XXIII.

SULLE EQUAZIONI A COPPIE DI INTEGRALI ORTOGONALI (*)

« Rendiconti Acc. Lincei », s. 5°, vol. 8, 1° sem. 1899

pp. 295-296

Le equazioni

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y},$$

tali che, per ogni famiglia $f_1(x, y, z) =$ cost. *di superficie integrali, ne esiste un'altra ortogonale* $f_2(x, y, z) =$ cost., *sono tutte e soltanto quelle, le cui caratteristiche*

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = -dz,$$

godono della seguente proprietà:

Le rette cicliche, che, corrispondentemente ad ogni punto P dello spazio, giacciono nel piano π, *normale in quel punto alla caratteristica, non esauriscono, come nel caso generale, il complesso ciclico, ma formano soltanto un sistema* ∞^2, cioè due congruenze (coniugate, quando i coefficienti A e B sono reali).

Ho stabilito non è guari questo risultato con procedimento analitico (1). Eccone una brevissima dimostrazione sintetica.

Sieno P e Q due punti generici dello spazio, π e χ i rispettivi piani normali alle caratteristiche. Per ogni famiglia $f(x, y, z) =$ cost. di superficie integrali, diciamo ordinatamente a e b le intersezioni con π e χ dei piani tangenti α, β in P, Q.

(*) Presentata dal Socio E. BELTRAMI nella seduta del 19 marzo 1899.

(1) Cfr. la Nota precedente: *Sulle congruenze di curve* [in questo vol.: XXII, pp. 369-377].

Facendo variare la famiglia f, si viene a porre una corrispondenza fra le rette a del fascio (π, P) (così designamo il fascio, che appartiene al piano π ed ha P per centro) e le rette b del fascio (χ, Q). Per la natura della equazione (E), questa corrispondenza è tale che, ad una coppia qualunque di rette ortogonali del primo fascio, corrisponde nel secondo una coppia pure ortogonale, quindi alle rette cicliche i, i' di (π, P) rispettivamente le j, j' di (χ, Q).

Di qua risulta che quella particolare famiglia $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$ di integrali della (E), il cui piano tangente α in P taglia π secondo i (famiglia che si può sempre costruire) interseca ogni altro piano χ secondo una retta j pure ciclica.

Si vede poi subito che α è un piano ciclico, cioè tangente al cono I^2, che proietta da P il cerchio immaginario all'infinito.

Infatti, per ciascuna coppia di integrali ortogonali di (E), i rispettivi piani tangenti in P sono coniugati rispetto ad I^2, perciò α risulta coniugato a sè stesso, ossia ciclico. Lo stesso evidentemente è a dirsi di ogni altro piano tangente alla superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$

Assumiamo ora il punto Q vicinissimo a P sopra i. A meno di infinitesimi d'ordine superiore, esso si può risguardare situato sopra la superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$, che passa per P, e quindi il piano tangente β in Q contiene la retta PQ, cioè i. D'altra parte, per quanto s'è osservato, è questa l'unica retta ciclica, passante per Q e situata in β. Ne viene che la intersezione j di β con χ è la stessa retta i.

Dimostrato ciò per il punto Q di i, contiguo a P, si conclude con facile illazione che lo stesso vale per ogni punto Q della i.

In altri termini, la corrispondenza, che la considerazione delle superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$ stabilisce fra ogni punto P dello spazio e una delle due rette cicliche i del fascio (π, P) è tale che, ad ogni altro punto di i, corrisponde sempre la retta stessa.

Le i costituiscono dunque una congruenza (e così le i'), giusta l'asserto.

La reciproca è pur vera, come si riconosce in modo perfettamente analogo.