

FUNZIONI ARMONICHE
E TRASFORMAZIONI DI CONTATTO (*)

«Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti», t. LIX,

pp. 671-675

1. - Sia una trasformazione di contatto nel piano (biunivoca e continua nel campo che si considera) definita dalle formule

$$(1) \quad \begin{cases} X = f(x, y, p) \\ Y = \varphi(x, y, p) \\ P = \psi(x, y, p) . \end{cases}$$

Per la definizione stessa di trasformazione di contatto, rimane invariante la equazione pfaffiana

$$(2) \quad dy - p dx = 0 .$$

Immaginiamo di attribuire alle variabili x, y, p valori complessi $x_1 + ix_2, y_1 + iy_2, p_1 - ip_2$ e scindiamo in f, φ, ψ , e corrispondentemente in X, Y, P , la parte reale dalla immaginaria, ponendo

$$\begin{aligned} f &= f_1 + if_2, & \varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2, & \psi &= \psi_1 - i\psi_2; \\ X &= X_1 + iX_2, & Y &= Y_1 + iY_2, & P &= P_1 - iP_2. \end{aligned}$$

$f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ risultano funzioni reali delle sei variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2$, e le (1), interpretate nel campo reale, definiscono complessiva-

(*) Presentata dal Socio corrispondente F. D'ARCAIS nella adunanza del 20 maggio 1900.

mente una trasformazione

$$(1') \quad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2; y_1, y_2; p_1, p_2) \\ X_2 = f_2(x_1, x_2; y_1, y_2; p_1, p_2) \\ Y_1 = \varphi_1(x_1, x_2; y_1, y_2; p_1, p_2) \\ Y_2 = \varphi_2(x_1, x_2; y_1, y_2; p_1, p_2) \\ P_1 = \psi_1(x_1, x_2; y_1, y_2; p_1, p_2) \\ P_2 = \psi_2(x_1, x_2; y_1, y_2; p_1, p_2) \end{cases}$$

delle sei variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2$ nelle omologhe maiuscole.

Quali sono le proprietà caratteristiche della trasformazione (1')?

Quelle evidentemente, che scaturiscono dal lasciar invariante la (2), ossia

$$dy_1 + i dy_2 - (p_1 - ip_2)(dx_1 + i dx_2) = 0,$$

il che è quanto dire il sistema delle due equazioni di PFAFF

$$(2') \quad \begin{cases} dy_1 - (+ p_1 dx_1 + p_2 dx_2) = 0 \\ dy_2 - (- p_2 dx_1 + p_1 dx_2) = 0. \end{cases}$$

Queste esprimono che y_1, y_2 sono funzioni armoniche *associate* delle variabili x_1, x_2 . Risulta infatti da esse che y_1, y_2 , considerate come funzioni delle variabili indipendenti x_1, x_2 , ammettono rispettivamente per derivate p_1, p_2 e $-p_2, p_1$. Si ha dunque

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_1},$$

donde appunto apparisce che y_1, y_2 sono funzioni armoniche associate.

Le trasformazioni del tipo (1') conservano la relazione, espressa dalle (2'). Esse fanno perciò corrispondere ad ogni coppia y_1, y_2 di funzioni armoniche associate delle variabili x_1, x_2 , e loro derivate, funzioni associate Y_1, Y_2 , delle nuove variabili X_1, X_2 , e derivate relative.

2. - Reciprocamente la più generale trasformazione fra sei variabili, dotata di queste proprietà, rientra nella classe (1').

Per riconoscerlo, consideriamo le funzioni

$$X = X_1 + iX_2, \quad Y = Y_1 + iY_2, \quad P = P_1 - iP_2$$

delle sei variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2$.

Dacchè, per ipotesi, la trasformazione ha da lasciare invariante il sistema (2'), o, ciò che è lo stesso, la (2), dovrà sussistere una identità della forma

$$(3) \quad dY - P dX \equiv \varrho(dy - p dx),$$

il fattore ϱ essendo a priori indeterminato.

