XXVII.

COMPLEMENTI AL TEOREMA DI MALUS-DUPIN

NOTA I (*).

« Rend. Acc. Lincei », serie 5ª, vol. IX, 1º sem. 1900, pp. 185-189

È ben noto che, se ad una congruenza normale di raggi si fa subire un numero qualunque di rifrazioni (o in particolare di riflessioni), si ottiene ancora una congruenza normale. La normalità è dunque un carattere delle congruenze rettilinee invariante di fronte a quante si vogliono rifrazioni. Vedremo che è anche l'unica proprietà invariantiva. Mi propongo infatti di mostrare che due congruenze di rette (normali entrambe o non-normali) sono sempre deducibili l'una dall'altra con un numero finito di rifrazioni. Più precisamente per le congruenze normali basta una rifrazione, per le altre ne occorrono in generale due.

Gli indici di rifrazione si possono assumere ad arbitrio, in particolare eguali a -1, il che corrisponde a riflessioni. Le superficie rifrangenti debbono soddisfare a certe condizioni differenziali. La esistenza di tali superficie e il grado di generalità si desumono dai teoremi fondamentali della teoria delle equazioni.

Così, per es., la superficie di passaggio fra due congruenze normali rimane determinata, quando si fissa un punto di essa o, ciò che è lo stesso, la continuazione di un raggio incidente.

Per le congruenze non-normali, si può disporre delle due superficie rifrangenti in modo che ∞^1 raggi della prima congruenza si trasformino in ∞^1 raggi, scelti a piacere, della seconda, si corrispondano cioè due rigate e i singoli raggi sopra di esse.

1. – Designino x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane, X_1, X_2, X_3 funzioni di queste variabili legate dalla identità

$$\sum_{1}^{3}{}_j X_j^2 = 1. \tag{1}$$

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 18 marzo 1900.

La congruenza

$$\frac{dx_i}{ds} = X_i\,, \qquad (i=1,2,3) \tag{2}$$

sarà rettilinea, purchè i coseni direttori X_i conservino valore costante sopra le singole curve (2), sia cioè

$$\frac{dX_i}{ds} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j = 0\,. \qquad (i=1,2,3).$$

D'altra parte la (1) porge in ogni caso

$$\sum_1^3{}_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} X_j = 0\,, \qquad (i=1,2,3),$$

onde sottraendo

$$\sum_1^3{}_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) X_j = 0\,, \qquad (i=1,2,3)$$

le quali esprimono che le differenze

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}$$

sono ordinatamente proporzionali a X_1, X_2, X_3. Rappresentando con A (*anormalità* della congruenza rettilinea considerata) il fattore di proporzionalità potremo scrivere

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} &= AX_1 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} &= AX_2\,, \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} &= AX_3\,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

e ne trarremo per A la espressione

$$A = X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) + X_2\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) + X_3\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right). \tag{4}$$

Deriviamo le (3) rapporto a x_1, x_2, x_3 rispettivamente e sommiamo; verrà

$$\frac{\partial(AX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(AX_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(AX_3)}{\partial x_3}=0\,,$$

che si può scrivere

$$\frac{dA}{ds}=-A\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)\quad (^1)\,.$$

Questa equazione rende ragione del fatto geometricamente evidente che una congruenza rettilinea non può essere normale ad una superficie senza esserlo a tutta la famiglia delle superficie parallele. Da essa infatti risulta che, se A si annulla in un punto, rimane eguale a zero lungo tutto il raggio passante per quel punto.

Ora, quando una superficie incontra normalmente i raggi di una congruenza, dev'essere sopra di essa $A=0$, e quindi, per l'osservazione fatta, A identicamente nullo.

Le (3) ci dicono allora che X_1, X_2, X_3 sono le derivate di una stessa funzione.

Si può aggiungere che, quando questo ha luogo, la congruenza (2) è necessariamente rettilinea. Di qua una nota proposizione di HAMILTON [2]:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una congruenza (2) sia rettilinea e normale è che l'espressione $X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+X_3\,dx_3$ costituisca un differenziale esatto.

