

LEVI CIVITA

—

OPERE
MATEMATICHE

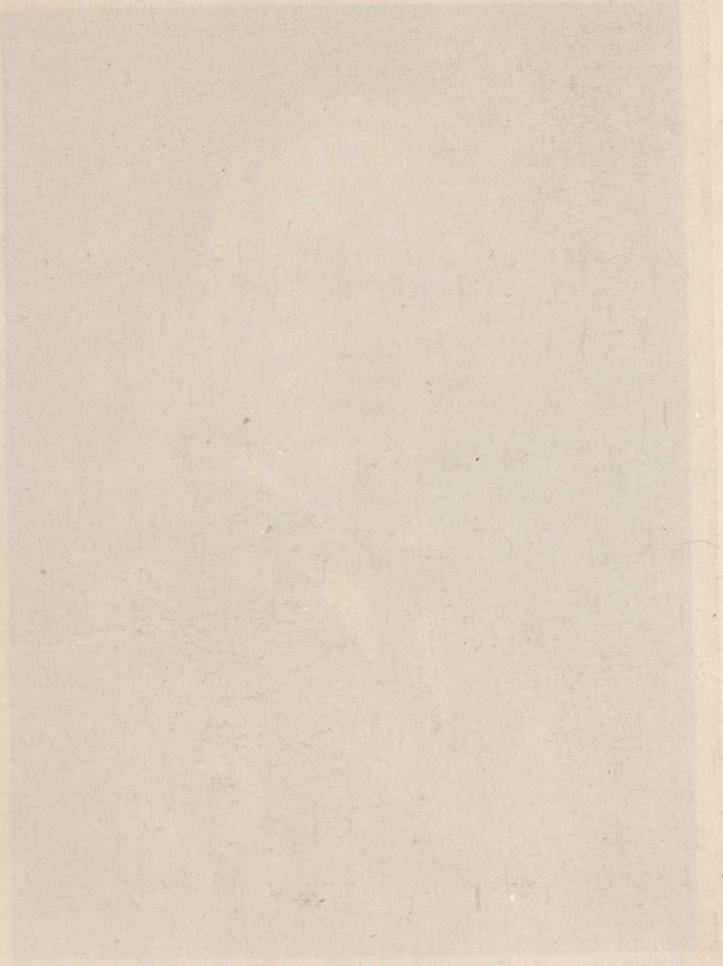
I

W.A.B.

OPERE MATEMATICHE
DI TULLIO LEVI-CIVITA

OTRZEWA MATRYCZNA
DIAGONALIZACJA

TOLEDO LEVINOVITZ





1938

Tullio Levi - Civita

TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE

A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume primo
1893 - 1900

I



NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1954

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

N^o 381



11.273/I

51.26.

Bologna - La Monografica - III-1954

R181/5
www.rcin.org.pl

PREFAZIONE

Negli anni immediatamente successivi alla ricostituzione dell'Accademia Nazionale dei Lincei il Consiglio accademico approvò unanime la proposta formulata dal Presidente Guido Castelnuovo di pubblicare le Opere matematiche di TULLIO LEVI-CIVITA, e l'attuazione di questa iniziativa fu affidata ad un Comitato costituito dallo stesso Presidente Guido Castelnuovo, dai soci Ugo Amaldi, Giulio Krall, Enrico Persico, Antonio Signorini, Angelo Tonolo e dal prof. Giovanni Lampariello.

Nel settembre 1950 il prof. Signorini, invitato a tenere alcune conferenze alla « J. Hopkins University », ebbe occasione di parlare di tale iniziativa negli ambienti scientifici di Baltimora, e immediatamente il « Department of Mathematics » di quella Università, su proposta del prof. J. Carstou, deliberò di aderirvi con un suo contributo. Il Comitato, anche a nome dell'Accademia, rinnova qui pubblicamente alla « J. Hopkins University » l'espressione della sua riconoscenza.

