XXIV.

TIPI DI POTENZIALI CHE SI POSSONO FAR DIPENDERE DA DUE SOLE COORDINATE

« Mem. Accad. di Torino », s. II, t. XLIX (1899)

pp. 105-152

Introduzione.

La teoria del potenziale logaritmico, edificata da C. NEUMANN e le ricerche del prof. BELTRAMI sui potenziali simmetrici indussero il prof. VOLTERRA a discutere in generale le proprietà dei potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate. Egli ne ha stabilito i più salienti caratteri, indicandone le possibili applicazioni a problemi svariati di fisica matematica. Rimane tuttavia — osserva al principio della sua memoria (1) lo stesso prof. VOLTERRA — una questione preliminare da risolvere, assegnare cioè i varî tipi dei potenziali in discorso.

Tale è il compito, che io qui mi prefiggo.

Prendo le mosse dalla osservazione semplicissima che debbono riuscire indipendenti da una coordinata tutti quei potenziali, i quali ammettono trasformazioni infinitesime in sè. Sono così condotto a considerare (§ 1) le trasformazioni infinitesime, ammesse dalla equazione di LAPLACE:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

(in quanto vi si risguardi u come invariante), le quali sono tutte e soltanto quelle del gruppo G_7 delle similitudini.

Passo quindi in rassegna i diversi tipi di trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 e scelgo per ognuna di esse (§ 2) un sistema di coordinate curvilinee ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, che abbia per linee $\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost. le traiet-

(1) *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale,* « Annali della Scuola Normale di Pisa », vol. III, 1883.

torie della trasformazione infinitesima. Espresso il $\underset{2}{\Delta} u$ in coordinate ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ricavo le forme caratteristiche dei potenziali corrispondenti, ponendovi $\partial u / \partial \varrho_3 = 0$.

Siccome vi hanno cinque categorie (distinte, anche per rispetto alle traiettorie) di trasformazioni infinitesime *reali* di G_7: traslazioni, rotazioni, trasformazioni elicoidali, omotetie, trasformazioni spirali, così si ottengono altrettanti tipi di potenziali binari reali, che, avuto riguardo alla congruenza, formata dalle linee, su cui essi conservano valore costante, possono opportunamente designarsi come segue:

1° Potenziali cilindrici o logaritmici;
2° Potenziali circolari o simmetrici;
3° Potenziali elicoidali (dipendenti da un parametro);
4° Potenziali conici;
5° Potenziali spirali (dipendenti da un parametro).

Di questi tipi l'ultimo soltanto è nuovo, Il 1°, 2° e 4° sono infatti ben noti e il 3°, benchè non sia stato ancora considerato da vicino, ricorre già nella « Commentatio Mathematica » di RIEMANN.

In codesta « Commentatio », insigne concezione del suo genio meraviglioso, RIEMANN enumera tra altro i diversi casi, nei quali la equazione:

$$k \frac{\partial u}{\partial t} + \underset{2}{\Delta} u = 0 \,, \quad (\text{con } k \text{ costante}) \,,$$

può dipendere da due sole coordinate di spazio. In ognuno di questi casi deve manifestamente dipendere da due sole coordinate la *espressione* $\underset{2}{\Delta} u$ e quindi a fortiori la equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$.

Dei risultati di RIEMANN hanno relazione colla nostra ricerca soltanto quelli, in cui u possiede la massima generalità, l'ipotesi cioè, che egli designa con $m = 1$. Tale ipotesi conduce precisamente ai tipi 1°, 2° e 3° (²).

Si tratta ora di decidere se i potenziali binari, che scaturiscono dalla accennata considerazione gruppale, sono i soli possibili o se vi hanno altri tipi.

Ho istituita a tale scopo una ricerca sistematica, di cui a §§ 3-8.

Dovetti rinunciare al metodo di RIEMANN, che male si sarebbe prestato in questo caso per la maggior complicazione dei calcoli; ho prefe-

(²) Osservo per incidenza che la possibilità di rendere indipendenti da una coordinata le *espressioni* del $\underset{2}{\Delta} u$, che spettano a ognuno di questi tipi, segue senz'altro da ciò che essi (ed essi soltanto) corrispondono a trasformazioni infinitesime del gruppo dei movimenti, per cui, nonchè l'equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$, addirittura il $\underset{2}{\Delta} u$ è un invariante.

rito di formare direttamente le equazioni differenziali, cui debbono soddisfare tre funzioni $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ delle variabili x_1, x_2, x_3, affinchè la congruenza:

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \frac{dx_3}{\xi^{(3)}}$$

sia costituita da linee equipotenziali.

Dopo ciò, ritrovo subito il risultato del § 1, constatando che i coefficienti d'ogni trasformazione infinitesima di G_7 sono integrali del sistema. Uno studio diretto di tale sistema sarebbe per altro pressochè impraticabile, causa il rapido complicarsi delle formule.

Ho fatto perciò appello ai metodi del prof. RICCI, che con mirabile agilità si adattano a questioni svariatissime, mettendone ognora a nudo l'intima natura e sfrondandole da ogni difficoltà inessenziale.

Per facilitare la applicazione di questi metodi al nostro problema, apparve opportuna una breve escursione nel campo della geometria intrinseca di una congruenza di curve.

Ricordate nel § 4 le formule fondamentali di RICCI e indicatane una opportuna specializzazione per lo spazio ordinario, esamino nel § seguente un caso particolare notevole, quello delle congruenze rettilinee isotrópe; costruisco una espressione (che credo nuova) pel quadrato dell'elemento lineare dello spazio, riferito alle rette della congruenza come linee $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$, e ne deduco agevolmente che ad ogni congruenza rettilinea isotrópa corrisponde una classe di potenziali binari (*potenziali isotrópi*), le cui linee equipotenziali sono appunto le rette della congruenza ([3]).

Dopo questa digressione, riprendo (§ 6) le condizioni di equipotenzialità, risguardandovi (come è sempre lecito, finchè non si tratta di linee di lunghezza nulla) $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ quale sistema coordinato contravariante (coseni direttori, se le coordinate sono cartesiane ortogonali) della corrispondente congruenza.

([3]) Debbo alla cortesia del prof. KLEIN la comunicazione che questi potenziali isotrópi compaiono sotto diverso aspetto nella memoria di JACOBI, *Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (« Crelle's Journal », B. XXXVI, 1848, oppure « Ges. Werke », B. II). JACOBI li definisce come soluzioni simultanee delle due equazioni:

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 , \qquad (\Delta_1 V)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 0 .$$

Il legame tra siffatti potenziali e le congruenze isotrópe fu con geniale intuizione avvertito dallo stesso KLEIN.

Per la dimostrazione, veggasi la nota alla fine del § 5 (p. 420).

Una facile trasformazione conduce di qua alle equazioni intrinseche (E) delle congruenze equipotenziali.

Stabilisco poscia (§ 7) le caratteristiche intrinseche delle congruenze, costituite dalle traiettorie di un gruppo reale ∞^1 di similitudini.

Così finalmente posseggo quanto basta per esaurire la ricerca delle congruenze equipotenziali. Non ho che a tener conto delle condizioni di integrabilità del sistema (E).

Lo studio se ne fa in modo semplice e non privo di eleganza e agevolmente si stabilisce che le congruenze equipotenziali sono rettilinee ed isotrópe, oppure constano delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini.

Se si avverte che le rette parallele o concorrenti in un medesimo punto sono casi particolari di congruenze isotrópe, si può enunciare il risultato:

I potenziali binari sono isotrópi, simmetrici, elicoidali o spirali.

Per essere completo, stimai opportuno di confrontare tra loro questi tipi, ricercando se e quali delle corrispondenti equazioni sieno riducibili [4] l'una all'altra.

Mi sono valso a tale scopo del metodo, proposto dal sig. COTTON nella sua bella nota « Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables » [5].

È risultato (§ 9) che i potenziali isotrópi equivalgono tutti ai logaritmici; il parametro dei potenziali elicoidali non è essenziale, talchè essi rientrano in una categoria unica, distinta per altro, sì dai potenziali logaritmici, che dai simmetrici e spirali. Quest'ultimi, non solo sono irriducibili agli altri tipi, ma nemmeno si equivalgono tra loro per valori diversi del parametro.

1. - Trasformazioni infinitesime, ammesse dalla equazione di Laplace.

Sia la trasformazione infinitesima:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

e la equazione a derivate parziali:

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0\,.$$

(4) La riducibilità va intesa nel senso, abitualmente seguito nella teoria delle equazioni del secondo ordine. Due tali equazioni si ritengono equivalenti, se si possono ottenere l'una dall'altra, combinando una trasformazione puntuale nelle variabili indipendenti con una trasformazione moltiplicativa ($u' = \lambda u$) della funzione incognita.

(5) « Comptes Rendus », 30 novembre 1896.

Cerchiamo a quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti ξ_1, ξ_2, ξ_3 di Xf, affinchè, convenendo di risguardare la funzione u come invariante, la equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$ ammetta la trasformazione infinitesima Xf (debitamente estesa), si abbia cioè:

$$\bar{X}(\underset{2}{\Delta} u) \equiv -2M \underset{2}{\Delta} u\,, \tag{1}$$

dove $\bar{X}f$ designa appunto la trasformazione, estesa alla u e relative derivate, M una arbitraria funzione di x_1, x_2, x_3.

Rappresentando con v, v_s, v_{ss} i coefficienti della trasformazione estesa, cioè, possiam dire, gli incrementi di u e delle sue derivate $\partial u/\partial x_s$, $\partial^2 u/\partial x_s^2$ rispettivamente, si avrà, per la supposta invarianza di u, $v = 0$, e di conseguenza (6):

$$v_s = -\sum_1^3{}_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s}\frac{\partial u}{\partial x_r}\,,$$

$$v_{ss} = -2\sum_1^3{}_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x_r\,\partial x_s} - \sum_1^3{}_r \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s^2}\frac{\partial u}{\partial x_r}\,.$$

Troviamo così:

$$\bar{X}(\underset{2}{\Delta} u) = \sum_1^3{}_s v_{ss} = -2\sum_1^3{}_{rs} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s}\frac{\partial^2 u}{\partial x_r\,\partial x_s} - \sum_1^3{}_r \underset{2}{\Delta}\xi_r \frac{\partial u}{\partial x_r}\,,$$

la quale espressione, sostituita nella (1), porge tosto le condizioni cercate.

Infatti, perchè la (1) sussista identicamente, occorre e basta che si annullino i coefficienti delle singole $\partial u/\partial x_r$, $\partial^2 u/\partial x_r\,\partial x_s$, cioè che le ξ_r verifichino le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} = M\,, \qquad \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 0\,, \qquad (r, s = 1, 2, \,;\ r \gtrless s),$$

$$\underset{2}{\Delta}\xi_r = 0\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Introducendo i soliti simboli ε_{rs}, esse si possono scrivere:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 2\varepsilon_{rs} M\,, \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{2}$$

$$\underset{2}{\Delta}\xi_r = 0\,, \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Si trova subito che la indeterminata M deve ridursi ad una costante.

(6) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, Leipzig, Teubner, 1888; pag. 545.

Abbiamo infatti, moltiplicando le (2) per ε_{rs} e sommando:

$$\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, \varepsilon_{rs}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\xi_s}{\partial x_r}\right) = 2M \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, \varepsilon_{rs}^2\,,$$

ossia:

$$3M = \sum_{1}^{3}{}_{s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_s}\,,$$

da cui:

$$3\,\frac{\partial M}{\partial x_r} = \sum_{1}^{3}{}_{s} \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_r\, \partial x_s}\,.$$

D'altra parte, derivando le (2) stesse rapporto ad x_s, e sommando rispetto ad s:

$$2\,\frac{\partial M}{\partial x_r} = \sum_{1}^{3}{}_{s} \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_r\, \partial x_s} + \Delta_2 \xi_r\,,$$

che, sottratta dalla precedente, porge:

$$\frac{\partial M}{\partial x_r} = -\,\Delta_2 \xi_r\,,$$

talchè le (3) riescono verificate allora e solo allora che $\partial M/\partial x_r = 0$, $(r = 1, 2, 3)$.

Posto poi M eguale ad una costante C, si ha il sistema:

$$(2')\qquad \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 2\varepsilon_{rs} C\,, \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

incondizionatamente integrabile ed equivalente al primitivo (2), (3). Esso definisce le trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 delle similitudini. La cosa è evidente, se, interpretando le ξ_r come componenti di uno spostamento infinitesimo, si ricorre al significato delle $\partial \xi_r/\partial x_s + \partial \xi_s/\partial x_r$. Possiamo del resto constatarlo, formando l'integrale generale delle (2'). Siccome le derivate seconde delle ξ_r sono tutte nulle (lo si riconosce immediatamente, derivando le (2')), il detto integrale si ha prendendo:

$$\xi_r = c_r + \sum_{1}^{3}{}_{s}\, c_{rs} x_s\,, \qquad (r = 1, 2, 3)$$

e disponendo delle costanti in modo da soddisfare alle (2′), ossia:

$$c_{rs} + c_{sr} = 2\varepsilon_{rs} C .$$

Otteniamo così per la più generale trasformazione infinitesima, che conserva i potenziali, la espressione:

$$Xf = \sum_1 {}_r\, c_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum^3 {}_{rs}\, c_{rs} x_s \frac{\partial f}{\partial x_r} = \sum_i e_i X_i f ,$$

dove si è posto:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$X_4 f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad X_5 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_6 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_7 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3};$$

$$e_1 = c_1, \quad e_2 = c_2, \quad e_3 = c_3, \quad e_4 = c_{23}, \quad e_5 = c_{31}, \quad e_6 = c_{12}, \quad e_7 = C .$$

Essa ci si presenta pertanto come la più generale trasformazione infinitesima del gruppo G_7 delle similitudini.

Anche ogni trasformazione finita del gruppo lascia invariante la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} u = 0 ,$$

ne trasforma cioè gli integrali in nuovi integrali.

D'ora innanzi si considereranno come equivalenti due potenziali o due classi di potenziali, che si possano dedurre l'una dall'altra mediante una trasformazione di G_7.

2. - Potenziali binari corrispondenti alle trasformazioni infinitesime del gruppo delle similitudini.

Consideriamo le traiettorie:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \frac{dx_3}{\xi_2}$$

del gruppo ∞^1, generato da una trasformazione infinitesima Xf.

Se con ϱ_1, ϱ_2 si rappresentano due integrali indipendenti della equazione:

$$Xf = 0 ,$$

le dette traiettorie sono le intersezioni delle superficie:

$$\varrho_1 = \text{cost.},$$

$$\varrho_2 = \text{cost.}$$

Associando a queste due famiglie una terza qualsiasi, da esse indipendente, $\varrho_3 = \text{cost.}$, la espressione Xf, rispetto al sistema coordinato ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, assumerà la forma $P(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)\partial f/\partial\varrho_3$.

Dico che, se Xf soddisfa alla (1), o ciò che è lo stesso, appartiene al gruppo G_7, la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} u = 0$$

si può far dipendere dalle sole coordinate ϱ_1, ϱ_2.

Suppongasi infatti la funzione u indipendente da ϱ_3; lo stesso avviene delle sue derivate, che risultano perciò altrettanti invarianti della trasformazione Xf e, come tosto si riconosce, anche della trasformazione estesa $\bar{X}f$. Applicare quest'ultima al $\underset{2}{\Delta} u$ equivale pertanto ad applicare la $Xf = P(\partial f/\partial\varrho_3)$ ai coefficienti del $\underset{2}{\Delta} u$ (espresso per mezzo delle coordinate ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3), equivale cioè a derivare questi coefficienti rispetto a ϱ_3 e moltiplicare poi per P.

Segue quindi dalla ipotesi che u *non contiene* ϱ_3:

$$\bar{X}(\underset{2}{\Delta} u) = P \frac{\partial}{\partial\varrho_3} (\underset{2}{\Delta} u) ,$$

dopo di che la (1) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_3} (\underset{2}{\Delta} u) \equiv -\frac{2M}{P} \underset{2}{\Delta} u ,$$

od anche:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_3} \left\{ e^{\int (2M/P) d\varrho_3} \underset{2}{\Delta} u \right\} \equiv 0 ,$$

la quale mostra che, supposto una volta u indipendente da ϱ_3, anche i singoli coefficienti del $\underset{2}{\Delta} u$, moltiplicati per un conveniente fattore, riescono indipendenti da ϱ_3.

È questa precisamente la proprietà annunciata. Ne viene che la equazione $\underset{2}{\Delta}u = 0$, o meglio, per far sparire anche formalmente la variabile ϱ_3, la:

$$\Theta u \equiv e^{\int (2M/P) d\varrho_3} \underset{2}{\Delta} u = 0 \, ,$$

postovi $\partial u / \partial \varrho_3 = 0$, definisce una classe di potenziali binari. Naturalmente tale classe rimane invariata, comunque si mutino in Θu le variabili indipendenti ϱ_1, ϱ_2, mediante trasformazioni del tipo $\varrho_1 = \varrho_1(\sigma_1, \sigma_2)$, $\varrho_2 = \varrho_2(\sigma_1, \sigma_2)$, (il che equivale a sostituire due integrali indipendenti di Xf con due altri pure indipendenti).