Ciò posto, tutto si riduce a far vedere che X, Y, P dipendono esclusivamente dai tre argomenti

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2, \quad p = p_1 - ip_2,$$

(non da tutte le sei variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2$).

Poniamo a tale scopo

$$x_1 - ix_2 = \xi, \quad y_1 - iy_2 = \eta, \quad p_1 + ip_2 = \pi,$$

e notiamo che dalla (3), risguardando, come è lecito, x, y, p, ξ, η, π quali variabili indipendenti, scendono le relazioni

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} = -\varrho p, \\ \frac{\partial Y}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} = \varrho, \\ \frac{\partial Y}{\partial p} - P \frac{\partial X}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

$$(5) \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} - P \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} - P \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial Y}{\partial \pi} - P \frac{\partial X}{\partial \pi} = 0.$$

Occupiamoci per un momento del solo sistema (4), (5).

Le (4), eliminandone q e P , danno

$$(8) \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ x & p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & p \end{pmatrix} = 0 \quad (1).$$

In modo analogo, dalle due prime equazioni (4) e dalla (5) segue

$$(9) \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ x & \xi \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0,$$

mentre l'ultima delle (4) e la (5) stessa porgono

$$(10) \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} = 0.$$

Formiamo la combinazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \xi \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} - p \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} = 0.$$

Il primo membro può essere scritto

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\begin{pmatrix} X & Y \\ x & p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} X & Y \\ y & p \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0,$$

e, in virtù della (8), rimarrà

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0,$$

che è la condizione di integrabilità del sistema (9), (10). Dovremo di conseguenza avere simultaneamente

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \xi \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \xi \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \xi \end{pmatrix} = 0.$$

(1) Per brevità di scrittura, rappresentiamo colla notazione $\begin{pmatrix} X & Y \\ u & v \end{pmatrix}$ il determinante funzionale di X, Y rapporto a due generiche variabili u e v .

In modo analogo, la considerazione dei sistemi (4), (6) e (4), (7) porta alle equazioni

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X & Y \\ x & \eta \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \eta \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \eta \end{pmatrix} = 0; \\ \begin{pmatrix} X & Y \\ x & \pi \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \pi \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \pi \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ora, se X , Y dipendessero effettivamente da qualcuno dei tre argomenti ξ , η o π , le soprascritte equazioni esigerebbero che fossero eguali a zero i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial p} \end{vmatrix},$$

talchè in definitiva risulterebbe identicamente nulla la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial \pi} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \pi} \end{vmatrix}$$

e non sarebbero perciò indipendenti X e Y . Questo è impossibile, perchè le variabili trasformate X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , P_1 , P_2 debbono necessariamente suporsi funzioni indipendenti delle primitive.

Concludiamo pertanto che X , Y (e così P , in causa delle (4)) non contengono ξ , η , ζ , ossia sono funzioni delle variabili complesse x , y , p . La trasformazione appartiene dunque al tipo (1'), come dovevasi dimostrare.

The first section of the report discusses the background of the study and the objectives of the research.

The second section describes the methodology used in the study, including the sample size and the data collection methods.

The third section presents the results of the study, showing the distribution of responses across the different categories.

The fourth section discusses the implications of the findings and provides recommendations for future research.

The fifth section concludes the report by summarizing the key findings and reiterating the importance of the study.

The sixth section provides a detailed analysis of the data, including statistical tests and confidence intervals.

The seventh section discusses the limitations of the study and the potential sources of bias.

The eighth section provides a final summary of the report and highlights the main contributions of the research.

The ninth section discusses the broader context of the study and its relevance to the field of research.

The tenth section provides a detailed discussion of the theoretical framework underlying the study.

The eleventh section discusses the practical applications of the findings and the potential for policy change.

The twelfth section provides a final summary of the report and reiterates the main findings.

The thirteenth section discusses the future directions of the research and the need for further investigation.

The fourteenth section provides a detailed discussion of the research methodology and the data analysis techniques.

The fifteenth section discusses the ethical considerations of the study and the steps taken to ensure integrity.

The sixteenth section provides a final summary of the report and highlights the key takeaways.