Delle opere del LEVI-CIVITA fu deliberato di pubblicare le sole Memorie e Note, escludendo i Trattati; e, dopo lunghe e ponderate discussioni, il Comitato unanime ritenne che, a meglio mettere in luce la naturale evoluzione del pensiero matematico del grande scienziato, convenisse seguire nella pubblicazione l'ordine cronologico. Si è posta la più attenta cura nel riprodurre con scrupolosa fedeltà i singoli lavori in ogni particolare della loro forma originale e, come unica deroga a questo criterio, si è tenuto conto di alcune postille autografe dell'Autore su esemplari da Lui stesso posseduti o donati ad amici e discepoli ().*

(*) Queste postille sono messe in rilievo da note a piè di pagina, richiamate nel testo con asterischi e contrassegnate con la sigla [N.d.R.] ≡ [Nota dei Revisori].

del pubblico Ginnasio «Tito Livio», dove i condiscipoli, tutti maggiori di età, furono ben presto affascinati da quel minuscolo compagno, vivace e socievole, che con la stessa spontanea semplicità, con cui partecipava alla loro chiassosa spensieratezza, li superava poi tutti nella scuola per la prontezza del capire e la facilità dell'apprendere. Questa superiorità si palesò addirittura eccezionale, quando il LEVI-CIVITA, quattordicenne, passò al Liceo; e, dall'inizio di quel triennio, si venne manifestando in lui più decisamente quell'inclinazione agli studi matematici, che prima era rimasta in qualche modo velata dall'eclettico fervore d'interessi, che, anche nel campo delle lingue classiche e, più particolarmente, della storia, lo portava ad allargare e approfondire la sua cultura ben oltre i limiti dei programmi scolastici.

In quella scoperta di se stesso egli era assecondato, con amorevole comprensione, dal suo professore di matematica del Liceo — Paolo Gazzaniga, insegnante efficacissimo e valente cultore della Teoria dei numeri — e da uno zio materno, ingegnere a riposo, che amava rinfrescare le sue conoscenze matematiche, rileggendo con quel nipote d'eccezione i vecchi suoi testi universitari. Erano i venerandi trattati del Todhunter e del Salmon, che non solo fornivano al giovane LEVI-CIVITA un largo campo di esercitazioni svariate, ma, lasciando spesso insoddisfatto il finissimo senso critico connaturato alla sua mentalità, lo inducevano alle prime prove di riflessione autonoma e di ricerca. Il Gazzaniga, anche negli ultimi anni della sua vita, rievocando la sorprendente precocità di quel suo discepolo, amava ricordarne un tentativo di dimostrazione del postulato delle parallele, che correva, elegante e ineccepibile, sino ad una inavvertita ammissione finale, in cui si annidava la petizione di principio. A quindici anni, nella delusione di quell'insuccesso, il LEVI-CIVITA non poteva certo immaginare che un giorno avrebbe legato per sempre il suo nome ad una estensione, altrettanto geniale quanto feconda, di quel concetto stesso di parallelismo.

Alla fine del Liceo ebbe chiara e sicura la certezza della sua vocazione. Il padre aveva a lungo accarezzato il sogno di veder continuata da un tale erede l'opera sua; ma, mente illuminata e cuore consapevole dei doveri paterni, non si oppose alla libera scelta del figlio, e questi, nel 1890, s'iscrisse all'Università di Padova per la Laurea in Matematica.

In quell'antico Studio, custode nei secoli delle più pure e gloriose

tradizioni del pensiero scientifico italiano, i matematici di quel tempo erano G. Veronese, G. Ricci-Curbastro, F. d'Arcais e, trasferitovi qualche anno innanzi da Pisa per la Meccanica superiore, E. Padova. Il Veronese, nella piena maturità della sua produzione scientifica, dava allora gli ultimi tocchi ai *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* e il Ricci era ormai entrato nella fase conclusiva della costruzione del *Calcolo differenziale assoluto*, mentre il d'Arcais, già discepolo del Dini, recava nell'insegnamento un suo personale equilibrio di valutazione delle esigenze critiche rispetto alle finalità costruttive dell'Analisi — in senso, quasi si direbbe, euleriano — e il Padova, nei suoi corsi di Meccanica, s'ispirava direttamente agli indirizzi e all'opera del Betti e del Beltrami.