Non tutte le trasformazioni infinitesime di G_7 danno luogo a distinti potenziali binari, ma quelle soltanto, le cui traiettorie sono distinte rispetto a G_7, non si possono cioè far coincidere mediante trasformazioni del gruppo.

Sieno infatti Xf e $X'f$ due trasformazioni di G_7, $\Theta u = 0$, $\Theta' u = 0$ le equazioni, che definiscono i corrispondenti potenziali binari; e supponiamo che esista una trasformazione T del gruppo, la quale faccia passare dalle traiettorie di $X'f$ a quelle di Xf.

I due sistemi di superficie:

$$\varrho_1' = \text{cost.} \, ,$$

$$\varrho_2' = \text{cost.} \, ,$$

corrispondenti ad $X'f$, si potranno scegliere in modo che:

$$T\varrho_1' = \varrho_1 \, ,$$

$$T\varrho_2' = \varrho_2 \, .$$

La trasformazione T, applicata agli integrali $u(\varrho_1', \varrho_2')$ di $\Theta' u = 0$, li cangia in $u(T\varrho_1', T\varrho_2') = u(\varrho_1, \varrho_2)$, cioè nelle stesse funzioni delle variabili ϱ_1, ϱ_2; d'altra parte la T conserva i potenziali, dunque le $u(\varrho_1, \varrho_2)$ sono altrettanti potenziali indipendenti da ϱ_3 e perciò integrali della equazione $\Theta u = 0$. Nello stesso modo, considerando la trasformazione inversa a T (e prescindendo, si intende, dallo scambio materiale di ϱ_1, ϱ_2 in ϱ_1', ϱ_2') si riconoscerebbe che $\Theta' u = 0$ ammette tutti gli integrali di $\Theta u = 0$. Le due equazioni sono dunque identiche. Appare così sufficiente, per lo scopo nostro, di considerare trasformazioni infinitesime di G_7, non dotate di traiettorie equivalenti rispetto a tale gruppo. Dei corrispondenti potenziali si può asserire che essi non sono riducibili l'uno all'altro mediante similitudini; poichè, se lo fossero, lo stesso dovrebbe accadere per le rispettive linee equipotenziali, contro l'ipotesi. Essi appartengono perciò da questo punto di vista a tipi diversi.

Altra cosa è per le equazioni, che li definiscono. Queste infatti, pur appartenendo a tipi geometricamente distinti, possono benissimo risultare tutte o in parte trasformabili (nel senso più largo, in cui va qui intesa la trasformabilità).

Ma di ciò a tempo debito (§ 9), quando avremo esaurita l'indagine dei potenziali geometricamente distinti.

Occupiamoci ora della effettiva costruzione delle equazioni $\Theta u = 0$, che provengono dai diversi tipi di traiettorie dei gruppi ∞^1 di G_7. Limitandoci, il che è per noi naturale, al campo reale, si hanno, come è ben noto (7), i cinque tipi seguenti di equazioni $Xf = 0$ (cioè di traiettorie):

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0\,;$$

2) $$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\,;$$

3) $$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + m \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0\,, \qquad (m > 0)\,;$$

4) $$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0\,;$$

5) $$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + m\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 0\,, \qquad (m > 0)\,.$$

Facendo successivamente:

$$x_1 = \varrho_1\,, \qquad x_2 = \varrho_2\,, \qquad x_3 = \varrho_3\,;$$

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3\,, \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3\,, \qquad x_3 = \varrho_2\,;$$

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3\,, \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3\,, \qquad x_3 = \varrho_2 - m\varrho_3\,;$$

$$x_1 = \varrho_3 \operatorname{sen} \varrho_1 \cos \varrho_2\,, \qquad x_2 = \varrho_3 \operatorname{sen} \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2\,, \qquad x_3 = \varrho_3 \cos \varrho_1\,;$$

$$x_1 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2 e^{m\varrho_3} \cos \varrho_3\,, \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2 e^{m\varrho_3} \operatorname{sen} \varrho_3\,, \qquad x_3 = \varrho_1 \cos \varrho_1 e^{m\varrho_3}\,,$$

si constata senza alcuna difficoltà che ϱ_1, ϱ_2 sono in ciascun caso due integrali indipendenti delle cinque equazioni nell'ordine scritto. Se poi

(7) Veggasi per es.: LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, ecc., Leipzig, Teubner, pag. 237-243; oppure: P. STAECKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*, VI, « Leipziger Berichte », vol. 50, 1898.

si suppongono ϱ_1, ϱ_2 costanti, e si immagina di far variare ϱ_3, apparisce tosto la natura geometrica della congruenza, costituita dalle linee $\varrho_1 = \text{cost.}$, $\varrho_2 = \text{cost.}$, che sono ordinatamente rette parallele, circoli col medesimo asse, eliche col medesimo passo, raggi concorrenti in un punto, spirali di egual parametro.

Per formare le equazioni $\Theta_i u = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, che competono a questi cinque casi, basterà oramai esprimere il $\underset{2}{\Delta} u$ in coordinate curvilinee ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, porvi $\partial u / \partial \varrho_3 = 0$ e moltiplicare, se occorre, per un conveniente fattore, in modo da far sparire il ϱ_3.

Ci varremo della formula:

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial \varrho_r} \left\{ \sum_1^3{}_s \sqrt{a}\, a^{(rs)} \frac{\partial u}{\partial \varrho_s} \right\},$$

dove a ed $a^{(rs)}$ sono rispettivamente il determinante e gli elementi reciproci dei coefficienti a_{rs} del quadrato dell'elemento lineare in coordinate ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3.

Si hanno immediatamente per $\Theta_1 u = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_4 u = 0$ le forme consuete dei potenziali logaritmici, simmetrici, conici:

$$\Theta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0\,,$$

$$\Theta_2 u = \frac{1}{\varrho_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} \right) \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}\Theta_4 u &= \frac{1}{\operatorname{sen} \varrho_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\operatorname{sen} \varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varrho_1} \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varrho_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} + \cot \varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0\,.\end{aligned}$$

Per gli elicoidali e spirali riporteremo il calcolo per disteso. Nel primo caso il quadrato dell'elemento lineare ha la espressione:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \\ &= (d\varrho_1 \cos \varrho_3 - \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3\, d\varrho_3)^2 + (d\varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 + \varrho_1 \cos \varrho_3\, d\varrho_3)^2 + (d\varrho_2 - m\, d\varrho_3)^2 \\ &= d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2 + (m^2 + \varrho_1^2)\, d\varrho_3^2 - 2m\, d\varrho_2\, d\varrho_3\,, \end{aligned}$$

quindi:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & -m & m^2 + \varrho_1^2 \end{vmatrix} = \varrho_1^2\,,$$

$$a^{(11)}=1\,,\quad a^{(22)}=1+\frac{m^2}{\varrho_1^2}\,,\quad a^{(33)}=\frac{1}{\varrho_1^2}\,,\quad a^{(23)}=\frac{m}{\varrho_1^2}\,,\quad a^{(31)}=0\,,\quad a^{(12)}=0\,;$$

$$\underset{2}{\Delta}u=\frac{1}{\varrho_1}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left\{\left(\varrho_1+\frac{m^2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}+\frac{m}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_3}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left\{\frac{m}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}\right]\,,$$

$$\Theta_3^{(m)}u=\frac{1}{\varrho_1}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left\{\left(\varrho_1+\frac{m^2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right\}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial\varrho_1^2}+\left(1+\frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2u}{\partial\varrho_2^2}+\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}=0\,.$$

Per l'ultimo tipo, risulta:

$$ds^2=d(x_1+ix_2)\cdot d(x_1-ix_2)+dx_3^2$$

$$=d\{\varrho_1\,\text{sen}\,\varrho_2e^{(m+i\varrho_3)}\}\cdot d\{\varrho_1\,\text{sen}\,\varrho_2e^{(m-i\varrho_3)}\}+\{d(\varrho_1\cos\varrho_2e^{m\varrho_3})\}^2$$

$$=e^{2m\varrho_3}\{d\varrho_1^2+\varrho_1^2\,d\varrho_2^2+(m^2+\text{sen}^2\,\varrho_2)\varrho_1^2\,d\varrho_3^2+2m\varrho_1\,d\varrho_1\,d\varrho_3\}\,,$$

$$a=\begin{vmatrix} e^{2m\varrho_3} & 0 & e^{2m\varrho_3}m\varrho_1\\ 0 & e^{2m\varrho_3}\varrho_1^2 & 0\\ e^{2m\varrho_3}m\varrho_1 & 0 & e^{2m\varrho_3}\varrho_1^2(m^2+\text{sen}^2\,\varrho_2)\end{vmatrix}=e^{6m\varrho_3}\varrho_1^4\,\text{sen}^2\,\varrho^2\,;$$

$$a^{(11)}=e^{-2m\varrho_3}\left(1+\frac{m^2}{\text{sen}^2\,\varrho_2}\right),\quad a^{(22)}=e^{-2m\varrho_3}\frac{1}{\varrho_1^2}\,,\quad a^{(33)}=e^{-2m\varrho_3}\frac{1}{\varrho_1^2\,\text{sen}^2\,\varrho_2}\,,$$

$$a^{(23)}=0\,,\quad a^{(31)}=-\,e^{-2m\varrho_3}\frac{m}{\varrho_1\,\text{sen}^2\,\varrho_2}\,,\quad a^{(12)}=0\,;$$

$$\underset{2}{\Delta}u=\frac{e^{-3m\varrho_3}}{\varrho_1^2\,\text{sen}\,\varrho_2}\left[e^{m\varrho_3}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1^2\left(\text{sen}\,\varrho_2+\frac{m^2}{\text{sen}\,\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}-\frac{m\varrho_1}{\text{sen}\,\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_3}\right\}+\right.$$

$$\left.+e^{m\varrho_3}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\text{sen}\,\varrho_2\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left\{e^{m\varrho_3}\left(\frac{-m\varrho_1}{\text{sen}\,\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}+\frac{1}{\text{sen}\,\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_3}\right)\right\}\right]\,,$$

donde, moltiplicando per $e^{2m\varrho_3}$ e intendendo u indipendente da ϱ_3:

$$\Theta_5^{(m)} u$$

$$= \frac{1}{\varrho_1^2 \operatorname{sen} \varrho_2}\left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left\{\varrho_1^2\left(\operatorname{sen}\varrho_2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left\{\operatorname{sen}\varrho_2 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\right\} - \frac{m^2 \varrho_1}{\operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right]$$

$$= \left(1 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}\right)\frac{d^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1}\left(2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1^2}\cot \varrho_2 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} = 0 .$$

Giova raccogliere il risultato di questa indagine nella seguente tabella:

---

1) *Potenziali cilindrici o logaritmici*:

$$\Theta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0 ,$$

dove ϱ_1 e ϱ_2 designano coordinate cartesiane.

2) *Potenziali circolari o simmetrici*:

$$\Theta_2 u = \frac{1}{\varrho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\right)\right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0 ,$$

dove si è posto:

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3 , \quad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 , \quad x_3 = \varrho_2 .$$

3) *Potenziali elicoidali*:

$$\Theta_3^{(m)} u = \frac{1}{\varrho_1}\left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left\{\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left\{\left(\varrho_1 + \frac{m^2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\right\}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0 ,$$

dove si è posto:

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3 , \quad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 , \quad x_3 = \varrho_2 - m\varrho_3 , \quad (m > 0).$$

4) *Potenziali conici*:

$$\Theta_4 u = \frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\operatorname{sen}\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2}\right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varrho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2} + \cot\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} = 0\,,$$

dove si è posto:

$$x_1 = \varrho_3\operatorname{sen}\varrho_1\cos\varrho_2\,,\qquad x_2 = \varrho_3\operatorname{sen}\varrho_1\operatorname{sen}\varrho_2\,,\qquad x_3 = \varrho_3\cos\varrho_1\,.$$

5) *Potenziali spirali*:

$$\Theta_5^{(m)} u$$

$$= \frac{1}{\varrho_1^2\operatorname{sen}\varrho_2}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1^2\left(\operatorname{sen}\varrho_2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left\{\operatorname{sen}\varrho_2\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right\} - \frac{m^2\varrho_1}{\operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right.$$

$$= \left(1 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\varrho_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1}\left(2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1^2}\cot\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_2} = 0\,,$$

dove si è posto (con $m > 0$):

$$x_1 = \varrho_1\operatorname{sen}\varrho_2 e^{m\varrho_3}\cos\varrho_3\,,\qquad x_2 = \varrho_1\operatorname{sen}\varrho_2 e^{m\varrho_3}\operatorname{sen}\varrho_3\,,\qquad x_3 = \varrho_1\cos\varrho_2 e^{m\varrho_3}.$$

3. - Condizioni di equipotenzialità per una congruenza di linee.

Si tratta qui di caratterizzare tutti i possibili potenziali binari. La questione si riduce manifestamente ad assegnare tutte le possibili congruenze di linee equipotenziali, poichè, una volta queste conosciute, basta, come s'è visto, assumerle in un modo qualunque a linee ϱ_3 ($\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost.), per risalire ai corrispondenti potenziali.

Una congruenza $\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost. è a dirsi equipotenziale, quando la equazione:

$$\Delta_2 u = 0\,,$$

suppostovi $\partial u/\partial\varrho_3 = 0$, può rendersi esente da ϱ_3. Questo significa in sostanza che le due equazioni:

$$\begin{cases} \underset{2}{\Delta} u = 0 \,, \\ Xu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial \varrho_3} = 0 \,, \end{cases}$$

costituiscono un sistema completo, cioè che la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u = 0$$

è una conseguenza necessaria delle due $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $Xu = 0$. Messa sotto questa forma, la condizione di equipotenzialità presenta il vantaggio di essere indipendente dal sistema di riferimento.

In coordinate curvilinee qualunque x_1, x_2, x_3, supposto:

$$ds^2 = \sum_{rs}^{3}{}_{1} a_{rs} \, dx_r \, dx_s \,,$$

e detti, come sopra, $a^{(rs)}$ gli elementi reciproci ad a_{rs} nel determinante $a = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}$, sarà colla notazione delle derivate covarianti:

$$\underset{2}{\Delta} u = \sum_{rs}^{3} a^{(rs)} u_{rs} \,.$$

La equazione $Xu = 0$ assumerà genericamente l'aspetto:

$$Xu = \xi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \xi^{(3)} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \sum_1^3 \xi^{(t)} u_t = 0 \,.$$

I coefficienti $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ sono elementi di un sistema contravariante a priori indeterminato; perchè essi rispondano alla questione, è necessario e basta che la equazione (di secondo ordine):

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u = 0$$

sia una conseguenza delle due $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $Xu = 0$, ossia che il primo membro di essa riesca una combinazione lineare di $\underset{2}{\Delta} u$, Xu e delle tre derivate (ordinarie, o, ciò che torna poi lo stesso, contravarianti) di quest'ultima. Avremo dunque, per caratterizzare le $\xi^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$, le condizioni, che scaturiscono dalla identità:

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u \equiv 2M \underset{2}{\Delta} u + NXu + 2 \sum_{r}^{3}{}_{1} g_s (Xu)^r \,, \tag{4}$$

dove i moltiplicatori M, N e g_s possono essere arbitrarie funzioni di x_1, x_2, x_3.

È appena necessario osservare che, reciprocamente, ogniqualvolta le $\xi^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$ soddisfanno alla (4), le caratteristiche della equazione $Xu = 0$, cioè le linee della congruenza:

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \frac{dx_3}{\xi^{(3)}}$$

riescono equipotenziali.

Infatti esse non sono altro che le linee ϱ_3 ($\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost.), quando si assumono come superficie coordinate $\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost., due integrali indipendenti di $Xu = 0$. D'altronde la (4) stessa ci assicura che, ponendo in $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $\partial u/\partial \varrho_3 = 0$, si ottiene effettivamente un potenziale binario.

Avviamoci a stabilire le equazioni, in cui si scinde la (4), eguagliando i coefficienti delle singole derivate (contravarianti) di u.

