XXVIII.

SUR L'INSTABILITÉ DE CERTAINES SUBSTITUTIONS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXX (1900) pp. 103-106.

J'envisage les transformations ponctuelles réelles à deux variables

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \varphi(x, y) + \ldots, & y_1 = y + \psi(x, y) + \ldots, \\ (\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, & \psi = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) \end{cases}$$

dont la partie du premier ordre se réduit à l'identité, les termes non écrits étant d'ordre supérieur au second.

Je me propose de démontrer que les substitutions telles que (1) sont en général *instables*, c'est-à-dire *qu'on peut, par des itérations*

$$(2)\qquad \begin{cases} x_n = x_{n-1} + \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) + \ldots, \\ y_n = y_{n-1} + \psi(x_{n-1}, y_{n-1}) + \ldots, \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

de (1), *faire sortir le point représentatif* P_n (dont les coordonnées sont x_n, y_n) *d'un cercle fixe* C, *tracé autour de l'origine* O, *pourvu qu'on prenne la position initiale* P (de coordonnées x, y) *dans un secteur convenable, si près de* O *que l'on veut.*

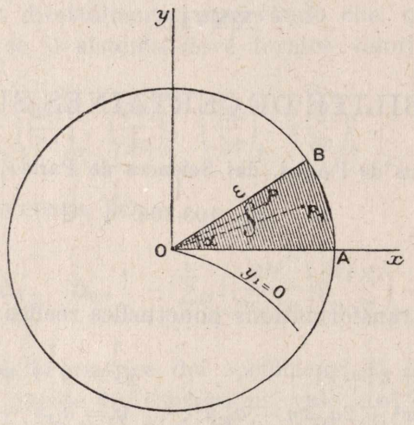
Plaçons-nous dans le cas général, où les deux formes φ et ψ n'ont pas de facteurs en commun.

On peut alors supposer que notre substitution (1) ait été préalablement réduite (par une transformation linéaire réelle) à la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y), \\ y_1 = y(1 + cx + dy) + V(x, y), \end{cases}$$

U et V étant, bien entendu, du troisième ordre au moins par rapport à x, y.

La courbe $y_1 = y(1 + cx + dy) + V = 0$ a pour tangente à l'origine la droite $y = 0$; ce sera en général une tangente d'inflexion. Quoi qu'il en soit, pour x assez petit et positif, la courbe $y_1 = 0$ est située tout entière dans un même quadrant: soit le quatrième. (L'autre cas se réduit à celui-ci en changeant y_1, y en $-y_1$, $-y$ sans toucher à x).



Il convient de distinguer trois cas: $c < 1$, $c > 1$, $c = 1$.

1) $c < 1$. — Considérons un secteur $S = AOB$ du premier quadrant, limité inférieurement par l'axe des abscisses, ayant pour rayon ε et pour ouverture α. Si ε et α sont assez petits, on peut supposer pour tous les points $P(x, y)$ de S

$$x_1 \geqq x + \frac{1}{2} x^2 , \tag{4}$$

$$y_1 \geqq 0 . \tag{5}$$

En posant $y/x = z$, on aura aussi,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} &= \frac{y(1 + cx + dy) + V(x, y)}{x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y)} \\ &= \frac{z(1 + cx + dxz) + \frac{1}{x} V(x, xz)}{1 + x + xz(a + bxz) + \frac{1}{x} U(x, xz)} \\ &= z + (c - 1)xz + xz[(d - a)z - bz^2] + x^2 W(x, z) , \end{aligned} \right. \tag{6}$$

$W(x, z)$ restant finie.

Profitons encore de la petitesse de ε et de α, en les fixant de façon que, pour $0 \leqq z \leqq \operatorname{tang} \alpha$, $0 \leqq x \leqq \varepsilon$, non seulement soient valables les inégalités (4), (5) et la formule (6), mais en outre

$$(7)\qquad (d-a)z - bz^2 < \frac{1-c}{2},$$

$$(8)\qquad 1 - \frac{1-c}{2}x > 0,$$

$$(9)\qquad xW < \frac{1-c}{2}\operatorname{tang}\alpha.$$

On tire de (6), ayant égard à (7) et (9),

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq z - \frac{1-c}{2}xz + \frac{1-c}{2}x\operatorname{tang}\alpha \leqq \operatorname{tang}\alpha - \left(1 - \frac{1-c}{2}x\right)(\operatorname{tang}\alpha - z),$$

et *a fortiori*, d'après (8),

$$(10)\qquad \frac{y_1}{x_1} \leqq \operatorname{tang}\alpha.$$

Les inégalités (4), (5) et (10) montrent qu'à tout point P de S notre substitution (3) fait correspondre un point P_1 à la droite de la parallèle à l'axe Oy conduite par P, et non extérieur à l'angle AOB. Si P_1 appartient lui-même au secteur S, déterminons P_2 par (2) et ainsi de suite, en répétant cette opération tant que l'on reste dans S. D'après ce que l'on vient de dire, on ne peut pas sortir du secteur S, sans sortir en même temps du cercle C, auquel le secteur appartient. La proposition énoncée sera donc établie, si nous prouvons que les points de la succession $P, P_1, P_2, \ldots$, ne peuvent tomber indéfininent à l'intérieur de S. À la vérité, s'il en était ainsi, les abscisses $x, x_1, x_2, \ldots$, qui forment une succession croissante, devraient tendre vers une limite l *finie et positive*. Mais on a $x_1 \geqq x + \frac{1}{2}x^2$; de même $x_n \geqq x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-1}^2$, et par conséquent la limite l devrait remplir une inégalité de la forme $l \geqq l + \frac{1}{2}l^2$, ce qui est absurde.

2) $c > 1$. — On a recours à la substitution inverse de (3). On démontre par des considérations analogues qu'en partant des points P d'un secteur convenable les points $P_{-1}, P_{-2}, \ldots$ approchent indéfiniment de l'origine.

Il est alors possible, avec des positions initiales, si près de l'origine que l'on veut (celles de la dite succession $P_{-1}, P_{-2}, \ldots$), de rejoindre, par l'itération de (3), un point P fixé à l'avance. Il y a bien instabilité.

3) $c = 1$. — Ce cas peut être reconduit à l'un ou à l'autre des deux précédents.

Les substitutions $x_1 = x \cos\theta - y \sin\theta + \ldots$, $y_1 = x \sin\theta + y \cos\theta + \ldots$, où θ est commensurable avec 2π, se ramènent par itération à la forme (1). Elles aussi sont donc instables, du moins en général. Il est bien probable que cette conclusion subsiste pour toute valeur de θ, mais je ne puis encore le démontrer rigoureusement. En attendant je voudrais indiquer comment ce qui précède se rattache à la question de la stabilité des solutions périodiques des équations de la Dynamique. Ce sera, si l'Académie le permet, l'objet d'une prochaine Communication.

(*9 juillet 1900*).