Ma dai corsi propedeutici, il LEVI-CIVITA, che già se li era da sé anticipati nel triennio liceale, ben poco aveva da apprendere, se non forse una visione sintetica e sistematica di nozioni ormai familiari, talchè, fin dai primi contatti coi nuovi Maestri, egli fu tratto a seguirne l'opera viva d'indagine personale e quasi a dividerne lo sforzo e la passione. Nel quadro vasto e, sotto qualche aspetto, farraginoso dei *Fondamenti* del Veronese il LEVI-CIVITA, con singolare intuito, fissò l'attenzione su uno dei risultati più originali e più significativi, cioè sulla dimostrazione della possibilità di Geometrie non-archimedee; e, quasi presago delle obiezioni mal fondate, con cui più tardi sarebbe stata contesa al Veronese la legittima priorità di quel ritrovato, si accinse a ricercarne una giustificazione diretta per via nettamente analitica. Inaugurava, così, fra il '91 e il '92, la sua produzione scientifica con una memoria *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici*, che ancora oggi appare, piuttosto che il primo saggio di un diciottenne, l'opera matura di un ricercatore provetto. Segue immediatamente, in tutt'altro indirizzo, la Dissertazione di Laurea *Sugli invarianti assoluti*, nella quale il LEVI-CIVITA, ricollegando per primo le vedute del Ricci alle teorie e ai metodi di Sophus Lie, di cui fin d'allora palesa un pieno e sicuro possesso, studia la forma e le proprietà dei sistemi differenziali, atti a definire, per un qualsiasi sistema di funzioni di quante si vogliono variabili, soggette alla più generale legge mista di covarianza e contravarianza, gl'invarianti differenziali e integrali, non già, come nel Calcolo differenziale assoluto, rispetto al gruppo di tutte le possibili trasformazioni, bensì di fronte a un qualsiasi altro gruppo continuo (finito o infinito).

E la Laurea fu, più che per lui, una festosa solennità per i suoi Maestri, ormai ben consapevoli delle ascese, cui, nel campo matematico, era predestinato quel discepolo.

Sul cammino di ogni giovane scienziato, la Laurea, come passaggio dalla vigilata attività scolastica alla libera estrinsecazione delle iniziative personali, segna per lo più l'inizio di un periodo tormentoso di ricerca dell'orientamento; e, in qualche modo, anche il LEVI-CIVITA dovette risentire quell'intimo travaglio, ma non per questo rallentò la sua attività.

Conclusa una ricerca di *Teoria dei numeri*, con la quale perveniva ad una espressione, sotto forma di residuo, del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo, si trasferì per alcuni mesi a Bologna, dove allora insegnavano l'Enriques, il Pincherle, l'Arzelà, il Donati; e in quell'ambiente di raccolto fervore speculativo trovò quotidiane occasioni a ricambi d'idee e nuovi incentivi all'innata sua versatilità. Attratto dalle ricerche del Pincherle sulle operazioni funzionali lineari, rappresentabili per mezzo d'integrali curvilinei sul piano complesso, e, ravvisato in quella classe d'operazioni un nuovo campo per l'applicazione di vedute gruppali, ne determinò, sotto restrizioni imposte dalla natura del problema, tutti i gruppi continui infiniti; e dai risultati così conseguiti dedusse da un lato la caratterizzazione delle equazioni differenziali ordinarie riducibili con un cambiamento di funzione incognita alla forma lineare e dall'altro un principio generale e uniforme per l'inversione degli integrali definiti.

Si può dire che con queste ricerche il LEVI-CIVITA abbia chiuso la fase iniziale della sua attività, chè già l'anno successivo, a Pavia, dov'era stato nominato Professore interno alla Scuola Normale Superiore annessa a quella Facoltà di Scienze, si affermava poderosamente, nel campo della Meccanica analitica, con quella ricerca sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche, che per l'importanza dei risultati e l'originalità dei procedimenti, non meno che per la suscettibilità di sviluppi ulteriori, è rimasta classica. Del problema generale della mutua trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche, posto qualche anno innanzi dall'Appell, s'erano già occupati, senza giungere a conclusioni esaurienti, vari matematici, in particolare il Painlevé, che lo aveva precisato, rilevandone la riducibilità alla determinazione di tutti i *corrispondenti* di un dato sistema dina-