Avremo in primo luogo, applicando le regole di derivazione dei sistemi composti ([8]) e scrivendo $\sum_{rs}{}_1^3 a_{rs} u^{(rs)}$, $\sum_t{}_1^3 \xi_t u^{(t)}$ per $\sum_{rs}{}_1^3 a^{(rs)} u_{rs}$, $\sum_t{}_1^3 \xi^{(t)} u_t$:

$$\begin{aligned}\underset{2}{\Delta} Xu &= \sum_{rs}{}_1^3 a_{rs} (Xu)^{rs} = \sum_{rs}{}_1^3 a_{rs} \left\{ \sum{}_1^3 \xi_t u^{(t)} \right\}^{rs} \\ &= \sum_{rst}{}_1^3 a_{rs} \xi_t u^{(trs)} + 2 \sum_{rstp}{}_1^3 a_{rs} a^{(rp)} \xi_{tp} u^{(ts)} + \sum_{rstpq}{}_1^3 a_{rs} a^{(rp)} a^{(sq)} \xi_{tpq} u^{(t)} .\end{aligned}$$

Se si tien conto che $\sum_r a_{rs} a^{(rp)} = \varepsilon_{sp}$, con opportuno scambio di indici, risulterà:

$$\underset{2}{\Delta} Xu = \sum_{rst}{}_1^3 a_{rs} \xi_t u^{(trs)} + 2 \sum_{rs}{}_1^3 u^{(rs)} \xi_{rs} + \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)} \xi_{rpq} .$$

Per essere identicamente nulle le derivate covarianti dei coefficienti a_{rs} della forma fondamentale:

$$X \underset{2}{\Delta} u = \sum_t{}_1^3 \xi_t \left\{ \sum_{rs}{}_1^3 a_{rs} u^{(rs)} \right\}^t = \sum_{rst}{}_1^3 a_{rs} \xi_t u^{(rst)} ,$$

([8]) Cfr. Ricci, *Lezioni sulla teoria delle superficie*, cap. III, Padova, presso i fratelli Drucker, 1898.

e, siccome, in uno spazio euclideo, le derivate covarianti o contravarianti sono simmetriche, al pari delle ordinarie, così nella differenza $\underset{2}{\Delta} Xu - X\underset{2}{\Delta} u$, i termini di terz'ordine si elidono identicamente e rimane:

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X\underset{2}{\Delta} u = 2 \sum_{1}^{3}{}_{rs} u^{(rs)} \xi_{rs} + \sum_{1}^{3}{}_{r} u^{(r)} \sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)} \xi_{rpq} .$$

D'altra parte il secondo membro della (4), scritto per disteso, vale:

$$2M \sum_{1}^{3}{}_{rs} a_{rs} u^{(rs)} + N \sum_{1}^{3}{}_{r} \xi_r u^{(r)} + 2 \sum_{1}^{3}{}_{r} g_r \left(\sum_{1}^{3}{}_{s} \xi_s u^{(s)} \right)^{r}$$

$$= 2M \sum_{1}^{3}{}_{rs} u^{(rs)} a_{rs} + N \sum_{1}^{3}{}_{r} u^{(r)} \xi_r + 2 \sum_{1}^{3}{}_{rs} u^{(sr)} g_r \xi_s + 2 \sum_{1}^{3}{}_{r} u^{(r)} \sum_{1}^{3}{}_{s} g^{(s)} \xi_{rs} ,$$

onde la (4) stessa assume in definitiva l'aspetto:

$$2 \sum_{1}^{3}{}_{rs} u^{(rs)} \xi_{rs} + \sum_{1}^{3}{}_{r} u^{(r)} \sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)} \xi_{rpq}$$

$$= 2M \sum_{1}^{3}{}_{rs} u^{(rs)} a_{rs} + N \sum_{1}^{3}{}_{r} u^{(r)} \xi_r + 2 \sum_{1}^{3}{}_{rs} u^{(sr)} g_r \xi_s + 2 \sum_{1}^{3}{}_{r} u^{(r)} \sum_{1}^{3}{}_{s} g^{(s)} \xi_{rs} .$$

Il confronto dei coefficienti dei termini di secondo ordine porge:

$$\text{(5)} \qquad \xi_{rs} + \xi_{sr} = 2M a_{rs} + g_r \xi_s + g_s \xi_r , \qquad (r, s = 1, 2, 3);$$

quello dei termini di prim'ordine:

$$\text{(6)} \qquad \sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)} \xi_{rpq} = N \xi_r + 2 \sum_{1}^{3}{}_{s} g^{(s)} \xi_{rs} , \qquad (r = 1, 2, 3).$$

In coordinate cartesiane ortogonali le a_{rs}, $a^{(rs)}$ valgono ε_{rs} e le derivate covarianti coincidono colle ordinarie. Le equazioni (5) e (6) si possono allora scrivere:

$$\text{(5')} \qquad \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 2 \varepsilon_{rs} M + g_r \xi_s + g_s \xi_r , \qquad (r, s = 1, 2, 3);$$

$$\text{(6')} \qquad \underset{2}{\Delta} \xi_r = N \xi_r + 2 \sum_{1}^{3}{}_{s} g_s \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} , \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Se si suppongono N e le g eguali a zero, si ritrovano le equazioni (2), (3) del § 1. Ogni loro soluzione appartiene perciò anche al sistema (5), (6). Questo torna a dirci che le traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini costituiscono una congruenza equipotenziale. La condizione di equipotenzialità ci si presenta per converso sotto una forma molto più generale, in quanto le equazioni, cui debbono soddisfare le ξ_r, contengono ben cinque funzioni arbitrarie. Con tutto ciò, vedremo più innanzi che siffatta maggiore arbitrarietà influisce soltanto in un caso, che potrebbe chiamarsi singolare. Nel caso generale essa sparisce, quando si tien conto delle condizioni di integrabilità del sistema.

4. - Generalità sui sistemi ortogonali di congruenze [9]. Formule intrinseche per una congruenza dello spazio ordinario.

Data in uno spazio qualunque ad n dimensioni, di elemento lineare:

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

una congruenza di linee, definita dalle equazioni:

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \dots = \frac{dx_n}{\xi^{(n)}}\,,$$

poniamo, come è certamente lecito, se la congruenza è reale:

$$\lambda^{(r)} = e^{\nu}\xi^{(r)} = \frac{dx_r}{ds}\,, \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dove

$$e^{\nu} = \frac{1}{\left|\sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\xi^{(r)}\xi^{(s)}}\right|}$$

e ds designa l'elemento d'arco (preso in valore assoluto) di una generica curva della congruenza. Risulta così fissata in ogni punto anche una direzione positiva.

---

[9] Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, « Memorie della R. Accademia dei Lincei », 1896.

Le $\lambda^{(r)}$ verificano identicamente la relazione:

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\lambda^{(r)}\lambda^{(s)} = 1$$

e costituiscono il *sistema coordinato contravariante* della congruenza considerata. Introducendo insieme il sistema reciproco λ_r, (*sistema coordinato covariante*), la superiore identità si scrive più semplicemente:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda^{(r)}\lambda_r = 1 \,.$$

Se lo spazio è euclideo e riferito a coordinate cartesiane ortogonali, le $\lambda^{r)}$ e λ_r coincidono manifestamente coi coseni direttori delle tangenti alle linee della congruenza (supposto che per direzione positiva della tangente si assuma quella dell'arco).

Date due congruenze, i cui sistemi contravarianti sieno ordinatamente

$$\lambda_h^{(r)} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \,, \qquad \lambda_k^{(s)} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

(e quindi i covarianti $\lambda_{h|r}$, $\lambda_{k|s}$), la condizione di ortogonalità si esprimerà con:

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\lambda_h^{(r)}\lambda_k^{(s)} = 0 \,,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_h^{(r)}\lambda_{k|r} = 0 \,,$$

ovvero ancora:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_{h|r}\lambda_k^{(r)} = 0 \,.$$

Ne viene che, se n congruenze sono ortogonali due a due nella varietà considerata, designandone con

$$\lambda_h^{(r)}, \quad \lambda_{h|r} \qquad (h = 1, 2, \dots, n; \quad r = 1, 2, \dots, n)$$

i rispettivi sistemi coordinati contravariante e covariante, varranno le identità:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_h^{(r)}\lambda_{k|r} = \varepsilon_{hk} \,, \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n), \tag{7}$$

in numero di $n(n+1)/2$, che generalizzano quelle ben note tra i coseni di un'ennupla ortogonale negli spazi euclidei.

Per brevità, chiamerò [1], [2], ecc., la congruenza di sistema coordinato $\lambda_1^{(r)}$, $\lambda_2^{(r)}$, ecc.; linea s_1, s_2, ecc., relativa ad un dato punto, la linea della corrispondente congruenza, passante per quel punto.

Derivando covariantemente le (7), si ha:

$$(7') \qquad \sum_1^n {}_r\, \lambda_{h|rs}\lambda_k^{(r)} + \sum_1^n {}_r\, \lambda_{k|rs}\lambda_h^{(r)} = 0\,, \qquad (h, k, s = 1, 2, \dots, n),$$

talchè le n^3 derivate delle $\lambda_{h|r}$ si trovano legate da $n^2(n+1)/2$ relazioni. Potremo esprimerle tutte in termini delle $\lambda_{h/r}$ e di certe $n^2(n+1)/2$ ausiliarie, che si introducono nel modo il più conveniente, ponendo:

$$(8) \qquad \gamma_{hkl} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_{h|rs}\lambda_k^{(r)}\lambda_l^{(s)}\,, \qquad (k, h, l = 1, 2, \dots, n).$$

Queste γ sono altrettanti invarianti e ve ne ha effettivamente solo $n^2(n+1)/2$ di indipendenti, in quanto le (7′), moltiplicate per $\lambda_l^{(s)}$ e sommate rispetto ad s, porgono:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_{h|rs}\lambda_k^{(r)}\lambda_l^{(s)} + \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_{k|rs}\lambda_h^{(r)}\lambda_l^{(s)} = 0\,,$$

donde:

$$(9) \qquad \gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0\,, \qquad (h, k, l = 1, 2, \dots, n),$$

e in particolare:

$$\gamma_{hhl} = 0\,.$$

La risoluzione delle (8) conduce alle cercate espressioni delle derivate prime:

$$(8') \qquad \lambda_{h|rs} = \sum_1^n {}_{ij}\, \gamma_{hij}\lambda_{i|r}\lambda_{j|s}\,.$$

Derivando ancora ed eliminando le derivate prime a mezzo delle (8′) stesse, si ottiene:

$$(10) \quad \lambda_{h|rst} = \sum_1^n {}_{ij}\, \gamma_{hij|t}\lambda_{i|r}\lambda_{j|s} + \sum_1^n {}_{ijkl}\, \gamma_{hij}\gamma_{ikl}\lambda_{k|r}\lambda_{l|t}\lambda_{j|s} + \sum_1^n {}_{ijkl}\, \gamma_{hij}\gamma_{jkl}\lambda_{k|s}\lambda_{l|t}\lambda_{i|r}\,.$$

Le γ, che s'è visto essere in numero di $n^2(n+1)/2$ algebricamente indipendenti, sono legate da certe relazioni differenziali, che si ottengono facilmente, esprimendo che i secondi membri delle (10) sono le derivate seconde (covarianti) degli elementi di uno stesso sistema semplice.

Nel caso degli spazi euclidei, queste relazioni tra le derivate seconde si riducono a:

$$\lambda_{h|rst} - \lambda_{h|rts} = 0 ,$$

con che, sottraendo le corrispondenti (10), moltiplicando per $\lambda_{k'}^{(r)}\lambda_{i'}^{(s)}\lambda_{j'}^{(t)}$ e sommando rispetto ad r, s, t, risulta ovviamente:

$$\sum_1^n{}_t\, \gamma_{hk'i'|t}\lambda_{j'}^{(t)} - \sum_1^n{}_t\, \gamma_{hk'j'|t}\lambda_{i'}^{(t)} + \sum_1^n{}_i\, (\gamma_{hii'}\gamma_{ik'j'} - \gamma_{hij'}\gamma_{ik'i'}) + \\ + \sum_1^n{}_j\, \gamma_{hk'j}(\gamma_{ji'j'} - \gamma_{jj'i'}) = 0 ,$$

alle quali, sostituendo l per i e j come indice di sommatoria, riponendo k, i, j al posto di k', i', j', e adoperando altresì la notazione $\partial f/\partial s_i$, per designare la derivata di una generica funzione f nella direzione positiva ds_i della curva s_i (cioè la somma $\sum_1^n{}_r\, f_r\lambda_i^{(r)} = \sum_1^n{}_r\, (\partial f/\partial x_r)(dx_r/ds_i)$, si attribuisce la forma definitiva):

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial \gamma_{hki}}{\partial s_j} - \frac{\partial \gamma_{hkj}}{\partial s_i} + \sum_1^n{}_l\, (\gamma_{hli}\gamma_{lkj} - \gamma_{hlj}\gamma_{lki}) + \sum_1^n{}_l\, \gamma_{hkl}(\gamma_{lij} - \gamma_{lji}) = 0 , \\ (h, k, l, j = 1, 2, ..., n) .$$

Tali sono le relazioni intrinseche, che caratterizzano gli invarianti γ, spettanti ad un'ennupla ortogonale di congruenze in uno spazio euclideo.

È bene, prima di procedere, accennare ancora alle relazioni, che intercedono fra le derivate seconde $(\partial/\partial s_j)(\partial/\partial s_i)f$, $(\partial/\partial s_i)(\partial/\partial s_j)f$ di una medesima funzione f. Le due derivazioni non sono invertibili come le ordinarie o covarianti, ma si ha:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial}{\partial s_j}\frac{\partial}{\partial s_i} f - \frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial}{\partial s_j} f = - \sum_1^n{}_l\, \frac{\partial f}{\partial s_l}(\gamma_{lij} - \gamma_{lji}) .$$

La dimostrazione è delle più semplici. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \sum_1^n{}_h\, f_h\lambda_i^{(h)} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{\partial}{\partial s_i} f = \sum_1^n{}_k\, \lambda_j^{(k)} \left(\sum_1^n{}_h\, f_h\lambda_i^{(h)}\right)_k = \sum_1^n{}_{hk}\, f_{hk}\lambda_i^{(h)}\lambda_j^{(k)} + \sum_1^n{}_h\, f^{(h)} \sum_1^n{}_k\, \lambda_{i|hk}\lambda_j^{(k)} ,$$

e, a tenore delle (8'):

$$\sum_1^n {}_k \lambda_{i|hk}\lambda_j^{(k)} = \sum_1^n {}_l \gamma_{lij}\lambda_{l|h} = -\sum_1^n {}_l \gamma_{lij}\lambda_{l|h} ,$$

talchè:

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{\partial}{\partial s_i} f = \sum_1^n {}_{hk} f_{hk}\lambda_i^{(h)}\lambda_j^{(k)} - \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial s_l}\gamma_{lij} .$$

Scambiando i con j e sottraendo, le due prime sommatorie si elidono, per la simmetria delle derivate covarianti, e risulta appunto la (12).

Riferiamoci oramai al caso $n = 3$.

Le corrispondenti (11) (essendo simmetriche, tanto rispetto ai due indici h, k, quanto rispetto ad i, j, e identicamente soddisfatte per $h = k$, ovvero $i = j$) si avranno tutte, combinando i valori 2, 3; 3, 1; 1, 2 della coppia h, k coi valori 2, 3; 3, 1; 1, 2 della coppia i, j.

