XXI.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE IN SÈ STESSA DELLA EQUAZIONE $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}=0$

« Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti », s. VII, t. IX (1897-98)
pp. 1399-1410

Se si combina una inversione per raggi vettori reciproci

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y'=\pm\frac{y}{x^2+y^2},$$

col cambiamento di funzione

$$u'(x',y')=\frac{u(x,y)}{x^2+y^2},$$

la equazione

$$\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}\,u=0 \qquad \left(\underset{2}{\Delta}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

si trasforma in sè stessa. In altri termini ogni integrale $u(x,y)$ di $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}u=0$ si cangia in un integrale $u'(x',y')$ della equazione analoga

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u'=0 \qquad \left(\underset{2}{\Delta'}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)$$

e reciprocamente.

Di tale proprietà, che dimostro qui appresso, mi valgo in particolare per risolvere la questione seguente:

Costruire un integrale u della equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u = 0$, regolare [1] nell'area σ limitata da due circonferenze C_1, C_2, che non si tagliano (cioè compresa fra esse o esterna ad entrambe), essendo assegnati i valori di u e della sua derivata normale sopra le due circonferenze.

Faccio vedere da ultimo che, prescindendo dai movimenti, dalle similitudini e dallo scambio di u in Cu (con C costante), la

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \pm \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad u' = \frac{u}{x^2 + y^2}$$

si può considerare come la più generale trasformazione puntuale in x, y e moltiplicativa in u ($u' = \lambda(x, y)u$), di fronte a cui la equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$ rimane invariata.

1. – Posto:

$$(1) \qquad x' = \frac{x}{\varrho^2}, \qquad y' = \pm \frac{y}{\varrho^2}, \qquad (\varrho^2 = x^2 + y^2),$$

si ha fra ogni elemento lineare $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e il corrispondente $ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}$ la relazione

$$(1') \qquad dx'^2 + dy'^2 = \frac{1}{\varrho^4}(dx^2 + dy^2).$$

Ne viene, per la nota teoria dei parametri differenziali,

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \varrho^4 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\},$$

che scriveremo concisamente

$$\underset{2}{\Delta}' = \varrho^4 \underset{2}{\Delta};$$

[1] Intendo con ciò brevemente: se si tratta di un punto x, y a distanza finita, che la funzione $u(x, y)$ è finita e continua in quel punto assieme alle sue derivate dei primi quattro ordini; se si tratta del punto all'infinito, che tale è il caso di

$$u'(x', y') = \frac{u(x, y)}{x^2 + y^2} = (x'^2 + y'^2)\, u\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{\pm y'}{x'^2 + y'^2}\right),$$

per $x' = 0$, $y' = 0$.

quindi, assumendo

$$u'(x', y') = \frac{1}{\varrho^2} u(x, y) , \tag{2}$$

si ottiene

$$\underset{2}{\Delta}'\underset{2}{\Delta}'u' = \varrho^4 \left[\underset{2}{\Delta} \left\{ \varrho^4 \underset{2}{\Delta} \left(\frac{1}{\varrho^2} u \right) \right\} \right] .$$

Ora si ha

$$\underset{2}{\Delta} \left(\frac{1}{\varrho^2} u \right) = \frac{1}{\varrho^2} \underset{2}{\Delta} u + 2 \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\varrho^2}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho^2}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + u \underset{2}{\Delta} \frac{1}{\varrho^2},$$

e, se si tien conto che $\underset{2}{\Delta}(1/\varrho^2) = 4/\varrho^4$ (lo si riconosce nel modo più spiccio, usando l'espressione del $\underset{2}{\Delta}$ in coordinate polari, la quale, per funzioni della sola ϱ, è $(1/\varrho)(\partial/\partial\varrho)\varrho(\partial/\partial\varrho)$, risulta

$$\varrho^4 \underset{2}{\Delta} \left(\frac{1}{\varrho^2} u \right) = \varrho^2 \underset{2}{\Delta} u - 2 \left\{ \frac{\partial \varrho^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^2}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + 4u ,$$