mico, cioè di tutti quei sistemi che hanno dato comuni col le traiettorie; e il LEVI-CIVITA, ripresa *ab initio* la questione e analizzatane con lucidezza ed eleganza mirabili l'impostazione generale, ne affrontò la discussione nell'ipotesi dell'assenza di forze applicate. Era così condotto, sotto l'aspetto geometrico, al problema generale delle mutue rappresentazioni geodetiche delle varietà riemanniane a un qualsiasi numero di dimensioni, cioè ad un problema, cui, come oggi appar ben chiaro, si presentavano direttamente e specificamente adeguati i metodi del Calcolo differenziale assoluto; e, appunto con l'uso sagacissimo di tali metodi, egli pervenne alla conclusione che per la più generale coppia di sistemi dinamici corrispondenti, dotati di uno stesso numero n di gradi di libertà e non sollecitati da forze, sono possibili precisamente n tipi, fra loro distinti, caratterizzati ciascuno dal numero degli integrali primi quadratici e, conseguentemente, da altrettante forme canoniche, da lui esplicitamente assegnate, per le rispettive energie cinetiche. Così, ad opera del LEVI-CIVITA, il Calcolo differenziale assoluto, che sino allora il Ricci, fors'anche contrastato dall'incomprensione dei matematici di quel tempo, aveva cimentato quasi esclusivamente entro i confini tradizionali della Geometria differenziale metrica, era per la prima volta portato a mostrare la sua potenza nella trattazione di un problema nuovo ed elevato, di fronte al quale sarebbero riusciti vani mezzi d'indagine meno penetranti.

Ed un'altra non meno suggestiva illustrazione della fecondità di quei procedimenti il LEVI-CIVITA forniva poco più tardi con la determinazione dei tipi di potenziali dello spazio, che si possono far dipendere da due sole coordinate. Era questo un problema, che già si era implicitamente presentato nella *Commentatio mathematica* del Riemann e che, più recentemente, era stato segnalato, per il suo interesse, dal Volterra, che, mirando a raccogliere in una teoria più comprensiva ed elevata gli sviluppi di C. Neumann sul potenziale logaritmico e le ricerche del Beltrami sui potenziali simmetrici, aveva iniziato lo studio generale di codesti potenziali binari. La diretta traduzione analitica di quel problema conduceva a sistemi differenziali di una complicazione addirittura inestricabile; e il LEVI-CIVITA, con una di quelle geniali vedute semplificatrici, che gli furono caratteristiche, notò che necessariamente risulta binario ogni potenziale, che ammetta una trasformazione infinitesima in se stesso; onde, classificando i sottogruppi a un solo parametro del gruppo ∞^7 delle

similitudini, che è il più ampio gruppo continuo puntuale ammesso dall'equazione del Laplace, pervenne a cinque tipi di potenziali binari, di cui uno completamente nuovo (i potenziali spirali). Ma con ciò le difficoltà intrinseche del problema non erano vinte, bensì, in qualche modo, spostate, giacchè restava da assodare se altri tipi sfuggissero alla enumerazione così ottenuta; ed è qui che il LEVI-CIVITA faceva intervenire, con piena aderenza concettuale al problema e con insuperabile eleganza, i metodi del Calcolo differenziale assoluto. Associata ad ogni potenziale binario la rispettiva congruenza di curve equipotenziali e approfondita adeguatamente la geometria intrinseca delle congruenze di curve, ne traeva la conclusione che i soli potenziali binari non trasformati in sè da un gruppo ∞^1 di similitudini sono quelli, che risultano caratterizzati come aventi a congruenza equipotenziale una qualsiasi congruenza rettilinea del Ribaucour e che, secondo un'osservazione del Klein, coincidono coi potenziali a parametro differenziale primo identicamente nullo, già considerati dal Jacobi.