Posto per maggior comodo:

$$\begin{cases} p_1 = \gamma_{231} = -\gamma_{321} , & q_1 = \gamma_{311} = -\gamma_{131} , \quad r_1 = \gamma_{121} = -\gamma_{211} , \\ p_2 = \gamma_{232} = -\gamma_{322} , & q_2 = \gamma_{312} = -\gamma_{132} , \quad r_2 = \gamma_{122} = -\gamma_{212} , \\ p_3 = \gamma_{233} = -\gamma_{323} , & q_3 = \gamma_{313} = -\gamma_{133} , \quad r_3 = \gamma_{123} = -\gamma_{213} ; \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} \gamma_{123} - \gamma_{132} = q_2 + r_3 , & \gamma_{131} - \gamma_{113} = -q_1 , \quad \gamma_{112} - \gamma_{121} = -r_1 , \\ \gamma_{223} - \gamma_{232} = -p_2 , & \gamma_{231} - \gamma_{213} = r_3 + p_1 , \quad \gamma_{212} - \gamma_{221} = -r_2 , \\ \gamma_{323} - \gamma_{332} = -p_3 , & \gamma_{331} - \gamma_{313} = -q_3 , \quad \gamma_{312} - \gamma_{321} = p_1 + q_2 , \end{cases}$$

le (11) si scindono nei tre gruppi seguenti:

$$(11_a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial s_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial s_2} + r_2 q_3 - r_3 q_2 + p_1(q_2 + r_3) - p_2^2 - p_3^2 = 0 , \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial s_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial s_3} + r_3 q_1 - r_1 q_3 - p_1 q_1 + p_2(r_3 + p_1) - p_3 q_3 = 0 , \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial s_1} + r_1 q_2 - r_2 q_1 - p_1 r_1 - p_2 r_2 + p_3(p_1 + q_2) = 0 ; \end{cases}$$

$$
(11_b)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial q_2}{\partial s_3}-\dfrac{\partial q_3}{\partial s_2}+p_2r_3-p_3r_2+q_1(q_2+r_3)-q_2p_2-q_3p_3=0\,,\\[2mm]
\dfrac{\partial q_3}{\partial s_1}-\dfrac{\partial q_1}{\partial s_3}+p_3r_1-p_1r_3-q_1^2+q_2(r_3+p_1)-q_3^2=0\,,\\[2mm]
\dfrac{\partial q_1}{\partial s_2}-\dfrac{\partial q_2}{\partial s_1}+p_1r_2-p_2r_1-q_1r_1-q_2r_2+q_3(p_1+q_2)=0\,;
\end{cases}
$$

$$
(11_c)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial r_2}{\partial s_3}-\dfrac{\partial r_3}{\partial s_2}+q_2p_3-q_3p_2+r_1(q_2+r_3)-r_2p_2-r_3p_3=0\,,\\[2mm]
\dfrac{\partial r_3}{\partial s_1}-\dfrac{\partial r_1}{\partial s_3}+q_3p_1-q_1p_3-r_1q_1+r_2(r_3+p_1)-r_3q_3=0\,,\\[2mm]
\dfrac{\partial r_1}{\partial s_2}-\dfrac{\partial r_2}{\partial s_1}+q_1p_2-q_2p_1-r_1^2-r_2^2+r_3(p_1+q_2)=0\,;
\end{cases}
$$

e le (12) dànno:

$$
(12')\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial s_3}\dfrac{\partial}{\partial s_2}f-\dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_3}f=-(q_2+r_3)\dfrac{\partial f}{\partial s_1}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial s_2}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,,\\[2mm]
\dfrac{\partial}{\partial s_1}\dfrac{\partial}{\partial s_3}f-\dfrac{\partial}{\partial s_3}\dfrac{\partial}{\partial s_1}f=q_1\dfrac{\partial f}{\partial s_1}-(r_3+p_1)\dfrac{\partial f}{\partial s_2}+q_3\dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,,\\[2mm]
\dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_1}f-\dfrac{\partial}{\partial s_1}\dfrac{\partial}{\partial s_2}f=r_1\dfrac{\partial f}{\partial s_1}+r_2\dfrac{\partial f}{\partial s_2}-(p_1+q_2)\dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,.
\end{cases}
$$

Le quantità p, q, r, come può desumersi dalla interpretazione generale degli invarianti γ [10], e come del resto risulta da note considerazioni di cinematica [11], hanno significato di rotazioni.

Per precisare tale significato, si fissi un generico punto P e altri tre punti infinitamente vicini P_1, P_2, P_3, appartenenti rispettivamente alle direzioni positive delle linee s_1, s_2, s_3, passanti per P. Sieno ds_1, ds_2, ds_3 gli archetti elementari interposti.

Si immaginino i triedri trirettangoli T, T_1, T_2, T_3, costituiti dalle direzioni positive delle tangenti alle linee delle congruenze in P, P_1, P_2, P_3; dicansi in particolare x, y, z le tangenti in P alle linee s_1, s_2, s_3.

---

[10] RICCI, loco cit., pag. 22-23.

[11] Le formole (11a), (11b), (11c) si sarebbero anche potute ricavare dalla così detta teoria del triedro mobile (veggasi ad es. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Première Partie; livr. I, chap. V), tenendo presente che le differenze di due derivate $(\partial/\partial s_j)(\partial/s_i)$, $(\partial/\partial s_i)(\partial/s_j)$ di una medesima coordinata non sono identicamente nulle, ma hanno i valori (12′).

$p_i ds_i$, $q_i ds_i$, $r_i ds_i$ sono le componenti, rapporto agli assi x, y, z, della rotazione elementare, con cui si passa dal triedro T al triedro T_i.

Supponiamo ora che sia data un'unica congruenza [3]. Potremo in infiniti modi associarne altre due, che costituiscano con essa una terna ortogonale.

Per la applicazione, che abbiamo in vista, giova assumere come congruenze [1], [2] quelle definite dalle direzioni positive delle normali principali e binormali alle curve s_3. Intenderemo al solito che la direzione positiva della normale principale (e quindi di s_1) sia rivolta verso la concavità di s_3 e la direzione positiva di s_2 sia tale che il triedro, pocanzi designato con x, y, z, presenti l'ordinario orientamento.

Si ha in tale ipotesi, come è ben noto:

$$(13) \qquad p_3 = 0\,, \quad q_3 = \varrho\,, \quad r_3 = -\tau\,,$$

ϱ e τ designando rispettivamente la curvatura e la torsione della curva s_3 nel generico punto, che si considera.

Se mai la congruenza [3] fosse rettilinea, le [1] e [2] rimangono indeterminate. Anche senza individuarle completamente, gioverà sceglierne una, la [1] per es., normale. Ciò si può raggiungere in infiniti modi, prendendo ad arbitrio una famiglia di superficie rigate, le cui generatrici sieno raggi della congruenza [3], e assumendo poi per congruenza [1] quella costituita dalle traiettorie ortogonali.

La [2] risulta allora determinata come ortogonale a [3], [1].

La condizione affinchè la congruenza [1] sia normale si esprime mediante la equazione ([12]):

$$\gamma_{123} - \gamma_{132} = 0\,,$$

cioè:

$$r_3 + q_2 = 0\,.$$

Possiamo dunque per le congruenze rettilinee ritenere soddisfatte le equazioni

$$(13') \qquad p_3 = 0\,, \quad q_3 = 0\,, \quad r_3 = -q_2\,.$$

Questo modo di particolarizzare le (13) è quello, che meglio conviene alla nostra ricerca, ma non è forse il più spontaneo, parendo a primo

---

([12]) Ricci, loco cit., pag. 27.

aspetto più semplice di assumere le direzioni s_1 ed s_2 parallele fra loro lungo un medesimo raggio.

Ogni triedro T_3 riesce allora parallelo a T e si annullano ad un tempo p_3, q_3, r_3.

5. - Congruenze rettilinee isotrópe e corrispondenti potenziali binari.

Le equazioni intrinseche:

$$(14) \qquad p_3 = 0\,, \quad q_3 = 0\,; \quad p_1 = q_2\,, \quad p_2 = -q_1\,,$$

hanno carattere invariantivo rispetto alla congruenza [3] ([13]) e sono perciò valide qualunque sia la coppia di congruenze ortogonali associate. Possiamo poi, prendendo la [1] come s'è detto or ora, supporre verificata anche la condizione:

$$r_3 = -q_2\,.$$

Si tratta di studiare un po' da vicino le congruenze, che appartengono a questa categoria.

Il problema analitico corrispondente è presto formulato. Si dovrà integrare il sistema di equazioni intrinseche, che consta delle fondamentali (11_a), (11_b), (11_c) e delle:

$$(14') \qquad p_3 = 0\,, \quad q_3 = 0\,; \quad p_1 = q_2\,, \quad p_2 = -q_1\,; \quad r_3 = -q_2\,.$$

Portando questi valori nelle equazioni fondamentali, le (11_a), (11_b) si riducono a quattro distinte, che ordineremo come segue:

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_2}{\partial s_3} = -2q_2q_1\,; \end{cases}$$

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} = 0\,; \end{cases}$$

([13]) Infatti, coi simboli di RICCI, le due prime equazioni (14) $\gamma_{323} = 0$, $\gamma_{313} = 0$ esprimono che la congruenza [3] è geodetica, e le altre due $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$, $\gamma_{311} = \gamma_{322}$ che la sua equazione algebrica caratteristica ha radici eguali. Cfr. loco cit., pag. 24, 31.

le (11_c) divengono:

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial r_2}{\partial s_3}+\frac{\partial q_2}{\partial s_2}=-q_1 r_2\,,\\
&\frac{\partial r_1}{\partial s_3}+\frac{\partial q_2}{\partial s_1}=-q_1 r_1\,,\\
&\frac{\partial r_1}{\partial s_2}-\frac{\partial r_2}{\partial s_1}=r_1^2+r_2^2+q_1^2+3q_2^2\,;
\end{aligned}
\right.
$$

e il sistema — che chiamerò (C) per brevità — costituito dalle (14′), (15), (16), (17) è completo, poichè, eliminando le derivate seconde a mezzo delle (12) e tenendo conto delle equazioni di (C), le combinazioni differenziali:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s_3}\left\{\frac{\partial q_1}{\partial s_1}+\frac{\partial q_2}{\partial s_2}\right\}-\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial q_1}{\partial s_3}-\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial q_2}{\partial s_3}=-\frac{\partial}{\partial s_1}(q_1^2-q_2^2)+2\frac{\partial}{\partial s_2}(q_2 q_1)\,,\\
&\frac{\partial}{\partial s_3}\left\{\frac{\partial q_1}{\partial s_2}-\frac{\partial q_2}{\partial s_1}\right\}-\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial q_1}{\partial s_3}+\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial q_2}{\partial s_3}=-\frac{\partial}{\partial s_2}(q_2^2-q_1^2)-2\frac{\partial}{\partial s_1}(q_2 q_1)\,,\\
&\frac{\partial}{\partial s_3}\left\{\frac{\partial r_1}{\partial s_2}-\frac{\partial r_2}{\partial s_1}\right\}-\frac{\partial}{\partial s_2}\left\{\frac{\partial r_1}{\partial s_2}+\frac{\partial q_1}{\partial s_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial r_2}{\partial s_3}+\frac{\partial q_1}{\partial s_2}\right\}=\\
&\qquad=\frac{\partial}{\partial s_3}\{r_1^2+r_2^2+q_1^2+3q_2^2\}+\frac{\partial}{\partial s_2}(q_1 r_1)-\frac{\partial}{\partial s_1}(q_1 r_2)
\end{aligned}
$$

si riducono ad altrettante identità.

Per agevolare la integrazione di questo sistema, è bene aver prima riconosciuta la proprietà geometrica, espressa dalle (14).

Esse caratterizzano le congruenze rettilinee isotrópe [14] (secondo la denominazione di RIBAUCOUR).

Infatti la condizione necessaria e sufficiente affinchè una determinata congruenza rettilinea $\lambda_{3|r}$ sia isotrópa si riassume nella proporzionalità fra i coefficienti delle due forme:

$$
\sum_1^3{}_r\,(d\lambda_{3|r})^2\,,\qquad \sum_1^3{}_r\,d\lambda_{3|r}\,dx_r\,,
$$

le coordinate x_1, x_2, x_3 essendo cartesiane ortogonali.

---

[14] Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1894; cap. X [2ª ed., ibidem, vol. I (1902), cap. X]; ed anche la mia nota: *Sulle congruenze di curve*, nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 5 marzo 1899 [in questo vol.: XXII, pp. 369-377].

Il carattere invariantivo delle espressioni:

$$\psi = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{r}\, \lambda_{3|pr} dx_r \right\} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{s}\, \lambda_{3|qs} dx_s \right\},$$

$$\chi = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, \lambda_{3|rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

le quali, in coordinate cartesiane ortogonali, si riducono rispettivamente a $\sum_{1}^{3}{}_{r}\, (d\lambda_{3|r})^2$, $\sum_{1}^{3}{}_{r}\, d\lambda_{3|r}\, dx_r$, permette di esprimere la stessa condizione, qualunque sia il sistema di riferimento, mediante la identità:

$$\chi \equiv S\psi\,,$$

con S moltiplicatore arbitrario.

Eguagliando i coefficienti dei medesimi differenziali, otteniamo le equazioni:

$$\lambda_{3|rs} + \lambda_{3|sr} = 2S \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} \lambda_{3|pr} \lambda_{3|qs}\,,$$

che giova presentare sotto forma invariantiva, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)}$ e sommando rispetto ad r e ad s.

Il primo membro, a tenore delle (8), diviene:

$$\gamma_{3ij} + \gamma_{3ji}\,.$$

Quanto al secondo, avremo, usando la formula $a^{(pq)} = \sum_{1}^{3}{}_{h}\, \lambda_h^{(p)} \lambda_h^{(q)}$ e poi le (8):

$$2S \sum_{1}^{3}{}_{pqrs}\, a^{(pq)} \lambda_{3|pr} \lambda_{3|qs} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} =$$

$$= 2S \sum_{1}^{3}{}_{h} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{pr}\, \lambda_{3|pr} \lambda_h^{(p)} \lambda_i^{(r)} \right\} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{qs}\, \lambda_{3|qs} \lambda_h^{(q)} \lambda_j^{(s)} \right\} = 2S \sum_{1}^{3}{}_{h}\, \gamma_{3hi} \gamma_{3hj}\,,$$

talchè risulta:

$$\gamma_{3ij} + \gamma_{3ji} = 2S \sum_{1}^{3}{}_{h}\, \gamma_{3hi} \gamma_{3hj}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Per $i = 3$, $j = 1, 2, 3$, queste equazioni, scritte per disteso, dànno:

$$\begin{cases} \gamma_{313} = 2S\{\gamma_{313}\gamma_{311} + \gamma_{323}\gamma_{321}\}, \\ \gamma_{323} = 2S\{\gamma_{313}\gamma_{312} + \gamma_{323}\gamma_{322}\}, \\ 0 \ \ = \gamma_{313}^2 + \gamma_{323}^2; \end{cases}$$

e per $i, j = 1, 2$:

$$\begin{cases} \gamma_{311} = S(\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2), \\ \gamma_{322} = S(\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2), \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 2S(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322}). \end{cases}$$

Le prime tre si riducono a:

$$\gamma_{323} = 0, \qquad \gamma_{313} = 0,$$

che sono le:

$$p_3 = 0, \qquad q_3 = 0$$

delle (14); il secondo gruppo equivale a:

$$\gamma_{311} + \gamma_{322} = S(\gamma_{311}^2 + \gamma_{322}^2 + \gamma_{312}^2 + \gamma_{321}^2),$$

$$\begin{aligned} &(\gamma_{311} - \gamma_{322}) \pm i(\gamma_{312} + \gamma_{321}) = \\ &= S\{(\gamma_{311}^2 - \gamma_{312}^2 \pm 2i\gamma_{311}\gamma_{312}) - (\gamma_{322}^2 - \gamma_{321}^2 \mp 2i\gamma_{322}\gamma_{321})\} = \\ &= S\{(\gamma_{311} \pm i\gamma_{312})^2 - (\gamma_{322} \mp i\gamma_{321})^2\} = \\ &= S\{(\gamma_{311} + \gamma_{312}) \pm i(\gamma_{312} - \gamma_{321})\}\{(\gamma_{311} - \gamma_{322}) \pm i(\gamma_{312} + \gamma_{321})\}, \end{aligned}$$

dove $i = \sqrt{-1}$.

Se le (14) sono soddisfatte:

$$\gamma_{311} - \gamma_{322} = q_1 + p_2 = 0,$$
$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = q_2 - p_1 = 0,$$

e quindi risultano identicamente verificate le due ultime equazioni; quanto alla prima, basta disporre di S in modo opportuno.

Reciprocamente sarebbe assai facile constatare che, se una congruenza rettilinea reale è isotrópa ($\chi \equiv S\psi$), le (14) riescono soddisfatte, oppure la congruenza consta delle traiettorie ortogonali ad una famiglia di rigate parallele ($\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0$, $\gamma_{311}\gamma_{322} = 0$).

Posto ciò, veniamo alla effettiva integrazione del sistema (C).

Incominciamo col fissare le coordinate curvilinee, a cui intendiamo riferirci. Dacchè, per ipotesi, ($q_2 + r_3 = \gamma_{123} - \gamma_{132} = 0$), la congruenza [1] è stata scelta normale, appare indicato di assumere come superficie coordinate $x_1 =$ cost. le traiettorie ortogonali alle linee della congruenza.

Le $\lambda_{1|r}$ risultano allora proporzionali alle derivate della funzione x_1. Indicando con H_1 il fattore di proporzionalità avremo:

$$\lambda_{1|1} = H_1\,, \quad \lambda_{1|2} = 0\,, \quad \lambda_{1|3} = 0\,.$$

Per essere, a tenore delle (14′), $p_1 = q_2$ e quindi:

$$p_1 + r_3 = \gamma_{231} - \gamma_{213} = 0\,,$$

anche la [2] è normale ([15]), onde, assumendone le traiettorie ortogonali a superficie $x_2 =$ cost., si potrà porre:

$$\lambda_{2|1} = 0\,, \quad \lambda_{2|2} = H_2\,, \quad \lambda_{2|3} = 0\,.$$

Come coordinata x_3 di un punto qualunque prenderemo l'ascissa, contata sul raggio di [3], passante per quel punto a partire dalla superficie media (che giace sempre a distanza finita, a meno che la congruenza non consti di rette parallele, dal qual caso prescindiamo; cfr. pag. 415).

Sarà così $x_3 = 0$ la equazione della superficie media e dovrà aversi identicamente:

$$\frac{\partial}{\partial s_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

Siccome per definizione:

$$\frac{\partial}{\partial s_3} = \sum_1^3{}_r\, \lambda_3^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_r} = \lambda_3^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_3^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_3}\,,$$

ricaviamo:

$$\lambda_3^{(1)} = 0\,, \quad \lambda_3^{(2)} = 0\,, \quad \lambda_3^{(3)} = 1\,.$$

([15]) Questo si sarebbe potuto asserire a priori, ricordando il risultato di Ricci, secondo cui ogni congruenza [3], per la quale coincidono le radici della equazione algebrica caratteristica, si può in infiniti modi risguardare risultante dalle intersezioni di due sistemi ortogonali di superficie (cfr. loc. cit., pag. 44).