$$\underset{2}{\Delta} \left\{ \varrho^4 \underset{2}{\Delta} \left(\frac{1}{\varrho^2} u \right) \right\} = \varrho^2 \underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u + 2 \left\{ \frac{\partial \varrho^2}{\partial x} \frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^2}{\partial y} \frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial y} \right\} + \underset{2}{\Delta}\varrho^2 \underset{2}{\Delta} u$$

$$- 2 \left\{ \frac{\partial \varrho^2}{\partial x} \frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^2}{\partial y} \frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial y} \right\} - 4 \left\{ \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\}$$

$$- 2 \left\{ \frac{\partial \underset{2}{\Delta} \varrho^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \underset{2}{\Delta} \varrho^2}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + 4 \underset{2}{\Delta} u .$$

Siccome

$$\frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial y^2} = 2 , \qquad \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x \partial y} = 0 ,$$

così il secondo membro si riduce immediatamente a $\varrho^2 \underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u$ e per conseguenza

$$\underset{2}{\Delta}'\underset{2}{\Delta}'u' = \varrho^6 \underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u , \tag{3}$$

la quale identità dimostra il carattere invariantivo della equazione $\underset{2\,2}{\Delta\Delta} = 0$ di fronte alla trasformazione (1), (2).

2. – L'area σ, limitata da due circonferenze C_1, C_2, che non hanno alcun punto comune, si può sempre trasformare in una corona circolare mediante una inversione per raggi vettori reciproci.

Dicansi infatti O_1, O_2 i centri delle due circonferenze; A_1, B_1; A_2, B_2 le rispettive intersezioni colla retta O_1O_2.

Tanto nel caso, in cui C_1 e C_2 siano esterne l'una all'altra, quanto nel caso opposto, le due coppie A_1, B_1; A_2, B_2 non si separano; esiste quindi una coppia reale O, P di coniugati armonici comuni, che, dovendo separare ad un tempo A_1, B_1 e A_2, B_2, cadono necessariamente fuori dell'area σ.

Assumendo uno di questi, O per es., come centro di inversione, le circonferenze C_1', C_2', immagini di C_1, C_2, riescono concentriche [2] e l'area σ si trasforma nella corona circolare, compresa fra C_1' e C_2'.

Le formule di inversione presentano la forma (1) se, come noi vogliamo supporre, si colloca in O l'origine delle coordinate.

Ciò posto, se sia richiesto un integrale u della equazione $\underset{2\,2}{\Delta\Delta} u = 0$, regolare entro l'area σ e tale che si abbia sui due contorni C_1 e C_2

$$u = \varphi\,,$$

$$\frac{du}{dn} = \psi\,,$$

(φ e ψ essendo successioni continue di valori, comunque assegnati, e n designando la normale diretta verso l'interno di σ), gioverà eseguire la trasformazione (1), (2), con che ci si troverà ricondotti a risolvere un problema dello stesso tipo per una corona circolare.

Infatti, la funzione u', trasformata di u, dovrà mantenersi regolare [3]

---

[2] Per verificarlo, si noti che, da $(A_1B_1OP) = -1$, segue

$$\frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OB_1}}\right\}\,,$$

donde apparisce, moltiplicando per il modulo di inversione $\pm k^2$ (che noi assumiamo addirittura eguale a $+1$) che l'immagine P' di P divide per metà il segmento $A_1'B_1'$, immagine di A_1B_1. In modo analogo da $(A_2B_2OP) = -1$ si ricava che lo stesso P' è il punto medio di $A_2'B_2'$. Ora le circonferenze C_1, C_2 sono simmetriche rispetto alla retta O_1O_2, che contiene il centro di inversione; lo stesso deve avvenire per le loro immagini, quindi le corde $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ sono diametri e la coincidenza dei rispettivi punti di mezzo implica coincidenza dei centri.