Nel frattempo, spentosi prematuramente Ernesto Padova, il LEVI-CIVITA, già nel novembre del 1896, era stato chiamato a succedergli per incarico; e, alla fine di quello stesso anno accademico, si aggiudicava, per concorso, la cattedra di Meccanica razionale, assumendo, qualche anno dopo (1902), per incarico, anche l'insegnamento della Meccanica superiore.

Tornava così, maestro fra i suoi maestri, in quella stessa Università, che non più di tre anni innanzi lo aveva avuto scolaro; e nella quiete della città natale, nella raccolta intimità della famiglia paterna trovava pienamente appagate la sua profonda affettività e l'innata aspirazione ad una semplicità ordinata e tranquilla di abitudini, che, fuori di ogni cura materiale, gli permettesse di concentrarsi tutto in un'intensa vita di pensiero.

A Padova insegnò per oltre vent'anni e l'opera scientifica da lui compiuta in quel periodo appare prodigiosa per la vastità degli sviluppi e, al tempo stesso, per la meditata perfezione di ogni ricerca particolare. Matematico nato nel pieno senso della parola, egli passava senza sforzo dall'uno all'altro di campi svariati — dalla meccanica analitica all'elettromagnetismo, dalla meccanica celeste alla teoria del calore, dall'idromeccanica all'elasticità — e ovunque affrontava problemi precisi ed elevati, per lo più i problemi fondamen-

tali caratteristici dei singoli indirizzi considerati. Dotato di una sicura e acutissima potenza logica, in cui talvolta pareva riflettersi la mentalità giuridica del padre, e guidato da una larga visione storica dell'evoluzione dei concetti e dei metodi matematici, attinta direttamente alle fonti classiche, sottoponeva ogni problema a una profonda e serrata analisi preliminare, diretta a individuarne gli elementi logici irriducibili; e le difficoltà così sceverate e graduate superava l'una dopo l'altra, applicando a ciascuna, nella sua piena padronanza dell'Analisi, i procedimenti deduttivi più semplici e meglio adeguati allo scopo, spesso da lui medesimo affinati e rielaborati sotto nuove forme in ricerche collaterali. Grazie a quella sua tecnica concettuale di schematizzazione dei problemi, riusciva ad imprimere alle sue trattazioni caratteri inconfondibili di profondità, di chiarezza, di eleganza algoritmica, e a mettere in luce, fra ordini di questioni estrinsecamente lontani, ravvicinamenti inaspettati, nessi riposti e non di rado precisi ed intrinseci rapporti di equivalenza astratta.

Quel ventennio di attività padovana s'inizia con un poderoso gruppo di ricerche di meccanica analitica, e prime si presentano quelle sulla stabilità dei fenomeni di moto, e, più in generale, delle soluzioni dei sistemi differenziali. Com'è ben noto, quest'ordine di questioni, la cui lontana origine risale alla *Mécanique analytique* del Lagrange, che vi aveva stabilito il suo metodo delle piccole oscillazioni, era stato ripreso e approfondito dal Dirichlet, e, più recentemente, dal Poincaré e dal Ljapunov; e nei casi via via più larghi, così considerati, si era assodato che in generale la stabilità, a differenza dell'instabilità, è un carattere di natura nettamente quantitativa, talchè il Poincaré aveva potuto affermare che la instabilità è la regola, la stabilità soltanto un'eccezione. Tuttavia ragioni di analogia, specialmente in base a circostanze segnalate dallo stesso Poincaré per sistemi differenziali normali, i cui secondi membri dipendano dal tempo, sembravano render presumibile che, nei problemi di meccanica celeste, la stabilità potesse assumere un carattere meno eccezionale di quel che le va riconosciuto in astratto. Il LEVI-CIVITA dimostrò che tale presunzione non era fondata. Introdotto e sviluppato un suo metodo generale, che riconduce il giudizio di stabilità o instabilità di ogni singola soluzione di un sistema differenziale a quello relativo a una ben deter-

minata trasformazione puntuale, e, trattane una nuova dimostrazione, singolarmente semplice e perspicua, del teorema fondamentale del Ljapunov, cimentò quel suo metodo su casi non prima considerati e pervenne ad assodare che anche soluzioni periodiche, che in prima approssimazione appaiono stabili, risultano in senso rigoroso instabili. Così, nel caso del problema ristretto dei tre corpi, poté giungere alla conclusione, altrettanto significativa quanto inattesa, che per le soluzioni prossime a moti circolari uniformi esistono nel piano dei tre corpi infinite zone d'instabilità. Nuovi apporti a quello stesso ordine di questioni sono stati recati più tardi da altri matematici, particolarmente dal Birkhoff, ma, nei riguardi della stabilità, nulla di sostanziale si è sinora potuto aggiungere a quanto già aveva visto il LEVI-CIVITA.