Introduciamo anche il sistema coordinato covariante $\lambda_{3|r}$ della congruenza [3]. Le equazioni (7) ci dicono che le $\lambda_h^{(r)}$ sono gli elementi reciproci alle $\lambda_{h|r}$ nel determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \lambda_{1|3} \\ \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \lambda_{2|3} \\ \lambda_{3|1} & \lambda_{3|2} & \lambda_{3|3} \end{vmatrix},$$

e le $a_{rs} = \sum_h^{3} {}_1 \lambda_{h|r}\lambda_{h|s}$ ci avvertono inoltre che il medesimo determinante vale $\sqrt{a}$.

Nel caso presente si ha:

$$\sqrt{a} = \begin{vmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ \lambda_{3|1} & \lambda_{3|2} & \lambda_{3|3} \end{vmatrix} = \lambda_{3|3} H_1 H_2 ,$$

$$\lambda_3^{(1)} = 0 , \qquad \lambda_3^{(2)} = 0 , \qquad \lambda_3^{(3)} = \frac{1}{\lambda_{3|3}} ,$$

ma d'altra parte, per la scelta fatta del sistema coordinato, $\lambda_3^{(3)} = 1$; dunque anche $\lambda_{3|3}$ risulta eguale all'unità e sono a ritenersi pei sistemi coordinati covarianti delle nostre congruenze ortogonali le espressioni seguenti:

$$\begin{cases} \lambda_{1|1} = H_1 , & \lambda_{1|2} = 0 , & \lambda_{1|3} = 0 , \\ \lambda_{2|1} = 0 , & \lambda_{2|2} = H_2 , & \lambda_{2|3} = 0 , \\ \lambda_{3|1} , & \lambda_{3|2} , & \lambda_{3|3} = 1 . \end{cases}$$

Rimangono le quattro indeterminate H_1, H_2, $\lambda_{3|1}$, $\lambda_{3|2}$, i cui valori sono a ricavarsi dalle (C), sostituendovi per le p, q, r le loro espressioni in termini delle λ. Si hanno tali espressioni nelle formule generali (8):

$$\gamma_{hkl} = \sum_{rs}^{3} {}_1 \lambda_{h|rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} ;$$

riesce per altro più comodo sostituirle con queste loro combinazioni:

$$\gamma_{hk+1k+2} - \gamma_{hk+2k+1} = \sum_{rs}^{3} {}_1 \lambda_{h|rs} (\lambda_{k+1}^{(r)} \lambda_{k+2}^{(s)} - \lambda_{k+2}^{(r)} \lambda_{k+1}^{(s)}) ,$$

dove, come di solito, si risguardano equivalenti gli indici, congrui tra loro rispetto al modulo 3.

La sommatoria del secondo membro, osservando che il fattore $\lambda^{(r)}_{k+1}\lambda^{(s)}_{k+2} - \lambda^{(r)}_{k+2}\lambda^{(s)}_{k+1}$ si annulla per $r = s$ e cambia di segno quando si scambia r con s, può essere scritta:

$$\sum_1^3{}_r \, (\lambda_{h|r+1\,r+2} - \lambda_{h|r+2\,r+1})(\lambda^{(r)}_{k+1}\lambda^{(s)}_{k+2} - \lambda^{(r)}_{k+2}\lambda^{(s)}_{k+1}) \, .$$

Ma, per definizione di derivata covariante:

$$\lambda_{h|r+1\,r+2} = \frac{\partial \lambda_{h|r+1}}{\partial x_{r+2}} - \sum_1^3{}_p \, a_{r+1\,r+2,p}\lambda^{(p)}_h \, ,$$

$$\lambda_{h|r+2\,r+1} = \frac{\partial \lambda_{h|r+2}}{\partial x_{r+1}} - \sum_1^3{}_p \, a_{r+2\,r+1,p}\lambda^{(p)}_h \, ,$$

quindi:

$$\lambda_{h|r+1\,r+2} - \lambda_{h|r+2\,r+1} = \frac{\partial \lambda_{h|r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h|r+2}}{\partial x_{r+1}} \, ,$$

e, per la nota proprietà dei determinanti reciproci:

$$\frac{\lambda^{(r+1)}_{k+1}\lambda^{(r+2)}_{k+2} - \lambda^{(r+1)}_{k+2}\lambda^{(r+2)}_{k+1}}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \lambda_{k|r} \, ,$$

onde risulta:

$$\text{(18)} \qquad \gamma_{hk+1\,k+2} - \gamma_{hk+2\,k+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \left\{ \frac{\partial \lambda_{h|r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h|r+2}}{\partial x_{r+1}} \right\} \lambda_{k|r} \, , \qquad (h, k = 1, 2, 3),$$

le quali si prestano assai bene al calcolo effettivo delle p, q, r e dànno intanto identicamente (come si poteva prevedere):

$$\gamma_{123} - \gamma_{132} = q_2 + r_3 = 0 \, ,$$

$$\gamma_{231} - \gamma_{213} = r_3 + p_1 = 0 \, .$$

Senza scrivere tutti i valori delle p, q, r e poi semplificarli a norma delle (C), procediamo alla spicciolata in modo da usufruire di ogni semplificazione nei calcoli successivi.

Facciamo nelle (18) $h = 3$, $k = 1$, e $h = 3$, $k = 2$. Si ricava:

$$\gamma_{323} = -p_3 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_3},$$

$$\gamma_{313} = q_3 = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_3};$$

ma si hanno le equazioni $p_3 = 0$, $q_3 = 0$, dunque $\lambda_{3|1}$, $\lambda_{3|2}$ *sono funzioni soltanto di* x_1, x_2.

Prendiamo ora $h = 2$, $k = 1$, e $h = 1$, $k = 2$,; avremo:

$$-\gamma_{232} = -p_2 = \frac{\partial \log H_2}{\partial x_3},$$

$$\gamma_{131} = -q_1 = -\frac{\partial \log H_1}{\partial x_3},$$

e, in causa della equazione $p_2 + q_1 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\log \frac{H_2}{H_1}\right) = 0,$$

cioè il rapporto H_2/H_1 è funzione soltanto di x_1, x_2. Dato questo, è facile vedere che si può addirittura supporre $H_1 = H_2$.

E per verità, circa le superficie $x_1 =$ cost., s'è richiesto finora soltanto che sieno rigate della congruenza [3]; in base alle (14), s'è poi constatata la esistenza della famiglia di rigate ortogonali $x_2 =$ cost. Per individuare queste due famiglie in modo che risulti $H_1 = H_2$, procediamo come segue. Immaginiamo da principio una famiglia affatto generica $x'_1 =$ cost. di rigate della [3] e la famiglia ortogonale associata $x'_2 =$ cost. Sieno [1'], [2'] le corrispondenti congruenze, $\lambda'_{1|r} = \varepsilon_{1r} H'_1$, $\lambda'_{2|r} = \varepsilon_{2r} H'_2$ gli elementi dei loro sistemi coordinati covarianti, relativi, si intende, alle variabili x'_1, x'_2, $x'_3 = x_3$.

Consideriamo poi l'invariante:

$$\sum_{1}^{3}{}_{rs} (\lambda'_{1|r}\lambda'_{1|s} + \lambda'_{2|r}\lambda'_{2|s})\, dx'_r\, dx'_s = H_1'^2\, dx_1'^2 + H_2'^2\, dx_2'^2$$

e operiamo una trasformazione di variabili:

$$\begin{cases} x'_1 = x'_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = x'_2(x_1, x_2) \\ x'_3 = x_3, \end{cases}$$

mediante cui la forma $dx_1'^2 + (H_2'/H_1')^2\, dx_2'^2$ (che dipende, per quanto s'è visto, dalle sole variabili x_1', x_2') risulti riferita a parametri isometrici. Potremo allora porre:

$$H_1'^2\, dx_1'^2 + H_2'^2\, dx_2'^2 = H^2(dx_1^2 + dx_2^2)\,,$$

con H funzione di x_1, x_2, x_3.

Riferendoci a queste nuove variabili x_1, x_2, x_3, rappresentiamo con $\overline{\lambda}'_{1|r}$, $\overline{\lambda}'_{2|r}$ i sistemi coordinati covarianti di [1'], [2'], con $\lambda_{1|r} = \varepsilon_{1r} H_1$, $\lambda_{2|r} = \varepsilon_{2r} H_2$ quelli delle congruenze [1], [2] (traiettorie ortogonali delle superficie $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost., che, come le $x_1' =$ cost., $x_2' =$ cost., sono rigate di [3]).

È chiaro che, per ogni punto dello spazio, si passa dalle $\overline{\lambda}'_{1|r}$, $\overline{\lambda}'_{2|r}$ alle $\lambda_{1|r}$, $\lambda_{2|r}$ mediante una trasformazione ortogonale del tipo:

$$\overline{\lambda}'_{1|r} = \cos\vartheta\, \lambda_{1|r} + \operatorname{sen}\vartheta\, \lambda_{2|r}\,,$$
$$\overline{\lambda}'_{2|r} = -\operatorname{sen}\vartheta\, \lambda_{1|r} + \cos\vartheta\, \lambda_{2|r}\,,$$

ϑ essendo l'angolo, che formano tra loro, in quel punto, le direzioni positive delle linee di [1] e [1'].

Di qui risulta:

$$\sum_1^3{}_{rs} (\lambda'_{1|r}\lambda'_{1|s} + \lambda'_{2|r}\lambda'_{2|s})\, dx'_r\, dx'_s = \sum_1^3{}_{rs} (\overline{\lambda}'_{1|r}\overline{\lambda}'_{1|s} + \overline{\lambda}'_{2|r}\overline{\lambda}'_{2|s})\, dx_r\, dx_s$$
$$= \sum_1^3{}_{rs} (\lambda_{1|r}\lambda_{1|s} + \lambda_{2|r}\lambda_{2|s})\, dx_r\, dx_s = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2\,.$$

Ma, per il modo, onde vennero scelte le variabili x_1, x_2:

$$\sum_1^3{}_{rs} (\lambda'_{1|r}\lambda'_{1|s} + \lambda'_{2|r}\lambda'_{2|s})\, dx'_r\, dx'_s = H_1'^2\, dx_1'^2 + H_2'^2\, dx_2'^2 = H^2(dx_1^2 + dx_2^2)\,,$$

talchè:

$$H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 = H^2(dx_1^2 + dx_2^2)$$

e per conseguenza:

$$H_1 = H_2 = H\,,$$

come si voleva dimostrare.

Ritenuto ormai $H_1 = H_2 = H$ e $\lambda_{1|3}$, $\lambda_{2|3}$ indipendenti da x_3, abbiamo, per le

$$\lambda_{h|r}\,,\quad \sqrt{a}\,,\quad \lambda_h^{(r)}\,,\quad a_{rs} = \sum_1^3{}_h\, \lambda_{h|r}\lambda_{h|s}\,,\quad a^{(rs)} = \sum_1^3{}_h\, \lambda_h^{(r)}\lambda_h^{(s)}\,,\quad \frac{\partial}{\partial s_h} = \sum_1^3{}_h\, \lambda_h^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_r}\,,$$

la seguente tabella di valori:

$$\begin{cases} \lambda_{1|1} = H\,, & \lambda_{1|2} = 0\,, & \lambda_{1|3} = 0\,, \\ \lambda_{2|1} = 0\,, & \lambda_{2|2} = H\,, & \lambda_{2|3} = 0\,, \\ \lambda_{3|1}\,, & \lambda_{3|2}\,, & \lambda_{3|3} = 1\,; \end{cases}$$

$$\sqrt{a} = H^2\,;$$

$$\begin{cases} \lambda_1^{(1)} = \dfrac{1}{H}\,, & \lambda_1^{(2)} = 0\,, & \lambda_1^{(3)} = -\dfrac{\lambda_{3|1}}{H}\,, \\ \lambda_2^{(1)} = 0\,, & \lambda_2^{(2)} = \dfrac{1}{H}\,, & \lambda_2^{(3)} = -\dfrac{\lambda_{3|2}}{H}\,, \\ \lambda_3^{(1)} = 0\,, & \lambda_3^{(2)} = 0\,, & \lambda_3^{(3)} = 1\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = H^2 + \lambda_{3|1}^2\,, & a_{22} = H^2 + \lambda_{3|2}^2\,, & a_{33} = 1\,, \\ a_{23} = \lambda_{3|2}\,, & a_{31} = \lambda_{3|1}\,, & a_{12} = \lambda_{3|1}\lambda_{3|2}\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{(11)} = \dfrac{1}{H^2}\,, & a^{(22)} = \dfrac{1}{H^2}\,, & a^{(33)} = 1 + \dfrac{\lambda^2{}_{3|1} + \lambda^2{}_{3|2}}{H^2}\,, \\ a^{(23)} = \dfrac{-\lambda_{3|2}}{H^2}\,, & a^{(31)} = \dfrac{-\lambda_{3|1}}{H^2}\,, & a^{(12)} = 0\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_1} = \dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_{3|1}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial s_2} = \dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_{3|2}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial s_3} = \dfrac{\partial}{\partial x_3}\,. \end{cases}$$

Dopo ciò, le (18) si riducono a:

$$(18') \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 &= \frac{\partial \log H}{\partial x_3}, \\ 2q_2 &= \frac{1}{H^2}\left\{ \frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1} \right\}, \\ r_1 &= -\frac{1}{H}\left\{ \frac{\partial \log H}{\partial x_2} - \lambda_{3|2} \frac{\partial \log H}{\partial x_3} \right\} = -\frac{\partial \log H}{\partial s_2}, \\ r_2 &= \frac{1}{H}\left\{ \frac{\partial \log H}{d x_1} - \lambda_{3|1} \frac{\partial \log H}{\partial x_3} \right\} = \frac{\partial \log H}{\partial s_1}; \end{aligned} \right.$$

e noi dobbiamo integrare il sistema (15), (16), (17) con questi valori per q_1, q_2, r_1, r_2 e colle espressioni, testè assegnate pei simboli $\partial/\partial s_1$, $\partial/\partial s_2$, $\partial/\partial s_3$.

Supporrò addirittura q_2 diverso da zero, cioè la congruenza [3] non normale. Il caso opposto avremo occasione di considerarlo a § 8; esso comprende soltanto le stelle di raggi (eventualmente col centro a distanza infinita).

Per la prima delle (15), sarà anche q_1 essenzialmente diverso da zero, poichè q_1 non può annullarsi, senza che lo stesso avvenga per q_2.

Sostituendo a q_1 e q_2 i loro valori (18′), la seconda delle (15) si trova identicamente soddisfatta e la prima diviene:

$$\frac{\partial^2 \log H}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{4H^4}\left\{ \frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1} \right\}^2,$$

che si può scrivere:

$$2H^2 \frac{\partial^2 H^2}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial H^2}{\partial x_3}\right)^2 = \left\{ \frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1} \right\}^2$$

e, derivata rispetto ad x_3, porge:

$$\frac{\partial^3 H^2}{\partial x_3^3} = 0,$$

donde apparisce che H^2 è un polinomio di secondo grado in x_3.

Ricordiamo che si è convenuto di contare le x_3 a partire dalla superficie media. Per un teorema noto ([16]), dovranno essere applicabili due

([16]) Bianchi, *Lezioni, ecc.*, pag. 250.

superficie del sistema $x_3 = \text{cost.}$, che corrispondono a valori opposti di x_3.

Questo esige, come si vede subito, che manchi in H^2 il termine di primo grado rapporto ad x_3. D'altra parte H^2 dipende effettivamente da x_3 (senza di che si annullerebbero q_1 e q_2) ed ha valore essenzialmente positivo. Siamo così autorizzati a porre H^2 sotto la forma:

$$H^2 = e^\alpha(x_3^2 + \beta^2),$$

con α e β funzioni reali di x_1, x_2.

