XXV.

SUR LES INTÉGRALES PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXVIII (1899)

pp. 978-981

Soit l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{1}$$

où l'on suppose X, Y fonctions périodiques de t avec la période τ, holomorphes par rapport à x et à y autour de l'origine O et nulles à la fois en O pour toute valeur de t. Soient encore u, v deux intégrales de (1), régulières en O et telles que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

ne s'annule pas pour $x = y = t = 0$. Appelons u_0, v_0, u_1, v_1 les valeurs de u, v pour $t = 0$ et pour $t = \tau$. La relation

$$u_1 - u_0 = \int_0^\tau \left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}\right) dt,$$

nous apprend que $u_1 - u_0$ s'évanouit pour $x = 0$, $y = 0$; de même $v_1 - v_0$. Par suite, le système de deux équations en x, y

$$u_1 = u_0, \qquad v_1 = v_0, \tag{2}$$

admet la solution $x = 0$, $y = 0$.

Voyons ce qui se passe à l'égard des équations (2) au voisinage du point $x = 0$, $y = 0$.

Trois cas sont possibles:

a) Les équations (2) sont des identités;

b) Elles se réduisent à une seule, c'est-à-dire on a identiquement

$$u_1 - u_0 = AG\,, \qquad v_1 - v_0 = BG\,, \tag{2'}$$

A, B, G étant régulières et de plus $G = 0$, pour $x = 0$, $y = 0$;

c) Elles sont distinctes (du moins auprès de l'origine), et, par conséquent, la solution $x = 0$, $y = 0$ est isolée.

On s'assure aisément ques *ces caractères ne dépendent pas du choix des intégrales u, v.*

Proposons-nous maintenant de rechercher s'il y a des intégrales w de (1), régulières dans le domaine du point O et périodiques en t avec la période τ. Tout d'abord il est bien clair que dans l'hypothèse *a*) toutes les intégrales de (1) sont périodiques; dans l'hypothèse *c*), au contraire, il n'existe aucune intégrale w. Le cas *b*) exige une discussion plus détaillée. L'équation (1) admet au plus une intégrale périodique w (c'est-à-dire pas deux indépendantes). Mais cette intégrale périodique existe-t-elle effectivement? Je vais montrer qu'il en est ainsi, du moins lorsque (en supposant G exprimée par u_0, v_0)

$$\operatorname{Mod}\left(1 + A\frac{\partial G}{\partial u_0} + B\frac{\partial G}{\partial v_0}\right)_{x=y=0} \neq 1\,. \tag{3}$$

Le premier membre de (3) est invariant par rapport aux changements du système des intégrales u, v. Si l'on passe, en effet, de u, v a $\bar{u}(u, v)$, $\bar{v}(u, v)$, on voit de suite que les coefficients $\bar{A}$, $\bar{B}$, de G dans $\bar{u}_1 - \bar{u}_0$, $\bar{v}_1 - \bar{v}_0$ se réduisent, pour $x = 0$, $y = 0$, à

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial u_0}A + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial v_0}B\right)_{x=y=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial u_0}A + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial v_0}B\right)_{x=y=0},$$

d'où

$$\left(\bar{A}\frac{\partial G}{\partial \bar{u}_0} + \bar{B}\frac{\partial G}{\partial \bar{v}_0}\right)_{x=y=0} = \left(A\frac{\partial G}{\partial u_0} + B\frac{\partial G}{\partial v_0}\right)_{x=y=0}.$$

Comme, d'après (3), $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$ ne s'annulent pas à la fois en O, je puis, par une transformation convenable de variables, supposer $G = x$.

De plus, je prendrai $u_0 = x$, $v_0 = y$. On tire alors de (2'), en écrivant x_1, y_1 pour u_1, v_1,

$$x_1 = x[1 + A(x, y)], \qquad y_1 = y + xB(x, y). \tag{4}$$

La condition (3) nous assure que $|1 + A|_{x=y=0}$ n'est pas égal à l'unité; il est loisible de le supposer < 1. Autrement il suffirait de changer τ en $-\tau$.

Ceci posé, prenons les itérations de (4) en faisant

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n[1 + A(x_n, y_n)] \\ y_{n+1} = y_n + x_n B(x_n, y_n). \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

On démontre sans peine [1] que $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, tandis que y_n converge vers une fonction w_0, regulière en O, qui se réduit à y, pour $x = 0$. Elle ne change pas d'après sa définition lorsqu'on remplace x, y par x_1, y_1. L'intégrale de (1), qui se réduit à w_0 pour $t = 0$ est donc l'intégrale périodique w, dont il s'agissait de prouver l'existence.

Il y a des cas où la simple inspection de l'équation (1) permet d'affirmer qu'on se trouve dans l'hypothèse *b*) [sous la restriction (3)], et par suite qu'il existe une intégrale w. C'est ce qui arrive, par exemple, si $X = xX_1$, $Y = xY_1$, Y_1, X_1, se réduisant respectivement à zéro et à une constante $\alpha \neq 0$, et telle que $\alpha\tau$ ne soit pas purement imaginaire

---

[1] Remarquons pour cela que, ayant $|1 + A|_{x=y=0} < 1$, on peut choisir des nombres positifs $M < 1$, N, R, tels qu'on ait à la fois

$$|1 + A(x, y)| < M, \qquad |B(x, y)| < N, \tag{6}$$

pour $|x|$, $|y| < R$. Définissons en outre un rayon ϱ moyennant l'inégalité

$$\varrho\left(1 + \frac{N}{1 - M}\right) < R; \tag{7}$$

pour $|x|$, $|y| < \varrho$, on a

$$|x_1| < \varrho M, \qquad |y_1 - y| < \varrho N.$$

D'une façon générale, en supposant

$$|x_\nu| < \varrho M^\nu, \qquad |y_\nu - y_{\nu-1}| < \varrho N M^{\nu-1}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on trouve, à cause de (5), (6), (7)

$$|x_{n+1}| < \varrho M^{n+1}, \qquad |y_{n+1} - y_n| < \varrho N M^n;$$

dès lors la démonstration s'achève d'elle-même. On peut dire, à un certain point de vue, que c'est le théorème bien connu de M. Koenigs sur les substitutions uniformes, étendu au cas de deux variables.

pour $x = y = 0$. On a alors, pour toute intégrale u de (1),

$$u_1 - u_0 = x \int_0^\tau \left(X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt ,$$

et, de plus, en prenant $u_0 = x$, il vient, d'après (4),

$$(A)_{x=y=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x_1 - x) \right]_{x=y=0} = \alpha \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=y=0} dt = e^{\alpha\tau} - 1 \quad (^2),$$

ce qui donne

$$|1 + A|_{x=y=0} = |e^{\alpha\tau}| \neq 1 .$$

Il y aurait lieu naturellement de généraliser ces considérations en les étendant aux équations linéaires à un nombre quelconque de variables.

Qu'il me soit permis, en terminant, de signaler le profit qu'on pourrait en tirer pour l'étude des intégrales des systèmes différentiels ordinaires et pour les questions qui se rapportent à la stabilité de leurs solutions.

(*17 avril 1899*)

(²) On a en effet

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

d'où, en faisant $x = y = 0$ et en appelant c la valeur de $\partial u / \partial x$ pour $x = y = 0$,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha c .$$

Mais, pour $t = 0$, $c = 1$; par conséquent $c = e^{\alpha t}$ et $\alpha \int_0^\tau c\, dt = e^{\alpha t} - 1$.