Altro contributo geniale alla Meccanica analitica egli recava, in quello stesso periodo di tempo, con quel suo procedimento di sorprendente evidenza geometrica — e ormai accolto nei trattati sotto il suo nome — che, estendendo il metodo della ignorazione delle coordinate, permette di determinare, col minimo d'integrazioni, famiglie di soluzioni per quei sistemi canonici, o anche differenziali normali quali si vogliano, che ammettono più integrali primi o più relazioni invarianti, in involuzione fra loro. Sulla base di tale suo procedimento costruiva per la prima volta una teoria generale dei moti stazionari, che gli consentiva non solo di ritrovare con metodo uniforme tutti i casi noti — in particolare, le soluzioni periodiche del problema dei tre corpi, determinate dal Lagrange — ma di scoprirne anche di nuovi, e in parte inattesi, con la classificazione completa dei moti stazionari di un corpo rigido con un punto fisso, nel caso della Kowalevska.

Ma già fra l'una e l'altra delle precedenti ricerche, si era volto alla Meccanica celeste e aveva iniziato quella serie concatenata d'indagini, che, per tappe successive, dal 1903 al 1916, doveva condurlo alla regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi nella prossimità di un urto binario. Lo studio analitico del comportamento dei tre corpi nelle vicinanze di un urto era stato iniziato dal Painlevé, che, nelle sue Lezioni di Stoccolma, era stato condotto a prospettare come probabile che l'urto binario dovesse implicare due relazioni uniformi fra le coordinate e le componenti delle velocità dei tre corpi e che, nel caso particolare del problema piano, dovesse bastare una condizione sola, l'altra risultando soddisfatta per iden-

tità. Il LEVI-CIVITA, per concentrare gli sforzi sul nodo della questione, prese a considerare il caso più semplice, cioè il « problema ristretto », nel quale non si possono verificare che urti binari; e, traverso un'analisi finissima della singolarità che, in una posizione d'urto, insorge per il sistema differenziale che regge il moto, non solo riuscì a costruire sotto forma esplicita la condizione d'urto, che, come aveva presunto il Painlevé, risulta unica e uniforme, ma pervenne, con un cambiamento semplicissimo di parametri, a far sparire quella singolarità, senza alterare la forma canonica del sistema differenziale. Gli fu agevole, dopo ciò, regolarizzare in modo analogo il problema piano generale; ma il caso spaziale resistette lungamente ai suoi sforzi, perchè gli si mostravano insufficienti alla voluta regolarizzazione non solo le trasformazioni puntuali, che erano bastate nei casi precedentemente trattati, bensì anche le usuali trasformazioni canoniche, che si riconnettono al moto ellittico; e, soltanto dopo reiterati tentativi, potè nel 1916 raggiungere lo scopo, grazie ad una nuova trasformazione canonica, da lui desunta dal moto parabolico.