La precedente equazione:

$$2H^2 \frac{\partial^2 H^2}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial H^2}{\partial x_3}\right)^2 = \left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}^2$$

dà:

$$4e^{2\alpha}\beta^2 = \left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}^2,$$

ossia, estraendo la radice e fissando in modo conveniente il segno di β:

$$(15') \qquad 2e^\alpha\beta = \frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}.$$

Ne viene:

$$(18'') \qquad \left\{\begin{aligned} q_1 &= \frac{\partial \log H}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log H^2}{\partial x_3} = \frac{x_3}{x_3^2 + \beta^2}, \\ q_2 &= \frac{1}{2H^2}\left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\} = \frac{\beta}{x_3^2 + \beta^2}. \end{aligned}\right.$$

Passando alle (16), si ha (con trasformazione certamente legittima, poichè, nella ipotesi qui considerata, q_1, q_2 e β non sono nulli):

$$\begin{aligned} &\beta x_3\left\{\frac{H}{q_2}\frac{\partial \log q_1}{\partial s_1} + \frac{H}{q_1}\frac{\partial \log q_2}{\partial s_2}\right\} \\ &= x_3(x_3^2 + \beta^2)\left\{-\frac{\partial \log(x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_1} - \frac{\lambda_{3|1}}{x_3} + \lambda_{3|1}\frac{\partial \log(x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3}\right\} \\ &+ \beta(x_3^2 + \beta^2)\left\{\frac{\partial \log \beta}{\partial x_2} - \frac{\partial \log(x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3} + \lambda_{3|2}\frac{\partial \log(x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3}\right\} \\ &= -2x_3\beta\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - (x_3^2 + \beta^2)\lambda_{3|1} + 2x_3^2\lambda_{3|1} + (x_3^2 + \beta^2)\frac{\partial \beta}{\partial x_2} - 2\beta^2\frac{\partial \beta}{\partial x_2} + 2x_3\beta\lambda_{3|2} \\ &= x_3^2\left(\lambda_{3|1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right) + 2\beta x_3\left(\lambda_{3|2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right) - \beta^2\left(\lambda_{3|1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\beta x_3 \left\{ \frac{H}{q_2} \frac{\partial \log q_1}{ds_1} - \frac{H}{q_1} \frac{\partial \log q_2}{\partial s_1} \right\}$$

$$= x_3 (x_3^2 + \beta^2) \left\{ - \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_2} - \frac{\lambda_{3|2}}{x_3} + \lambda_{3|2} \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3} \right\}$$

$$- \beta (x_3^2 + \beta^2) \left\{ \frac{\partial \log \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_1} + \lambda_{3|1} \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3} \right\}$$

$$= - 2 x_3 \beta \frac{\partial \beta}{\partial x_2} - (x_3^2 + \beta^2) \lambda_{3|2} + 2 x_3^2 \lambda_{3|2} - (x_3^2 + \beta^2) \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + 2 \beta^2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} - 2 x_3 \beta \lambda_{3|1}$$

$$= x_3^2 \left(\lambda_{3|2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) - 2 \beta x_3 \left(\lambda_{3|1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right) - \beta^2 \left(\lambda_{3|2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) = 0 ,$$

le quali equivalgono a:

$$(16') \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{3|1} &= - \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \\ \lambda_{3|2} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_1} . \end{aligned} \right.$$

A sua volta la (15′) diviene:

$$(15'') \qquad \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = - 2 e^{\alpha} \beta .$$

Delle (17) le prime due sono identicamente soddisfatte, come si verifica in modo ovvio; rimane da considerare l'ultima:

$$\frac{\partial r_1}{\partial s_2} - \frac{\partial r_2}{\partial s_1} = r_1^2 + r_2^2 + q_1^2 + 3 q_2^2 ,$$

che, sostituiti per r_1, r_2 i loro valori, può essere scritta:

$$\frac{\partial^2 \log H}{ds_1^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_2^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_2} \right)^2 + q_1^2 + 3 q_2^2 = 0 ,$$

od anche, notando che:

$$\frac{\partial^2 \log H}{\partial s_3^2} = \frac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2 ,$$

$$(17') \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_3^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_2} \right)^2 + 2 q_1^2 + 2 q_2^2 = 0 .$$

Il primo membro si calcola nel modo più comodo, ricorrendo al parametro differenziale di secondo ordine, relativo alla nostra forma fondamentale, che è (si cfr. la precedente tabella e si tengano presenti le (16')):

$$
\begin{aligned}
(19) \qquad \underset{2}{\Delta} u = \frac{1}{H^2}\Bigg[& \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\} \\
& +\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\left(H^2+\left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Dalla identità:

$$u_p = \sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h}\, \lambda_{h|p}$$

si trae per derivazione covariante:

$$u_{pq} = \sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h}\, \lambda_{h|pq} + \sum_1^3{}_h \left(\frac{\partial u}{\partial s_h}\right)_q \lambda_{h|p}\,.$$

Applicando a $(\partial u/\partial s_h)_q$ la medesima identità, e sostituendo a $\lambda_{h|pq}$ il suo valore

$$\sum_1^3{}_{ij}\, \gamma_{hij}\lambda_{i|p}\lambda_{j|q}\,,$$

risulta:

$$u_{pq} = \sum_1^3{}_{hij} \frac{\partial u}{\partial s_h}\, \gamma_{hij}\lambda_{i|p}\lambda_{j|q} + \sum_1^3{}_{hk} \frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial u}{\partial s_h}\, \lambda_{h|p}\lambda_{k|q}\,,$$

e di qua:

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\Delta} u = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)} u_{pq} &= \sum_1^3{}_{hij} \frac{\partial u}{\partial s_h}\, \gamma_{hij}\varepsilon_{ij} + \sum_1^3{}_{hk} \frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial u}{\partial s_h}\, \varepsilon_{hk} \\
&= \sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h} \sum_1^3{}_i\, \gamma_{hii} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_3^2}\,.
\end{aligned}
$$

Siccome:

$$
\begin{aligned}
\sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h} \sum_1^3{}_i\, \gamma_{hii} &= \frac{\partial u}{\partial s_1}(\gamma_{122}+\gamma_{133}) + \frac{\partial u}{\partial s_2}(\gamma_{233}+\gamma_{211}) + \frac{\partial u}{\partial s_3}(\gamma_{311}+\gamma_{322}) \\
&= r_2\frac{\partial u}{\partial s_1} - r_1\frac{\partial u}{\partial s_2} + 2q_1\frac{\partial u}{\partial s_3}\,,
\end{aligned}
$$

prendendo $u = \log H$ e osservando le (18′), otterremo:

$$\underset{2}{\Delta} \log H = \frac{1}{2} \underset{2}{\Delta} \log H^2$$

$$= \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_3^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_2}\right)^2 + 2q_1^2 .$$

Il confronto colle (17′) e l'impiego delle (18″) conduce immediatamente alla:

$$(17'') \qquad H^2 \underset{2}{\Delta} \log H^2 + 4q_2^2 H^2 = H^2 \underset{2}{\Delta} \log H^2 + \frac{4\beta^2 e^\alpha}{x_3^2 + \beta^2} = 0 ,$$

che sviluppata ci dà:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + 2\,\frac{\beta \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1} + x_3 \dfrac{\partial \beta}{\partial x_2}}{x_3^2 + \beta^2}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + 2\,\frac{\beta \dfrac{\partial \beta}{\partial x_2} - x_3 \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1}}{x_3^2 + \beta^2}\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + 2e^\alpha x_3 + 2x_3\,\frac{\left(\dfrac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2}{x_3^2 + \beta^2}\right\} + \frac{4\beta^2 e^\alpha}{x_3^2 + \beta^2}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} + 2e^\alpha\right\} + \frac{2\beta\left\{\dfrac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2e^\alpha \beta\right\}}{x_3^2 + \beta^2} = 0 ,$$

ossia, per la (15′):

$$(17''') \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} = -\,2e^\alpha .$$

Il nostro calcolo è ora compiuto. Da esso risulta che, *per ogni congruenza isotrópa (non normale), un'opportuna scelta del sistema di riferimento permette di attribuire al quadrato dell'elemento lineare dello spazio la forma*:

$$(20) \qquad ds^2 = \left\{H^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1^2 + \left\{H^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2\right\} dx_2^2 + dx_3^2$$

$$+ 2\,\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\, dx_2\, dx_3 - 2\,\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\, dx_3\, dx_1 - 2\,\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\, dx_1\, dx_2 ,$$

dove:

(21) $$H^2 = e^\alpha(x_3^2 + \beta^2)$$

e α, β *sono funzioni delle sole variabili* x_1, x_2, *che soddisfano rispettivamente alle equazioni*:

(22) $$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_3^2} = -2e^\alpha \quad (^{17}),$$

(23) $$\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2} = -2e^\alpha\beta .$$

Reciprocamente ogni elemento lineare (20), *per cui* H, α e β *si comportino nel modo detto, appartiene all'ordinario spazio euclideo e le linee* $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost., *costituiscono una congruenza rettilinea isotrópa.*

Quale la conseguenza nei riguardi della teoria del potenziale?

Questa semplicemente che *le congruenze rettilinee isotrópe* [18] *sono equipotenziali, e le equazioni di definizione dei corrispondenti potenziali binari si riducono in ogni caso* (come segue dalla (19), supponendovi u *indipendente da* x_3) *alla forma di Laplace*:

$$\Theta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (^{19}).$$

[17] Si può osservare che l'equazione 22) esprime che l'elemento lineare $e^\alpha(dx_1^2 + dx_2^2)$ appartiene alla sfera di raggio 1. Nulla di più naturale, poichè, se si assume la superficie media $x_3 = 0$ a superficie di partenza e si forma l'elemento lineare, spettante all'immagine sferica della congruenza $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$, si trova precisamente $e^\alpha(dx_1^2 + dx_2^2)$.

[18] Non escludiamo le congruenze normali, poichè anche per queste sussiste la medesima proprietà, come risulta dai §§ 8 e 9.

[19] Si può facilmente riconoscere che l'insieme di tutti i potenziali isotrópi coincide in sostanza con quello, definito da Jacobi, a mezzo delle equazioni:

(A) $$\underset{2}{\Delta} V = 0 , \qquad (\underset{1}{\Delta} V)^2 = 0 .$$

In primo luogo, posto:

(B) $$V = x_1 + i x_2 ,$$

si ha, scindendo la parte reale dalla immaginaria:

(A′) $$\underset{2}{\Delta} x_1 = 0 , \qquad \underset{2}{\Delta} x_2 = 0 ,$$

(A″) $$\underset{1}{\Delta} x_1 = \underset{1}{\Delta} x_2 , \qquad \nabla(x_1, x_2) = 0 ,$$

talchè, nel campo reale, i potenziali di cui si tratta, sono tutte e soltanto le soluzioni del sistema (A′), (A″).

Si noti ora con Jacobi che, assieme a V, anche una qualunque funzione $F(V)$ (della sola V) è integrale delle (A). Perciò la parte reale $u(x_1, x_2)$ di $F(V)$ è ancora un potenziale della cate-

6. - Equazioni intrinseche delle congruenze equipotenziali.

Le equazioni (5) e (6), che definiscono le congruenze equipotenziali, conservano, come è chiaro a priori, la medesima forma, quando le incognite ξ_r si moltiplicano per un medesimo fattore.

Designamolo con e^ν e poniamo:

$$\xi_r = e^{-\nu}\bar{\xi}_r \; ;$$

sarà:

$$\xi_{rs} = e^{-\nu}\{\bar{\xi}_{rs} - \nu_s\bar{\xi}_r\} \, ,$$

$$\xi_{rpq} = e^{-\nu}\{\bar{\xi}_{rpq} - \nu_q\bar{\xi}_{rp} - \nu_p\bar{\xi}_{rq} - (\nu_{pq} - \nu_p\nu_q)\bar{\xi}_r\} \, ,$$

---

goria considerata. In altri termini, scelti una volta x_1, x_2 in modo da soddisfare alle (A'), (A''), la equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

definisce una sottoclasse di potenziali (della detta categoria). Essi sono manifestamente binari. Dobbiamo far vedere che sono isotrópi, cioè che ogni congruenza, costituita dalle intersezioni delle due famiglie di superficie:

$$x_1 = \text{cost.} \, , \qquad x_2 = \text{cost.} \, ,$$

è rettilinea ed isotrópa.

Designiamo una tale congruenza con [3] e completiamo la terna colle traiettorie ortogonali delle famiglie $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$ (le quali sono tra loro ortogonali, per la seconda delle (A'')).

Avremo, riferendoci ad un generico sistema di coordinate curvilinee ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{1|r} &= \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_r} \\ \lambda_{2|r} &= \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_r} \, , \end{aligned} \right. \qquad (r = 1, 2, 3)$$

le quali, avendo riguardo alla (B) e alla prima delle (A''), si possono compendiare in:

$$\lambda_{1|r} + i\lambda_{2|r} = \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} V_r \, .$$

Per derivazione, si trae:

$$\lambda_{1|rs} + i\lambda_{2|rs} = \left(\frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1}\right)_s V_r + \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} V_{rs} \, ,$$

donde, moltiplicando successivamente per $\lambda_3^{(r)}\lambda_3^{(s)}$, $\lambda_3^{(r)}(\lambda_1^{(s)} + i\lambda_2^{(s)})$, sommando rispetto ad r e e le (5) diverranno:

$$\bar{\xi}_{rs} + \bar{\xi}_{sr} = 2Me^{\nu}a_{rs} + (g_r + \nu_r)\bar{\xi}_s + (g_s + \nu_s)\bar{\xi}_r \,.$$

Le (6) con ovvie riduzioni si trasformano in:

$$\sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}\bar{\xi}_{rpq} = \left\{ N + \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}(\nu_{pq} - \nu_p\nu_q) - 2\sum_{1}^{3}{}_{s}\, g^{(s)}\nu_s \right\}\bar{\xi}_r + 2\sum_{1}^{3}{}_{s}\,(g^{(s)} + \nu^{(s)})\bar{\xi}_{rs} \,.$$

---

ad s e notando che $\sum_{1}^{3}{}_{r}\, V_r\lambda_3^{(r)} = 0$:

(C) $$\gamma_{133} + i\gamma_{233} = \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, V_{rs}\lambda_3^{(r)}\lambda_3^{(s)} \,,$$

(D) $$(\gamma_{131} - \gamma_{232}) + i(\gamma_{132} + \gamma_{231}) = \frac{1}{(\underset{1}{\Delta} x_1)^2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, V_{rs}\lambda_3^{(r)}V^{(s)} \,.$$

D'altra parte le (A) si scrivono:

$$\underset{2}{\Delta} V = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a^{(rs)}V_{rs} = \sum_{1}^{3}{}_{h}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, V_{rs}\lambda_h^{(r)}\lambda_h^{(s)} = 0 \,,$$

$$(\underset{1}{\Delta} V)^2 = \sum_{1}^{3}{}_{s}\, V_s V^{(s)} = 0 \,,$$

e la seconda, derivata, porge:

$$\sum_{1}^{3}{}_{s}\, V_{sr}\, V^{(s)} = \sum_{1}^{3}{}_{s}\, V_{rs}\, V^{(s)} = 0 \,.$$

Se noi la moltiplichiamo per $\frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1}(\lambda_1^{(r)} - i\lambda_2^{(r)})$, sostituiamo a $\frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1}V^{(s)}$ il suo valore $\lambda_1^{(s)} + i\lambda_2^{(s)}$, e sommiamo rispetto ad r, otteniamo:

$$\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, V_{rs}\,\lambda_1^{(r)}\lambda_1^{(s)} + \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, V_{rs}\lambda_2^{(r)}\lambda_2^{(s)} = 0 \,,$$

dopo di che la equazione $\underset{2}{\Delta} V = 0$, diviene:

$$\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, V_{rs}\,\lambda_3^{(r)}\lambda_3^{(s)} = 0 \,.$$

Il secondo membro della (C) è dunque identicamente nullo e per conseguenza:

(C′) $$\gamma_{133} = 0 \,, \qquad \gamma_{233} = 0 \,,$$

ossia la congruenza [3] è rettilinea.

Il secondo membro della (D) si annulla del pari, come si constata, moltiplicando la $\sum_{1}^{3}{}_{s}\, V_{rs}\, V^{(s)} = 0$ per $\lambda_3^{(r)}$ e sommando. Ne viene:

(D′) $$\gamma_{133} = \gamma_{233} \,, \qquad \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0 \,,$$

che è la condizione di isotropia. c. d. d.

Per ripassare materialmente alla forma primitiva, basta alle cinque indeterminate M, g_r, N, sostituirne altre cinque $\overline{M}$, $\bar{g}_r$, $\overline{N}$, definite da:

$$(24)\qquad \begin{cases} \overline{M} = Me^{\nu} \\ \bar{g}_r = g_r + \nu_r \\ \overline{N} = N + \sum_{pq}^{1\ldots 2} a^{(pq)}(\nu_{pq} - \nu_p\nu_q) - 2\sum_{s}^{1\ldots 3} g^{(s)}\nu_s . \end{cases}$$

Questa osservazione permette in particolare di sostituire alle ξ_r d'una congruenza [3], supposta equipotenziale, le $\lambda_{3|r}$. Basta intendere nelle (24)

$$e^{\nu} = \frac{1}{\left|\sqrt{\sum_{rs}^{1\ldots 3} a_{rs}\xi^{(r)}\xi^{(s)}}\right|} .$$

Riscrivendo M, g_r, N per $\overline{M}$, $\bar{g}_r$, $\overline{N}$, le equazioni sono:

$$(25)\qquad \lambda_{3|rs} + \lambda_{3|sr} = 2Ma_{rs} + g_r\lambda_{3|s} + g_s\lambda_{3|r}, \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

$$(26)\qquad \sum_{pq}^{1\ldots 3} a^{(pq)}\lambda_{3|rpq} = N\lambda_{3|r} + 2\sum_{s}^{1\ldots 3} g^{(s)}\lambda_{3|rs}, \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Si immagini ora di associare alla [3] le congruenze [1], [2], definite, come s'è detto, dalle direzioni delle normali principali e binormali.

