XXX.

SUR LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXXI (1900)

pp. 236-239

Soient S, J, P (Soleil, Jupiter, Planète) les trois corps; 1, μ, 0 leurs masses. On suppose les trois corps dans un même plan et le mouvement de Jupiter circulaire.

Les distances PS, PJ seront désignées par r, Δ et l'angle PSJ (compté positivement dans le sens du mouvement de Jupiter) par v. Si l'on prend SJ pour unité de distance et qu'on dispose de l'unité de temps de façon que la constante de Gauss se réduise à l'unité, les équations du mouvement de P pourront s'écrire

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

où

$$F = \frac{1}{2p_1^2} + p_1 - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\mu}{\Delta} - \frac{\mu}{1+\mu} r \cos v .$$

Les variables p_i, q_i sont liées aux éléments elliptiques (du mouvement relatif par rapport à SJ), demi-grand axe a, excentricité e, anomalie moyenne ζ, longitude du périhélie $\bar{\omega}$, par les relations

$$p_1 = \sqrt{a}\,, \quad q_1 = +\bar{\omega}\,\zeta\,; \quad p_2 = \eta \cos \bar{\omega}\,, \quad q_2 = -\eta \sin \bar{\omega}\,,$$

η étant la racine de l'équation

$$\frac{\eta^2}{4a} - \frac{\eta}{\sqrt{a}} + e^2 = 0\,,$$

qui s'annule avec e.

Pour $\mu = 0$, le mouvement de P est képlérien; il est même circulaire et uniforme dans les ∞^1 solutions suivantes:

$$(2) \qquad p_1 = \sqrt{R}\,, \quad q_1 = (n-1)t\,; \qquad p_2 = q_2 = 0$$

($n = R^{-3/2}$, R étant une constante).

La valeur de F (constante de JACOBI), qui correspond à une solution (2), est $C = \frac{1}{2}R + \sqrt{R}$.

Fixons pour C cette valeur et considérons les trajectoires de (1), sous la condition $F = C$, pour les petites valeurs de μ. Elles sont définies par les équations

$$(3) \qquad \frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}\,, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2}\,,$$

où H n'est que la racine p_1 de l'équation $F = C$, qui se réduit à $\sqrt{R}$, pour $\mu = p_2 = q_2 = 0$.

Il existe parmi ces trajectoires des orbites fermées, peu différentes des cercles (2). Rapportons-nous, pour fixer les idées, à une planète inférieure ($R < 1$).

Plus particulièrement, donnons à R telle valeur que $1/(n-1) = 1(R^{-3/2} - 1)$ soit de la forme $h/3$, h étant un entier positif, premier avec 3

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{h}}}\right).$$

Les principes exposés dans une Note précédente (16 juillet) (*) vont nous permettre d'affirmer que les solutions périodiques de cette catégorie sont instables (tout en paraissant stables à la première approximation).

Je supposerai pour un moment que l'on donne au paramètre μ seulement des valeurs μ', pour qui les exposants caractéristiques de la solution périodique (par rapport au système réduit (3), qui sont purement imaginaires et très voisins de $\pm\sqrt{-1}/(n-1)$ seraient commensurables avec $\sqrt{-1}/(n-1)$. Les considérations de la dite Note sont alors applicables. On doit, en premier lieu, substituer à p_2, q_2 des nouvelles variables canoniques x et y telles que l'expression de H ne contienne plus ni termes du premier ordre ni termes du second ordre par rapport a x, y. Le

(*) [In questo vol.: XXIX, pp. 465-467].

criterium d'instabilité, c'est que la valeur moyenne (H_3) de H_3 n'ait pas de facteurs multiples (H_3 désigne l'ensemble des termes du troisième degré dans H et la valeur moyenne se rapporte à la variable q_1, de laquelle H est, même après la substitution de x, y à p_2, q_2, fonction périodique). Si μ' est assez petit, il suffit que cette condition soit satisfaite pour le premier coéfficient non nul du développement de (H_3) suivant les puissances de μ. Or, en posant $(H_3) = (H_3)^{(0)} + \mu(H_3)^{(1)} + \ldots$, on trouve $(H_3)^{(0)} = 0$, $(H_3)^{(1)} = \Theta(x^3 - 3y^2x)$, où Θ dépend uniquement de R et ne s'annule pas identiquement, si non plus pour les valeurs de la forme $1/\sqrt[3]{1+3/h}$.

L'instabilité est donc certaine pour les solutions périodiques de l'espèce considérée, pourvu toutefois que μ ait une valeur μ'. Mais on peut se débarasser de cette dernière restriction. On parvient ainsi à établir que *les solutions périodiques du problème restreint des trois corps, qui diffèrent assez peu des orbites circulaires, ayant pour moyen mouvement un nombre de la forme* $1 + 3/h$, *sont assurément instables.*

Les conditions ci-dessus sont à fort peu près satisfaites pour les petites planètes 167 Urda, 243 Ida, 369, dont le moyen mouvement est voisin de $1 + 3/2$, les excentricités et les inclinaisons étant très petites.

Les développements de cette Note et des deux précédentes (9 et 16 juillet) (*) paraîtront prochainement dans les *Annali di Matematica.*

Je ne puis enfin me passer de faire remarquer que, si l'on avait reconnu l'instabilité pour les valeurs rationnelles du moyen mouvement n, on pourrait démontrer qu'il en est de même pour toute valeur de n.

(23 juillet 1900).

(*) [In questo vol.: XXVIII, pp. 461-464; XXIX, pp. 465-467].