È noto che già nel 1912, cioè prima che codeste ricerche del LEVI-CIVITA fossero concluse, il finlandese Sundmann era pervenuto ad una regolarizzazione del problema generale dei tre corpi e ne aveva dedotto che, in una soluzione qualsiasi, le coordinate dei tre corpi e il tempo sono funzioni olomorfe di un parametro per tutti i valori reali di esso, in corrispondenza biunivoca con quelli del tempo, sicchè posizione e tempo si possono esprimere per mezzo di sviluppi in serie sempre convergenti, non soltanto fino ad un eventuale urto, ma anche al di là di esso. Risultati d'interesse indiscutibilmente eccezionale, poichè fornivano una prima soluzione rigorosa di un celebre problema, intorno al quale si erano vanamente affaticati i maggiori matematici; ma non ne veniva sminuita l'importanza delle conclusioni del LEVI-CIVITA. Mentre il Sundmann alla regolarizzazione nell'intorno di un urto era pervenuto in modo indiretto, introducendo un numero non indifferente di variabili ausiliarie parassite e facendo uscire il sistema differenziale dal quadro delle equazioni della Dinamica, il LEVI-CIVITA aveva raggiunto lo scopo per via diretta e aderente alla natura specifica della questione, conservando al sistema differenziale, che regge il fenomeno, la sua originaria forma canonica e mantenendo così applicabili i risultati teorici e i metodi di calcolo della Meccanica analitica.

**

Le indagini fondamentali sin qui ricordate valgono a caratterizzare l'elevatezza, non la vastità dell'opera del LEVI-CIVITA in quel primo, più fervido periodo della sua attività; chè ad esse si avvienda e si intreccia tutta una serie di altre ricerche, di cui talune, per sua iniziativa e sotto la sua guida, fornirono a numerosi discepoli argomento di ulteriori sviluppi. Restando ancora nel campo della Meccanica analitica e della Meccanica celeste, mi limito a ricordare, in un'arida enumerazione, le più significative: condizione necessaria e sufficiente per l'equazione caratteristica delle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili e classificazione dei tipi nel caso di due variabili; studio analitico dell'equazione del Kepler e determinazione della regione di olomorfismo dell'anomalia eccentrica, come funzione dell'eccentricità; prima dimostrazione rigorosa dell'esistenza di un moto medio (asintotico) del nodo lunare; costruzione di un nuovo sistema canonico di elementi ellittici, che poi l'Andoyer ha riconosciuto vantaggioso in problemi di Astronomia; nuova riduzione esplicita delle equazioni differenziali del problema generale dei tre corpi, nella quale, con sobrietà di sviluppi pari all'eleganza, si assegnano separatamente, in forma espressiva, il sistema ridotto a quattro gradi di libertà nel piano dei tre corpi e le equazioni supplementari, che, quando sia integrato il sistema ridotto, permettono di determinare, con semplici quadrature, la posizione di codesto piano nello spazio; infine, una trattazione, sulla base d'ipotesi più larghe di quelle tradizionali, della teoria meccanica degli anelli di Saturno, dalla quale, tra l'altro, tenuto conto dei dati numerici d'osservazione, si desume una nuova presunzione in favore dell'ipotesi che l'anello non sia continuo, nè assimilabile ad un continuo, bensì risulti costituito da uno sciame di meteoriti abbastanza spazati, perchè ne risultino quasi trascurabili le azioni reciproche.

Sul problema degli anelli di Saturno egli è tornato due volte (1908, 1916), valendosi dei risultati generali, da lui stesso precedentemente stabiliti in una preliminare indagine asintotica sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi ad essa e in uno studio diretto, e analiticamente delicatissimo, sull'autopotenziale di un tubo sottile; e tali risultati costituiscono per se stessi il nucleo essenziale di un nuovo capitolo, aggiunto dal LEVI-CIVITA alla teoria classica del potenziale newtoniano, che ad opera sua e di suoi discepoli doveva in seguito dar luogo ad altre interessanti applicazioni.