[3] Questo risulta senz'altro dalle (1), (2), ricordando il significato, da noi attribuito all'appellativo regolare e tenendo presente che il centro di inversione è esterno a σ.

entro l'area σ' corrispondente a σ (che s'è osservato essere una corona circolare) e soddisfare ivi, in causa della (3), alla equazione $\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u' = 0$. Sulle due circonferenze C'_1, C'_2, che limitano σ', si avrà poi

$$u' = \frac{u}{x^2 + y^2} = (x'^2 + y'^2)\varphi\,,$$

e, siccome la inversione per raggi vettori reciproci conserva gli angoli e quindi, in causa della (1'),

$$dn' = \frac{1}{x^2 + y^2}\,dn = (x'^2 + y'^2)\,dn\,,$$

$$\frac{du'}{dn'} = \frac{d\{(x'^2 + y'^2)u\}}{dn'} = \frac{d(x'^2 + y'^2)}{dn'}\,\varphi + \psi\,,$$

le quali ci porgono appunto i valori di u' e della sua derivata normale al contorno della corona circolare.

La determinazione di u' si sa effettuare ([4]), e la (2), ripassando alle variabili x, y, porge senz'altro il richiesto u.

Osservazione. – Mediante una inversione per raggi vettori reciproci, si può sempre trasformare l'area, limitata da due circonferenze, che si tagliano (sia essa esterna od interna ad entrambe) in uno spazio angolare, e l'area, racchiusa da due circonferenze, che si toccano, in una striscia compresa fra due rette parallele. Ne viene che anche il problema di $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$, relativo a queste aree, si riduce al problema analogo per uno spazio angolare o per una striscia. Ma ciò non basta ad esaurirlo, poichè, nemmeno per tali due casi fu assegnata finora una soluzione completa ([5]).

3. – Cerchiamo la più generale trasformazione

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x'(x, y)\,,\\ y' &= y'(x, y)\,,\end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$u'(x', y') = \lambda(x, y)u(x, y)\,, \tag{5}$$

([4]) Cfr. O. Venske, *Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche*, « Göttinger Nachrichten », 1891. Per vero dire, la soluzione è appena indicata e non del tutto rigorosa. Sarebbe però assai facile il renderla tale, come mi ha fatto osservare il prof. D'Arcais. Egli ha anche determinata la seconda funzione di Green per una corona circolare. Veggasi in proposito una sua nota, contenuta in questo stesso fascicolo.

([5]) Tale non può dirsi certamente quella abbozzata dal sig. Venske (loco cit.), tanto più che, per il caso dello spazio angolare, l'autore si appoggia sopra la asserzione inesatta che certa funzione W (cfr. pag. 29) sia armonica.

che cangia un integrale u della equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$ in un integrale u' della corrispondente $\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'} = 0$.

Posto per brevità $x = x_1$, $y = x_2$ e

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 = a_{11}\,, \quad \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} = a_{12}\,, \quad \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 = a_{22}\,,$$

avremo

$$dx'^2 + dy'^2 = \sum_{rs}{}_1^2\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e, introducendo le derivate seconde covarianti ([6]) della funzione u', rapporto alla forma fondamentale $\sum_{rs}{}_1^2\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$,

$$\underset{2}{\Delta'}u' = \sum_{rs}{}_1^2\, a^{(rs)} u'_{rs}\,.$$

Se ne trae

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u' = \sum_{pq}{}_1^2\, a^{(pq)} \left\{\sum_{rs}{}_1^2\, a^{(rs)} u'_{rs}\right\}_{pq}\,,$$

donde, per la regola di derivazione di un sistema composto, col tener presente che le derivate covarianti delle $a^{(rs)}$ sono nulle

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u' = \sum_{pqrs}{}_1^2\, a^{(pq)} a^{(rs)} u'_{rspq}\,.$$

Dalle formule di definizione delle derivate covarianti segue immediatamente che le singole u'_{rspq} differiscono dalle corrispondenti

$$\frac{\partial^4 u'}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q}$$

per termini, che contengono derivate d'ordine non superiore al terzo.