Alle equazioni (25) equivalgono quelle, che se ne ricavano, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)}$ e sommando rispetto ai due indici r ed s. Del pari, moltiplicando le (26) per $\lambda_i^{(r)}$ e sommando rispetto ad r, si deduce un sistema equivalente.

Otteniamo così:

$$(25')\qquad \sum_{rs}^{1\ldots 3} \lambda_{3|rs}\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)} + \sum_{rs}^{1\ldots 3} \lambda_{3|sr}\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)} = 2M\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{3j}\sum_{r}^{1\ldots 3} g_r\lambda_i^{(r)} + \varepsilon_{3i}\sum_{s}^{1\ldots 3} g_s\lambda_j^{(s)},$$

$$(26')\qquad \sum_{pqr}^{1\ldots 3} a^{(pq)}\lambda_{3|rpq}\lambda_i^{(r)} = N\varepsilon_{3i} + 2\sum_{rs}^{1\ldots 3} g^{(s)}\lambda_{3|rs}\lambda^{(r)} .$$

Sostituendo alle g_r altre indeterminate $\omega_i = \sum_{r}^{1\ldots 3} g_r\lambda_i^{(r)}$ (donde $g_p = \sum_{i}^{1\ldots 3} \omega_i\lambda_{i|p}$) e ricordando le (8), le (25′) assumono la forma semplicissima:

$$(25'')\qquad \gamma_{3ij} + \gamma_{3ji} = 2M\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{3i}\omega_j + \varepsilon_{3j}\omega_i, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Quanto alle (26'), postovi a tenore delle (10),

$$\lambda_{3|rpq} = \sum_1^3{}_{hk} \gamma_{3hk|q}\lambda_{h|r}\lambda_{k|p} + \sum_1^3{}_{hkjl} \gamma_{3hk}\gamma_{hjl}\lambda_{j|r}\lambda_{l|q}\lambda_{k|p} + \sum_1^3{}_{hkjl} \gamma_{3hk}\gamma_{kjl}\lambda_{j|p}\lambda_{l|q}\lambda_{h|r} ,$$

si trova subito:

$$(26'') \quad \sum_1^3{}_k \frac{\partial \gamma_{3ik}}{\partial s_k} + \sum_1^3{}_{hk} (\gamma_{3hk}\gamma_{hik} + \gamma_{3ik}\gamma_{khh}) = \varepsilon_{3i}N + 2\sum_1^3{}_k \gamma_{3ik}\omega_k , \quad (i = 1, 2, 3).$$

Scriviamo per disteso le nove equazioni (25'') e (26''), introducendo le p, q, r al posto delle γ. Si ha:

$$(25''') \quad \begin{cases} q_1 = M , \\ -p_2 = M , \\ 0 = M + \omega_3 , \\ -p_3 = \omega_2 , \\ q_3 = \omega_1 , \\ p_1 - q_2 = 0 ; \end{cases}$$

$$(26''') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} + \dfrac{\partial q_3}{\partial s_3} + p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 + q_1(r_2 - q_3) + q_2(p_3 - r_1) + \\ \qquad + q_3(q_1 - p_2) = 2\{q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3\} , \\ -\dfrac{\partial p_1}{\partial s_1} - \dfrac{\partial p_2}{\partial s_2} - \dfrac{\partial p_3}{\partial s_3} + q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3 - p_1(r_2 - q_3) - p_2(p_3 - r_1) - \\ \qquad - p_3(q_1 - p_2) = -2\{p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3\} , \\ -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = N . \end{cases}$$

Cinque di queste equazioni servono in sostanza a definire M, N, ω_1, ω_2, ω_3; da quelle possiamo prescindere. Il primo gruppo ci dice così soltanto che $p_2 = -q_1$ e $p_1 = q_2$. L'ultima delle (26''') determina N; le prime due, avuto riguardo alle (13) e ai valori, testè trovati per p_1, p_2, ω_1, ω_2, ω_3, assumono l'aspetto

$$(26^{\text{IV}}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} + \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_3} = -\varrho q_1 , \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial q_2}{\partial s_1} = \varrho(\tau - 3q_2) . \end{cases}$$

Oltre a queste si hanno naturalmente le equazioni fondamentali (11_a), (11_b), (11_c).

Le (11_a), ponendovi $p_1 = q_2$, $p_2 = -q_1$, $p_3 = 0$, $q_3 = \varrho$, $r_3 = -\tau$, divengono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2 + \varrho r_2 \,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_2}{\partial s_3} = -2q_1 q_2 - \varrho r_1 \,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_1} = 0 \,. \end{cases}$$

In modo analogo, tenendo anche conto delle espressioni qui risultate per $\partial q_1/\partial s_3$, $\partial q_2/\partial s_3$, le (11_b) dànno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_2} = -\varrho r_1 \,, \\[2ex] \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_1} = \varrho(\varrho + r_2) \,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial q_2}{\partial s_1} = -2\varrho q_2 \,, \end{cases}$$

e le (11_c):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_2} = -q_1(\varrho + r_2) + r_1(\tau - q_2) \,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_3} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_1} = -q_1 r_1 - r_2(\tau - q_2) + \varrho(\tau + \varrho_2) \,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial r_2}{\partial s_1} = q_1^2 + q_2^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2q_2\tau \,. \end{cases}$$

In causa delle equazioni:

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = 0 \,, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial s_2} - \frac{\partial q_2}{\partial s_1} = -2\varrho q_2 \,,$$

le (26^{IV}) si riducono a:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s_3} = -\varrho q_1 \,, \qquad \varrho(\tau - q_2) = 0 \,.$$

Dopo ciò il sistema di equazioni intrinseche, che caratterizza le congruenze equipotenziali, potrà essere scritto:

$$
(\mathrm{E})\left\{
\begin{array}{ll}
(27) & \varrho(\tau - q_2) = 0\,; \\[2ex]
(28) & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_1} = \varrho(\varrho + r_2)\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_2} = -\,\varrho r_1\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_3} = -\,\varrho q_1\,; \end{array} \right. \\[8ex]
(29) & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2 + \varrho r_2\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_2}{\partial s_3} = -\,2 q_1 q_2 - \varrho r_1\,; \end{array} \right. \\[5ex]
(30) & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial q_2}{\partial s_1} = -\,2\varrho q_2\,; \end{array} \right. \\[5ex]
(31) & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_2} = -\,q_1(\varrho + r_2) + r_1(\tau - q_2)\,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_3} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_1} = -\,q_1 r_1 - r_2(\tau - q_2) + \varrho(\tau + q_2)\,; \end{array} \right. \\[5ex]
(32) & \dfrac{\partial r_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial r_2}{\partial s_1} = q_1^2 + q_2^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2 q_2 \tau\,; \\[2ex]
(33) & p_1 = q_2\,,\ \ p_2 = -\,q_1\,,\ \ p_3 = 0\,,\ \ q_3 = \varrho\,,\ \ r_3 = -\,\tau\,.
\end{array}
\right.
$$

In queste formule — giova richiamarlo — si intende che la [3] sia la congruenza equipotenziale, [1], [2] quelle definite dalle direzioni delle normali principali e binormali.

7. - Equazioni intrinseche delle congruenze costituite dalle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini.

Le trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 delle similitudini sono definite dalle equazioni (2), (3) del § 1. Una congruenza $\lambda_{3|r}$ consterà delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini, quando, posto:

$$\xi_r = e^{-v} \lambda_{3|r}\,, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{34}$$

le ξ_r riescano, per una opportuna scelta del moltiplicatore $e^{-}{}_{\nu}$, integrali delle equazioni (2), (3). Queste in coordinate generali si scrivono:

$$\xi_{rs} + \xi_{sr} = 2Ma_{rs} ,$$

$$\sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}\xi_{rpq} = 0$$

e provengono, come già sappiamo, dalle (5), (6) col farvi $N = 0$, $g_r = 0$.

Per quanto s'è visto nel § antecedente, la sostituzione alle ξ_r dei valori (34) conduce a equazioni della stessa forma nelle $\lambda_{3|r}$. Le nuove $\overline{M}$, $\overline{g}_r$ ed $\overline{N}$ saranno ordinatamente, a tenore delle (24):

$$\overline{M} = Me^{\nu} ,$$

$$\overline{g}_r = \nu_r ,$$

$$\overline{N} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}(\nu_{pq} - \nu_p\nu_q) = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}(\overline{g}_{pq} - \overline{g}_p\overline{g}_q) .$$

Se si bada che M e ν sono a priori indeterminate, si può tosto concludere che le $\lambda_{3|r}$ debbono verificare le equazioni (25), (26) delle congruenze equipotenziali, *con questo in più che le g_r hanno ad essere le derivate di una medesima funzione ed* $N = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, {}^{(pq)}(g_{pq} - g_p g_q)$.

Le equazioni intrinseche delle traiettorie, corrispondenti ai sottogruppi ∞^1 di G_7, risultano così delle (E) e di quelle, che esprimono le ulteriori condizioni, testè accennate. Per ricavarle effettivamente, notiamo in primo luogo che, dall'essere le g_r derivate di una medesima funzione rapporto alle variabili x_r, segue che le $\omega_i = \sum_{1}^{3}{}_r\, g_r\lambda_i^{(r)}$ sono le derivate della stessa funzione rapporto agli archi s_i.

Ciò si esprime, come si è visto, mediante le formule (12'). Per applicarle al caso nostro, basterà sostituire, al posto delle $\partial f/\partial s_i$, ω_1, ω_2, ω_3 e aver riguardo alle (33).

Essendo, per le (25'''), $\omega_1 = q_3 = \varrho$, $\omega_2 = p_3 = 0$, $\omega_3 = -M = -q_1$, viene:

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_2} = \varrho(\tau - q_2) ,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \varrho}{\partial s_3} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s_2} = \varrho r_1 + 2q_1q_2 .$$

In causa della (27) e della seconda e terza delle (28), queste equazioni si possono scrivere:

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} = \varrho q_1 \,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0 \,; \end{cases}$$

$$(36)\qquad q_1 q_2 + \varrho r_1 = 0 \,.$$

Rimane da tradurre in formule intrinseche l'altra condizione

$$N = \sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)}(g_{pq} - g_p g_q).$$

Sostituiamovi per le g i loro valori in termini delle ω. Da $g_p = \sum_i{}_1^3 \omega_i \lambda_{i|p}$ segue:

$$\sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)} g_p g_q = \sum_i{}_1^3 \omega_i^2 \,,$$

$$g_{pq} = \sum_i{}_1^3 \omega_{i|q}\, \lambda_{i|p} + \sum_i{}_1^3 \omega_i \lambda_{i|pq} \,,$$

e, per le (8′):

$$g_{pq} = \sum_i{}_1^3 \omega_{i|q} \lambda_{i|p} + \sum_{ihk}{}_s^3 \omega_i \gamma_{ihk} \lambda_{h|p} \lambda_{k|q} \,,$$

che, moltiplicate per $a^{(pq)}$ e sommate, dànno:

$$\sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)} g_{pq} = \sum_i{}_1^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial s_i} + \sum_{ih}{}_1^3 \omega_i \gamma_{ihh} \,,$$

quindi:

$$N = \sum_i{}_1^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial s_i} + \sum_{ih}{}_1^3 \omega_i \gamma_{ihh} - \sum_i{}_1^3 \omega_i^2 \,.$$

Posti per le ω e γ i loro valori, risulta subito:

$$N = \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - \frac{\partial q_1}{\partial s_3} + \varrho(r_2 - \varrho) - 3q_1^2 - \varrho^2 \,,$$

od anche, per la prima delle (28) e la prima delle (29):

$$N = -(2q_1^2 + q_2^2 + \varrho^2) + \varrho r_2 \,.$$

Ma, in causa delle $(26''')$, N vale $-(2q_1^2 + 2q_2^2 + \varrho^2)$, talchè dev'essere:

$$q_2^2 + \varrho r_2 = 0 . \tag{37}$$

Riassumendo, affinchè una congruenza [3] risulti delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini, è necessario e basta che, oltre alle equazioni (E), sieno soddisfatte le:

$$(\mathrm{E}_1) \quad \left| \begin{array}{ll} (35) & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} = \varrho q_1 , \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0 ; \end{array} \right. \\[4ex] (36) & q_1 q_2 + \varrho r_1 = 0 ; \\[1ex] (37) & q_2^2 + \varrho r_2 = 0 . \end{array} \right.$$

8. - Condizioni di integrabilità del sistema (E).

Conseguente limitazione dei potenziali binari.

Per stabilire le condizioni di integrabilità del sistema (E), gioverà distinguere i due casi $\varrho = 0$ e ϱ non identicamente nullo.

Cominciamo dal primo. Si tratta di una congruenza rettilinea, quindi (§ 4) potremo assumere $r_3 = -\tau = -q_2$. Le (27) e (28) sono soddisfatte identicamente, le (29), (30), (31) e (32), (33), postovi $\varrho = 0$, $\tau = q_2$, coincidono colle (15), (16), (17), (14′) del § 5 e costituiscono, come s'è visto, un sistema completo.

Per q_2 diverso da zero, questo sistema definisce le congruenze rettilinee isotrópe non normali, di cui già con calcolo diretto abbiamo constatata la equipotenzialità.

La ipotesi $q_2 = 0$ corrisponde poi a congruenze rettilinee (isotrópe e normali), traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini, cioè stelle di raggi (eventualmente col centro a distanza infinita).

Infatti le (30) si riducono allora a:

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} = 0 , \qquad \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0 ,$$

e un semplice sguardo alle equazioni (E_1) (dove è a ritenersi $\varrho = 0$, $q_2 = 0$) mostra che esse riescono identicamente soddisfatte.

Veniamo al caso generale, in cui sia ϱ non identicamente nullo.

La (27) dà $\tau = q_2$ e le (28) si possono scrivere:

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial s_1} = \varrho + r_2 ,$$

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial s_2} = - r_1 ,$$

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial s_3} = - q_1 .$$

Le (12′), per essere $q_2 + r_3 = q_2 - \tau = 0$, divengono nel caso presente:

$$(12'') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s_3}\frac{\partial}{\partial s_2} f - \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_3} f = \qquad - q_1 \frac{\partial f}{\partial s_2} , \\ &\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_3} f - \frac{\partial}{\partial s_3}\frac{\partial}{\partial s_1} f = q_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} \qquad + \varrho \frac{\partial f}{\partial s_3} , \\ &\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1} f - \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_2} f = r_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + r_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} - 2\tau \frac{\partial f}{\partial s_3} , \end{aligned} \right.$$

e applicate alla funzione $\log \varrho$, porgono:

$$- \frac{\partial r_1}{\partial s_3} + \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = q_1 r_1 ,$$

$$- \frac{\partial q_1}{\partial s_1} - \frac{\partial(\varrho + r_2)}{\partial s_3} = q_1(\varrho + r_2) - \varrho q_1 = q_1 r_2 ,$$

$$\frac{\partial(\varrho + r_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial r_1}{\partial s_1} = r_1(\varrho + r_2) - r_2 r_1 + 2\tau q_1 = \varrho r_1 + 2\tau q_1 ,$$

ossia, sostituendo alle derivate di ϱ i loro valori (28):

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial r_1}{\partial s_3} - \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = - q_1 r_1 , \\ &\frac{\partial r_2}{\partial s_3} + \frac{\partial q_1}{\partial s_1} = q_1(\varrho - r_2) ; \end{aligned} \right.$$

$$(39) \quad \frac{\partial r_1}{\partial s_1} + \frac{\partial r_2}{\partial s_2} = 2(q_1 \tau + \varrho r_1) .$$

Le (30), (31), posto τ per q_2, si scrivono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_2} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial \tau}{\partial s_1} = -2\varrho\tau\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_2} = -q_1(\varrho + r_2)\,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_3} + \dfrac{\partial \tau}{\partial s_1} = 2\varrho\tau - q_1 r_1\,; \end{cases}$$

e, unitamente alle (38), si possono risolvere rapporto alle sei derivate

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1}, \frac{\partial q_1}{\partial s_2}, \frac{\partial \tau}{\partial s_1}, \frac{\partial \tau}{\partial s_2}, \frac{\partial r_1}{\partial s_3}, \frac{\partial r_2}{\partial s_3}.$$

Si ottengono così sei equazioni complessivamente equivalenti alle (38), (30), (31), cioè:

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} = \varrho q_1\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0\,; \end{cases}$$

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial s_1} = 2\varrho\tau\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial s_2} = -\varrho q_1\,; \end{cases}$$

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial s_3} = -q_1 r_1\,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3} = -q_1 r_2\,. \end{cases}$$

Non sarà male riportare anche le formule (29) e (32), che scriveremo:

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_3} = -q_1^2 + (\tau^2 + \varrho r_2)\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial s_3} = -q_1\tau - (q_1\tau + \varrho r_1)\,; \end{cases}$$

$$(44)\qquad \frac{\partial r_1}{\partial s_2} - \frac{\partial r_2}{\partial s_1} = r_1^2 + r_2^2 + q_1^2 + 3\tau^2\,.$$

Formiamo le condizioni di integrabilità per le (40) e (41). Basterà porre successivamente q_1 e τ, al posto di f, nell'ultima delle (12'').