2. – Consideriamo la superficie σ di separazione di due mezzi ottici. Se $-X_1$, $-X_2$, $-X_3$ rappresentano i coseni direttori (nel verso di propagazione della luce) di un raggio incidente in σ, Y_1, Y_2, Y_3 quelli del corrispondente raggio rifratto (sempre nel verso di propagazione), n l'indice relativo dei due mezzi considerati, la normale alla superficie σ ha i suoi coseni proporzionali a X_1+nY_1, X_2+nY_2, X_3+nY_3. Questo equivale a dire che, per ogni spostamento dx_1, dx_2, dx_3 appartenente a σ, dev'essere

$$\sum_{1}^{3}{}_i\, X_i\,dx_i+n\sum_{1}^{3}{}_i\, Y_i\,dx_i=0\,. \tag{5}$$

---

[1] Le formole di RICCI conducono più generalmente ad una relazione di questo tipo per le congruenze geodetiche di uno spazio qualunque. Veggasi la recente Nota del signor A. DALL'ACQUA, *Ricerche sulle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni*, « Atti del R. Istituto Veneto », 1900.

[2] DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, pag. 275.

Ciò posto, date due congruenze rettilinee $[C]$ e $[C']$ di coseni direttori X_i e Y_i rispettivamente, si potrà risguardare $[C']$ proveniente da $[C]$ per rifrazione d'indice n, purchè esista una superficie σ, su cui vale la (5).

Se le due congruenze $[C]$ e $[C']$ sono entrambe normali, $\sum_{1}^{3}{}_i X_i dx_i$, $\sum_{1}^{3}{}_i Y_i dx_i$ sono differenziali di due certe funzioni U ed U' e tutte le superficie della famiglia

$$U + nU' = \text{cost}.$$

soddisfanno alla voluta condizione.

Ne viene che la superficie di separazione dei due mezzi si può immaginare condotta per un punto arbitrario dello spazio.

Affinchè vi sia corrispondenza biunivoca fra i raggi di $[C]$ e quelli di $[C']$, bisogna ancora accertarsi che la superficie in questione non consti di raggi di una delle due congruenze, non si abbia cioè nè

$$-\sum_{1}^{3}{}_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}(U + nU') = 0, \quad \text{nè} \quad \sum_{1}^{3}{}_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(U + nU') = 0.$$

Dovremo perciò escludere quella o quelle superficie $U + nU' = \text{cost.}$, per cui eventualmente si avesse $-1 + n\cos\omega = 0$, $-\cos\omega + n = 0$; (designando ω l'angolo che formano tra loro in un punto generico le direzioni di propagazione sui raggi delle due congruenze).

Va notato dal punto di vista ottico che queste due direzioni devono formare colla normale alla superficie angoli della stessa specie (acuti entrambi od ottusi, secondo la direzione, che si assume come positiva sopra la normale). Questo esige che i due binomi $-1 + n\cos\omega$, $-\cos\omega + n$ abbiano medesimo segno, cioè che ω non superi il *complemento dell'angolo limite*.

Supposto che le due congruenze $[C]$ e $[C']$ abbiano un raggio g a comune (e opposta direzione positiva sopra di esso), l'accennata restrizione è certamente verificata nell'intorno di g, perchè, sopra g, $\cos\omega = 1$ e i due binomi $-1 + n\cos\omega$, $-\cos\omega + n$ riescono eguali.

Nel caso della riflessione, ciò ha luogo qualunque sia ω, e rimane eccettuato, per quanto si disse, solo il valore $\omega = \pi$.

Prescindendo dalla ipotesi che le due congruenze $[C]$ e $[C']$ sieno normali, il primo membro della (5) non è più in generale un differenziale esatto. Esisterà ciò nulla meno una famiglia di superficie σ, purchè le $X_i + nY_i$ sieno proporzionali alle derivate di una medesima funzione.

Questo porta alla condizione

$$(X_1 + nY_1)\left\{\frac{\partial(X_2 + nY_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(X_3 + nY_3)}{\partial x_2}\right\} +$$

$$(X_2 + nY_2)\left\{\frac{\partial(X_3 + nY_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(X_1 + nY_1)}{\partial x_3}\right\} +$$

$$(X_3 + nY_3)\left\{\frac{\partial(X_1 + nY_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(X_2 + nY_2)}{\partial x_1}\right\} = 0\,,$$

che, introducendo le anormalità A, A' delle due congruenze $[C]$, $[C']$ e osservando le (3), si semplifica in

$$A + n^2A' - m(A + A')\cos\omega = 0\,. \tag{6}$$

Se questa non è una identità, potrà esistere al più una superficie rifrangente σ, ecc.

Nella (6) abbiamo indiretta conferma del teorema di MALUS-DUPIN. Constatiamo infatti l'impossibilità di passare con rifrazioni da una congruenza normale ad altra non-normale, o viceversa. E per verità, supposta normale la $[C]$, ma non la $[C']$, la esistenza di una superficie σ esigerebbe $n - \cos\omega = 0$, il che esclude possa esservi corrispondenza biunivoca fra i raggi delle due congruenze.