([6]) Le denominazioni e notazioni, di cui qui mi valgo, sono quelle introdotte nella scienza dal prof. Ricci e da lui con tanto vantaggio applicate in lunga serie di lavori. Cfr. in particolare i Cap. III e V (pag. 104) della introduzione alle *Lezioni sulla teoria della superficie*, Padova, 1898.

Designandoli comprensivamente con (3), potremo scrivere

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u' = \sum_{1}^{2}{}_{pqrs}\, a^{(pq)}a^{(rs)} \frac{\partial^4 u'}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q} + (3)\,.$$

Avendosi $u' = \lambda u$, sarà del pari

$$\frac{\partial^4 u'}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q} = \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q} + (3)\,,$$

quindi in definitiva

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u' = \lambda \sum_{1}^{2}{}_{pqrs}\, a^{(pq)}a^{(rs)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q} + (3)\,.$$

Se si vuole che $\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'}u'$ si annulli assieme a $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}u$, bisogna che il secondo membro differisca soltanto per un fattore da

$$\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\, \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\,.$$

Ne viene $(3) = 0$, e, assumendo il fattore sotto la forma λ / H^4

$$\sum_{1}^{2}{}_{pqrs}\, a^{(pq)}a^{(rs)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q} \equiv \frac{1}{H^4}\left\{\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\, \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right\}.$$

Eguagliando i coefficienti delle medesime derivate, si ricava tosto:

$$a^{(11)} = a^{(22)} = \frac{1}{H^2}, \qquad a^{(12)} = 0\,,$$

ossia la trasformazione (4) dev'essere conforme.

La relazione fra gli elementi lineari $\sqrt{dx'^2 + dy'^2}$, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ si riduce allora a

(6) $$dx'^2 + dy'^2 = H^2(dx^2 + dy^2)$$

e quindi

$$\underset{2}{\Delta'} = \frac{1}{H^2}\underset{2}{\Delta}\,.$$

Dobbiamo ora cercare, per quali forme di H e di λ, $\Delta'_2\Delta'_2(\lambda u)$ differisce soltanto per un fattore da $\Delta_2\Delta_2 u$.

Si ha ovviamente

$$\Delta'_2 u' = \frac{\lambda}{H^2}\Delta_2 u + \frac{2}{H^2}\left\{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \frac{\Delta_2\lambda}{H^2}u\,, \tag{7}$$

$$\Delta'_2\Delta'_2 u' = \frac{\lambda}{H^4}\Delta_2\Delta_2 u + \frac{2}{H^2}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial x}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial y}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial y}\right\}$$
$$+ \frac{2}{H^4}\left\{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial y}\right\} + 2\,,$$

dove si sono scritte per disteso le derivate quarte e terze di u e si sono raccolti in 2 i termini rimanenti.

La proporzionalità fra $\Delta'_2\Delta'_2 u'$ e $\Delta_2\Delta_2 u$ esige che sia identicamente $2 = 0$ e che si annullino i coefficienti delle derivate terze, cioè

$$\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial\omega} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial y} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0\,.$$

Dividendo tutto per λ/H^2 si trova subito

$$2d\log\lambda - d\log H^2 = 0\,,$$

quindi, prescindendo da una costante moltiplicativa C (che cambierebbe soltanto u in Cu)

$$\lambda = H\,.$$

Dopo ciò la (7) diviene

$$\Delta'_2 u' = \frac{1}{H}\Delta_2 u - 2\left\{\frac{\partial\frac{1}{H}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\frac{1}{H}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \frac{\Delta_2 H}{H^2}u\,,$$

e da questa, avendo poi cura di ordinare per le derivate di u,

$$H^2 \underset{2}{\Delta'} \underset{2}{\Delta'} u' = \frac{1}{H} \underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u + \left\{ \underset{2}{\Delta} \frac{1}{H} - 4 \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x^2} + \frac{\underset{2}{\Delta} H}{H^2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ \left\{ \underset{2}{\Delta} \frac{1}{H} - 4 \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial y^2} + \frac{\underset{2}{\Delta} H}{H^2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8 \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\underset{2}{\Delta} H}{H^2} - \underset{2}{\Delta} \frac{1}{H} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\underset{2}{\Delta} H}{H^2} - \underset{2}{\Delta} \frac{1}{H} \right\} \frac{\partial u}{\partial y} + u \underset{2}{\Delta} \left\{ \frac{\underset{2}{\Delta} H}{H^2} \right\}.$$

