XXVI.

INTERPRETAZIONE GRUPPALE DEGLI INTEGRALI DI UN SISTEMA CANONICO (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 3ª, vol. VIII, 2º sem. 1899,

pp. 235-238

Il sig. MAURICE LÉVY ha per il primo osservato (1) che, in una varietà qualunque, è possibile uno spostamento senza deformazione allora e solo allora che dal quadrato dell'elemento lineare si può, con acconcia trasformazione, far sparire una delle variabili. Ciò è quanto dire che esiste un integrale primo, lineare ed omogeneo, per le geodetiche della varietà.

Il prof. CERRUTI ritornò sull'argomento (2), trattando altresì il caso, in cui agiscono forze conservative. La relazione, di cui sopra è parola, fra integrali primi e spostamenti rigidi, si enuncia con linguaggio gruppale nel modo seguente (3). Se la forza viva e il potenziale ammettono una stessa trasformazione puntuale infinitesima, le equazioni del moto posseggono un integrale primo lineare ed omogeneo; e reciprocamente. (Il primo membro dell'integrale, scritto in forma canonica, coincide col simbolo della trasformazione infinitesima).

Sorge spontanea la domanda: Agli integrali non lineari corrisponde ancora qualche carattere gruppale?

La risposta è affermativa e si applica senz'altro a qualsivoglia sistema canonico

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 5 novembre 1899.

(1) « Comptes Rendus », t. LXXXVI, 18 febbraio e 8 aprile 1878.

(2) In questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. III, 1895.

(3) Cfr. le Note: *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso,* in questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. V, 1896 [in questo vol.: XI, pp. 253-267] e la elegante dimostrazione del sig. LIEBMANN, « Math. Ann. », B. 50, 1897.

purchè non si considerino soltanto trasformazioni puntuali (rapporto alle variabili x, operanti per estensione sulle p), ma più generalmente trasformazioni di contatto nelle x, p. Si trova infatti che *integrali di un sistema canonico e trasformazioni di contatto nelle x, p, mutanti il sistema in sè, sono in sostanza la stessa cosa. Ad ogni integrale fa riscontro una trasformazione e inversamente. Le funzioni caratteristiche delle trasformazioni* (fissando opportunamente un addendo, che rimane a priori indeterminato) *si possono far coincidere coi primi membri dei corrispondenti integrali.*

Il teorema si dimostra in modo assai semplice. Sia

$$\delta f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \pi_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \ldots + \pi_n \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

una trasformazione infinitesima nelle x, p. Gli incrementi ξ, π si suppongano funzioni delle x, delle p e di un parametro t, invariabile di fronte alla trasformazione. Risguardando le x, p come funzioni di t, potremo estendere la δf alle singole derivate dx_i/dt, dp_i/dt, e i relativi incrementi si avranno dalle formule

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\delta x_i}{dt} = \frac{d\xi_i}{dt},$$

$$\delta \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\delta p_i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt}.$$

Applicata al sistema (S), la trasformazione δf porge

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta \left\{ \frac{dx_i}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\} = 0 \\ &\delta \left\{ \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\} = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Queste equazioni dovranno essere identicamente soddisfatte, in virtù delle (S), ogniqualvolta il sistema ammette la trasformazione infinitesima δf.

Introduciamo l'ipotesi che δf è trasformazione di contatto. Le ξ e le π sono derivate di una medesima funzione $W(x, p, t)$ [4], a norma delle

[4] LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, cap. 14.

formule

$$(2) \qquad \xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}\,, \qquad \pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}\,,$$

e il simbolo δf diventa la parentesi di Poisson (W, f).

Le (1) si possono scrivere

$$\frac{d\,\dfrac{\partial W}{\partial p_i}}{dt} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0\,,$$

$$\frac{d\,\dfrac{\partial W}{\partial x_i}}{dt} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0\,,$$

ossia, eseguendo la derivazione e tenendo conto delle (S):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p_i\,\partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial p_i}\right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial x_i}\right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0\,,$$

che, per note proprietà delle parentesi, equivalgono a

$$(1') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_i}\left[\dfrac{\partial W}{\partial t} + (H, W)\right] = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\dfrac{\partial W}{\partial t} + (H, W)\right] = 0\,. \end{cases}$$

Da queste apparisce che $\partial W/\partial t + (H, W)$ dipende dalla sola t. Ora W, funzione caratteristica della δf, è determinata dalle (2) a meno di una funzione additiva di t. Si può sempre disporne in modo che risulti identicamente

$$(1'') \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + (H, W) = 0\,.$$

È poi chiaro che dalla (1″), facendo cammino inverso, si ripassa alle (1).

La (1″) è dunque condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema canonico (S) ammetta la trasformazione infinitesima di contatto (W, f).

D'altra parte la equazione stessa esprime precisamente che $W=$ cost. è integrale del sistema (S); di qua la proposizione enunciata.

Si noti che, allorquando W è lineare e omogenea nelle p (e in questo caso soltanto), δf proviene dall'estensione di una trasformazione puntuale rapporto alle x. Segue da ciò che la esistenza di un integrale lineare, omogeneo, e quella di una trasformazione puntuale, mutante il sistema canonico in sè, sono due fatti concomitanti. Supponendo in particolare $H=T-U$, con T omogenea di secondo grado nelle p e U funzione delle sole x, si ritrova il teorema di LÉVY-CERRUTI. Risulta infatti dalla ($1''$), scindendo i termini di diverso grado nelle p, che separatamente T ed U ammettono la trasformazione W.