Eseguite, a mezzo delle (40), (41) e (43) opportune riduzioni, risulta:

$$q_1(q_1\tau + \varrho r_1) - \tau(\tau^2 + \varrho r_2) = 0\,,$$
$$3\tau(q_1\tau + \varrho r_1) - q_1(\tau^2 + \varrho r_2) = 0\,.$$

Di qua si ricava che debbono annullarsi separatamente $q_1\tau + \varrho r_1$, $\tau^2 + \varrho r_2$.

La cosa è ovvia se il determinante $3\tau^2 - q_1^2$ è diverso da zero. Se poi esso si annullasse, derivando la identità $3\tau^2 - q_1^2 = 0$, rapporto ad s_2, per le seconde delle (40) e (41), verrebbe $-6\varrho\tau q_1 = 0$ e quindi, per essere ϱ diverso da zero, insieme $\tau q_1 = 0$ e $3\tau^2 - q_1^2 = 0$, donde $q_1 = 0$, $\tau = 0$. Per le (43), anche r_1, r_2 si annullerebbero, e per conseguenza: $q_1\tau + \varrho r_1$, $\tau^2 + \varrho r_2$, giusta l'asserto.

Sussistono dunque in ogni caso le relazioni:

$$q_1\tau + \varrho r_1 = 0\,,$$
$$\tau^2 + \varrho r_2 = 0\,,$$

che sono poi le (36) e (37) delle (E_1). Quanto alle (35), esse si hanno già nelle (40).

È facile riconoscere che il sistema riesce ormai completo. Infatti le (28), (40), (41) e (43), tenuto conto delle due ultime relazioni, assumono la forma definitiva:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial s_1} &= \varrho^2 - \tau^2\,,\\ \frac{\partial\varrho}{\partial s_2} &= q_1\tau\,,\\ \frac{\partial\varrho}{\partial s_3} &= -\varrho q_1\,; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial s_1} &= \varrho q_1\,,\\ \frac{\partial q_1}{\partial s_2} &= 0\,,\\ \frac{\partial q_1}{\partial s_3} &= -q_1^2\,; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial s_1} &= 2\varrho\tau\,,\\ \frac{\partial\tau}{\partial s_2} &= -\varrho q_1\,,\\ \frac{\partial\tau}{\partial s_3} &= -q_1\tau\,; \end{aligned}\right.$$

e le condizioni di integrabilità, come si verifica immediatamente, sono tutte soddisfatte, in virtù delle stesse equazioni del sistema. Ad esso vanno poi associate le seguenti equazioni in termini finiti:

$$\left\{\begin{aligned} &p_1 = q_2 = \tau\,, \quad p_2 = -q_1\,, \quad p_3 = 0\,, \quad q_3 = \varrho\,, \quad r_3 = -\tau\,,\\ &r_1 = -\frac{q_1\tau}{\varrho}\,, \qquad r_2 = -\frac{\tau^2}{\varrho}\,. \end{aligned}\right.$$

Delle (39), (42) e (44) non occorre più tener conto, poichè, con questi valori, esse si riducono ad altrettante identità.

Da tutto ciò si raccoglie che il sistema completo, determinato dalle equazioni (E), o coincide colle (C) del § 5, o comprende il gruppo delle (E_1) e quindi che ogni congruenza equipotenziale o è rettilinea isotrópa, o consta delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini.

Ripassando ai corrispondenti potenziali, risulta che non vi hanno altri tipi di potenziali binari reali, oltre quelli considerati a §§ 2, 5.

9. - Classificazione delle equazioni, che definiscono i potenziali binari.

Una osservazione immediata si è che i potenziali conici rientrano nel tipo logaritmico, o, se vogliam dire, isotrópo. Per constatarlo, basta moltiplicare

$$\Theta_4 u = \frac{1}{\operatorname{sen} \varrho_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\operatorname{sen} \varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right) \right\} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varrho_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0$$

per $\operatorname{sen}^2 \varrho_1$ e sostituire $\int \frac{d\varrho_1}{\operatorname{sen} \varrho_1}$ a ϱ_1.

Ancora si dimostra subito che, in

$$\Theta_3^{(m)} u = \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right) + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0 ,$$

il parametro m è inessenziale.

Infatti, essendo per la definizione stessa di potenziale elicoidale, $m > 0$, potremo sostituire, alle variabili ϱ_1 e ϱ_2, ϱ_1/m, ϱ_2/m, con che la precedente equazione diviene:

$$\frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right) + \left(1 + \frac{1}{\varrho_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0$$

e corrisponde alle $\Theta_3^{(m)} u = 0$, fattovi $m = 1$; la si designerà semplicemente con $\Theta_3 u = 0$.

Avremo così da confrontare le equazioni:

$$\Theta_1 u = 0 , \quad \Theta_2 u = 0 , \quad \Theta_3 u = 0 , \quad \Theta_5^{(m)} u = 0 ,$$

per il che giova ricorrere al procedimento, esposto dal sig. COTTON nella Nota citata.

Eccolo in due parole.

Data una equazione del secondo ordine, scriviamola, come è sempre lecito:

$$\Delta_{2\varphi} u + 2 \sum_r^{2} {}_1 \, b^{(r)} \frac{\partial u}{\partial \varrho_r} + cu = 0, \tag{45}$$

il parametro riferendosi ad una certa forma

$$\varphi = \sum_{rs}{}_1^2 \, a_{rs} \, d\varrho_r \, d\varrho_s \, .$$

Si ponga (le notazioni essendo manifeste):

$$H = \frac{\dfrac{\partial b_1}{\partial \varrho_2} - \dfrac{\partial b_2}{\partial \varrho_1}}{\sqrt{a}} \, ,$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r{}_1^2 \frac{\partial (\sqrt{a}\, b^{(r)})}{\partial \varrho_r} + \sum_{rs}{}_1^2 \, a_{rs} b^{(r)} b^{(s)} - c \, .$$

L'annullarsi simultaneo di H e K caratterizza le equazioni riducibili alla forma di Laplace ($\Theta_1 u = 0$).

Per K diverso da zero, gli invarianti della proposta equazione sono tutti e soltanto quelli del sistema, costituito dalla forma differenziale:

$$\bar{\varphi} = K \sum_{rs}{}_1^2 \, a_{rs} \, dx_r \, dx_s$$

e dalla funzione:

$$\frac{H}{K} \, .$$

Ne viene in particolare che le equazioni, per cui H si annulla (equazioni ad invarianti eguali), si classificano come le forme binarie. Manifestamente poi, essendo H/K un invariante assoluto, si può a priori escludere la trasformabilità di due equazioni, se H si annulla per una di esse e non per l'altra.

Applichiamo questi criteri alle nostre equazioni e cominciamo perciò col ridurle alla forma (45).

È facile verificare che si ha:

$$\Theta_2 u = \underset{2}{\Delta}_{\varphi} u + 2\,\frac{1}{2\varrho_1}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0\,, \quad (\varphi = d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2)\,;$$

$$\Theta_3 u = \underset{2}{\Delta}_{\varphi} u + 2\,\frac{\varrho_1}{2(1+\varrho_1^2)}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0\,, \quad \left(\varphi = d\varrho_1^2 + \frac{\varrho_1^2}{1+\varrho_1^2}\,d\varrho_2^2\right);$$

$$\Theta_5^{(m)} u = \underset{2}{\Delta}_{\varphi} u + 2\left\{\frac{1}{2\varrho_1}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} + \frac{\operatorname{sen}\varrho_2 \cos\varrho_2}{2\varrho_1^2(m^2+\operatorname{sen}^2\varrho_2)}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\right\} = 0\,,$$

$$\left(\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2}{m^2+\operatorname{sen}^2\varrho^2}\,d\varrho_1^2 + \varrho_1^2\,d\varrho_2^2\right).$$

Per le prime due equazioni, H è nullo e K vale rispettivamente

$$-\frac{1}{4\varrho_1^2}, \qquad \frac{\sqrt{1+\varrho_1^2}}{\varrho_1}\,\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\frac{\varrho_1^2}{2(1+\varrho_1^2)^{3/2}}\right\} + \frac{\varrho_1^2}{4(1+\varrho_1^2)^2} = \frac{1-\frac{1}{4}\varrho_1^2}{(1+\varrho_1^2)^2}\,.$$

Dacchè K è diverso da zero, siamo intanto fatti certi che le due equazioni non si possono ricondurre alla forma $\Theta_1 u = 0$.

Per evitare ambiguità, accentiamo le lettere, relative a $\Theta_3 u$. Le forme da confrontare sono:

$$\bar\varphi = -\frac{1}{4\varrho_1^2}\,(d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2)\,,$$

$$\bar\varphi' = \frac{1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2}{(1+\varrho_1'^2)^2}\left(d\varrho_1'^2 + \frac{\varrho_1'^2}{1+\varrho_1'^2}\,d\varrho_2'^2\right);$$

di curvature rispettive [20]:

$$G = 2\varrho_1^2\,\frac{\partial^2}{\partial\varrho_1^2}\log\left(\frac{1}{4\varrho_1^2}\right) = 4\,,$$

$$G' = -\frac{(1+\varrho_1'^2)^{5/2}}{\varrho_1'(1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2)}\,\frac{\partial}{\partial\varrho_1'}\left\{\frac{1+\varrho_1'^2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2}}\,\frac{\partial}{\partial\varrho_1'}\left(\frac{\varrho_1'\sqrt{1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2}}{(1+\varrho_1'^2)^{3/2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\dfrac{15}{2} - \dfrac{19}{4}\,\varrho_1'^2 + \dfrac{7}{4}\,\varrho_1'^4 - \dfrac{1}{16}\,\varrho_1'^6}{(1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2)^3}\,,$$

la prima costante e la seconda no.

([20]) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1894; pag. 67 [2ª ed., ibidem, vol. I (1902), pag. 93].

Se ne inferisce che le corrispondenti equazioni non sono trasformabili l'una nell'altra.

Veniamo alle equazioni $\Theta_5^{(m)}u = 0$, $(m > 0)$. Si ha:

$$b^{(1)} = \frac{1}{2\varrho_1}, \qquad b^{(2)} = \frac{\operatorname{sen} \varrho_2 \cos \varrho_2}{2\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)},$$

$$b_1 = \frac{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}{2\varrho_1(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)}, \qquad b_2 = \frac{\operatorname{sen} \varrho_2 \cos \varrho_2}{2(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)},$$

donde:

$$H = \frac{\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2}}{\varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2} \frac{\partial b_1}{\partial \varrho_2} = \frac{m^2 \cos \varrho_2}{\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2}}{2\varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2} \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \varrho_2 \cos \varrho_2}{\varrho_1(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)^{3/2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\varrho_1^2}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varrho_2 \cos^2 \varrho_2}{(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)^2}\right\} = \frac{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2}{4\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)^2}.$$

H non si annulla più identicamente, quindi questo tipo è distinto dai precedenti.

Resta da vedere se il parametro m è essenziale, cioè se sono trasformabili due equazioni $\Theta_5^{(m)}u = 0$, $\Theta_5^{(m')}u = 0$ $(m, m' > 0)$.

Si dovrebbe avere in tal caso, adoperando, per ciò che si riferisce a $\Theta_5^{(m')}u$, lettere accentate:

$$\frac{H}{K} = \frac{H'}{K'},$$

ossia:

$$\frac{4m^2 \cos \varrho_2 \sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2}}{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2} = \frac{4m'^2 \cos \varrho_2' \sqrt{m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2'}}{4m'^2 - (1 + 5m'^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2'}, \tag{46}$$

e inoltre sarebbero equivalenti le due forme:

$$\overline{\varphi} = \frac{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2}{4\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2} d\varrho_1^2 + \varrho_1^2 d\varrho_2^2\right\},$$

$$\overline{\varphi}' = \frac{4m'^2 - (1 + 5m'^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2'}{4\varrho_1'^2(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2')}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 \varrho_2'}{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2'} d\varrho_1'^2 + \varrho_1'^2 d\varrho_2'^2\right\}.$$

Dico che da queste ipotesi segue necessariamente $m = m'$.

Per riconoscerlo senza troppi calcoli, osserviamo anzitutto che al valore zero di $\cos \varrho_2$ deve corrispondere, in virtù della (46), tale valore di ϱ_2', per cui o $\cos \varrho_2' = 0$, o $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2' = 0$.

Infatti, quando si annulla $\cos \varrho_2$, deve annullarsi del pari il secondo membro della (46). Ora il denominatore non può diventare infinito per valori reali di ϱ_2', e, per valori complessi, diviene infinito in pari tempo il numeratore, senza che sia zero il limite del loro rapporto, che ha il valore

$$i \frac{4m'^2}{1 + 5m'^2} .$$

Deve dunque annullarsi il numeratore, cioè $\cos \varrho_2'$ ovvero $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2'$.

Per togliere l'ambiguità, consideriamo la relazione $G = G'$. Si ha:

$$G = -\frac{4(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)^{3/2})}{\operatorname{sen}\varrho_2 (4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2)} .$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left\{\frac{\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2}}{\sqrt{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2}} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\operatorname{sen}\varrho_2}{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2} \sqrt{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2}\right)\right\}$$

e una espressione analoga per G'.

Il valore di G per $\cos \varrho_2 = 0$ si ottiene chiaramente, eseguendo la derivazione interna, con che apparisce un fattore $\cos \varrho_2$, derivando soltanto questo fattore e ponendo poi $\operatorname{sen}^2 \varrho_2 = 1$. Ciò dà:

$$(G)_{\cos \varrho_2 = 0} = -8 + \frac{8}{1 + m^2} - 20m^2,$$

che, per m diverso da $\pm i$, è una quantità finita.

Quanto a G', per $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2' = 0$, esso diverrebbe finito, come si vede subito. Non si possono dunque corrispondere $\cos \varrho_2 = 0$ e $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2' = 0$.

Avremo così:

$$(G)_{\cos \varrho_2 = 0} = (G')_{\cos \varrho'_2 = 0} ,$$

ossia:

$$\frac{2}{1 + m^2} - 5m^2 = \frac{2}{1 + m'^2} - 5m'^2 ,$$

che può essere scritta:

$$\left\{5 + \frac{2}{(1 + m^2)(1 + m'^2)}\right\} (m^2 - m'^2) = 0 . \tag{47}$$

Siccome m ed m' sono positivi ([21]), se ne trae $m = m'$, giusta l'asserto.

Riassumendo, possiamo concludere:

Le equazioni non ulteriormente riducibili, che definiscono potenziali binari reali, sono:

$$\Theta_1 u = 0\ ; \quad \Theta_2 u = 0\ ; \quad \Theta_3 u = 0\ ; \quad \Theta_5^{(m)} u = 0\,, \qquad (m > 0),$$

dove i diversi valori di m caratterizzano tipi distinti.

([21]) Si prova facilmente che, anche senza questa restrizione, due equazioni $\Theta_5^{(m)} u = 0$ $\Theta_5^{(m')} = 0$ sono sempre irriducibili quando $m^2 \neq m'^2$.

Infatti, per due equazioni, supposte trasformabili, si corrispondono (escluso al più il caso $m = \pm\, i$) i valori $\cos \varrho_2 = 0$, $\cos \varrho_2' = 0$ e quindi, assieme alla (47), si ha:

$$\left(\Delta_1 \bar{\varphi}\, \frac{H}{K}\right)_{\cos \varrho_2 = 0} = \left(\Delta_1 \bar{\varphi}'\, \frac{H'}{K'}\right)_{\cos \varrho'_2 = 0},$$

il che porge:

$$\frac{-m^2}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{-m'^2}{\sqrt{1 + m'^2}},$$

od anche:

$$\left\{ m^2 m'^2 + m^2 + m'^2 \right\} (m^2 - m'^2) = 0.$$

Questa equazione e la (47) non ammettono altra soluzione comune all'infuori di $m^2 = m'^2$. Se poi $m = \pm\, i$, deve essere necessariamente anche $m' = \pm\, i$, poichè in caso diverso riuscirebbe finito $(G')_{\cos \varrho'_2 = 0}$, mentre $(G)_{\cos \varrho_2 = 0}$ e $(G)_{m^2 + \mathrm{sen}^2 \varrho_2 = 0}$ diventano entrambi infiniti.