Dacchè si devono annullare i coefficienti di $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, ecc., abbiamo intanto, osservando i termini in $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$,

$$\frac{\underset{2}{\Delta} H}{H^2} = \underset{2}{\Delta} \frac{1}{H} + \text{cost}\,.$$

Se si sostituisce questo valore di $\underset{2}{\Delta} H / H^2$ nei coefficienti di $\partial^2 u / \partial x^2$ e di $\partial^2 u / \partial y^2$, si vede che la costante deve essere nulla e che

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial y^2}\,.$$

D'altra parte l'annullarsi del coefficiente di $\partial^2 u / \partial x \, \partial u$ porge

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x \, \partial y} = 0\,,$$

donde agevolmente discende che il valore comune di $\partial^2 (1/H) / \partial x^2$ e di $\partial^2 (1/H) / \partial y^2$ deve essere costante. Supponendolo diverso da zero si può, mediante una similitudine attribuirgli il valore 2, ed allora

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial y^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x \, \partial y} = 0\,.$$

Ne consegue che $1/H$ deve avere la forma $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma$, con α, β, γ costanti. A mezzo di una traslazione (cambiando cioè x in $x - \alpha$, y in $y - \beta$) è sempre lecito assumere, per $1/H$, $x^2 + y^2 + h$ ($h = \gamma - \alpha^2 - \beta^2$), e, siccome la (6) ci dice che la curvatura della forma binaria

$$H^2(dx^2 + dy^2) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + h)^2}(dx^2 + dy^2)$$

è nulla, così dovrà essere inoltre (7)

$$\underset{2}{\Delta} \log H = 0 ,$$

il che porge, come si riconosce immediatamente, $h = 0$ e quindi

$$H = \frac{1}{x^2 + y^2} .$$

L'unica trasformazione conforme, per cui riesca

$$dx'^2 + dy'^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2} ,$$

è manifestamente la (1) (a meno di rotazioni attorno all'origine) e la eguaglianza fra λ ed H implica poi che la (5) si riduca ad

$$u' = \frac{u}{x^2 + y^2} .$$

Se si suppone invece

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x \, \partial y} = 0 ,$$

si ha

$$\frac{1}{H} = \alpha x + \beta y + \gamma .$$

Ma, in causa di

$$\underset{2}{\Delta} H = H^2 \underset{2}{\Delta} \frac{1}{H} = 0 ,$$

(7) L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, E. Spoerri, Pisa, 1894, pag. 67. [Ibidem, 3a ed., Vol. I, pag. 124. - N. d. R.].

devono annullarsi anche α e β; H è dunque costante, cioè la trasformazione una pura similitudine.

Da tutto ciò si raccoglie che ogni trasformazione (4), (5), la quale lascia invariante la equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$, appartiene, per quanto riguarda le variabili x, y, al gruppo dei raggi vettori reciproci ed ha, rispetto alla funzione, la forma $u' = Hu$, designando $-H^2$ il discriminante della trasformazione in x, y ([8]).

([8]) Si potrebbe facilmente estendere questo risultato, diciamo così, negativo, mostrando che nemmeno la considerazione di trasformazioni puntuali in tutte le tre variabili x, y, u, o di contatto rispetto a u, conduce a nuovi casi di invarianza pel $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$. Non si risguarda naturalmente come caso nuovo lo scambio di u in $u + v$, con v integrale di $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$.