuovi monosemii e con essi un sistema A''; nel medesimo modo si costruisce un A''' e così di seguito fino ad $A^{(n)}$, per n comunque grande. A partire da A'', ogni sistema contiene elementi con due o più indici sovrapposti, e questo è uno dei modi, con cui si può tradurre in simboli la esistenza di elementi infiniti d'ordine infinito. Ciò non ostante si han sempre insiemi chiusi rispetto a tutte le operazioni aritmetiche.

---

(4) *Fondamenti di geometria, ecc.*, Padova, 1891, nn. 87-89 e n. 121, p. 200.
(5) Ibidem, n. 91 e n. 121, p. 199.