Ma conviene oramai passare ad un altro campo, all'Idrodinamica, in cui l'opera del LEVI-CIVITA ha suscitato una larga corrente d'idee e di ricerche. Risale allo Stokes e allo Helmholtz la prima idea che la resistenza opposta da un fluido alla traslazione uniforme di un solido immerso sia intimamente legata alle discontinuità provocate dal solido nel moto del fluido circostante; ma lo studio di quei moti discontinui, anche considerati soltanto in due dimensioni e schematizzati mediante la cosiddetta « ipotesi della scia », presentava difficoltà analitiche gravissime, sicchè lo stesso Helmholtz ed altri dopo di lui — dal Bobylev al Love — non ne erano venuti a capo se non in casi particolarissimi di profili mobili rettilinei; e, per quanto tutti quei ricercatori avessero fatto ricorso alla rappresentazione conforme, in qualche modo suggerita dalla natura della questione, i procedimenti diversi da loro usati caso per caso non davano alcuna norma sicura per la trattazione di casi nuovi, in particolare per lo studio di moti dovuti a profili curvilinei. Il LEVI-CIVITA, in una celebre Memoria del 1906, affrontava in tutta la sua generalità il problema in piano orizzontale e, desunta da un'esauriente analisi qualitativa del fenomeno la rappresentazione conforme più aderente ai caratteri fisici della questione, perveniva all'integrazione generale dei moti irrotazionali, dotati di scia, per ogni possibile forma del profilo che li provoca; onde poi deduceva, con un elegante procedimento, fornito dalla teoria dei residui del Cauchy, l'espressione della resistenza sotto forma semplice e impreveduta. L'importanza di questa ricerca è data, forse più ancora che dai risultati, dal metodo inauguratovi dal LEVI-CIVITA, che doveva ben presto rivelare la sua larga fecondità. Egli stesso, applicandolo a problemi in piano verticale, nei quali non è più trascurabile, come in piano orizzontale, l'azione della gravità, poneva i fondamenti della teoria generale delle onde di canale, con particolare riguardo a quelle di tipo permanente; e sulla via da lui dischiusa un valoroso gruppo di discepoli diretti e di suoi continuatori davano vita ad una operosa scuola italiana d'Idromeccanica, mentre anche all'estero le sue vedute e i suoi risultati facevano sentire il loro forte influsso. Basterà ricordare i brillanti sviluppi dovuti a L. M. Brillouin e al Villat.

Ma negli indirizzi da lui stesso promossi il LEVI-CIVITA, aperta la via e raggiunti i risultati generali di carattere fondamentale, generalmente non amava insistere, quasi preferisse saggiare la vitalità

delle sue idee e la fecondità dei suoi apporti nelle ulteriori ricerche che suscitavano ad opera di altri; e, obbedendo alla naturale sua versatilità, recava il suo spirito chiarificatore su nuovi problemi, con una tale varietà d'iniziative che per ogni matematico di altra tempra avrebbe costituito una pericolosa dispersione di forze. Così, ancora nella fase giovanile della sua attività, aveva dimostrato come dalla teoria elettrodinamica dello Helmholtz si possa essere condotti alle equazioni di Maxwell-Hertz, quando si ammetta che le azioni a distanza, tanto di origine elettrostatica, quanto di origine elettromagnetica, si propaghino con velocità finita; poi nel 1901 assegnava una sua prima valutazione del massimo cimento dinamico nei sistemi elastici; nel 1902, in connessione con alcuni dubbi critici espressi dal Righi circa l'interpretazione di esperienze, allora molto discusse, sulla produzione di un campo magnetico per convezione elettrica, risolveva due questioni d'induzione elettrodinamica in base alla teoria (integrale) di Helmholtz-Hertz; nel 1904 traduceva una questione di massimo cimento specifico, presentatasi nella costruzione di cavi per trasporto di energia ad alto potenziale, in un problema di elettrostatica, da lui poi discusso e risolto fino a trarne precise norme costruttive di sicurezza; nel 1914, poste le basi dello studio del regime variabile del calore raggianti, stabiliva, in tali condizioni, l'equazione indefinita dell'irraggiamento. E, quasi a svago dello sforzo d'indagini di largo respiro, tornava, di quando in quando, a problemi particolari di Analisi pura, come, ad esempio con l'acuta osservazione sulle trascendenti intere di genere infinito (1902) o col teorema, oramai classico, sulle varietà caratteristiche delle equazioni di monogeneità delle funzioni di più variabili complesse (1905); oppure s'indugiava su questioni speciali di carattere più strettamente tecnico, suggeritegli dal suo duplice insegnamento di Meccanica razionale e di Meccanica superiore: contrazione delle vene liquide (1906); penetrazione dei proiettili (1906); regime e sforzo d'avviamento per veicoli trainati (1914); nuovo metodo per il tracciamento delle linee di azione degli ingranaggi (1917).

Sullo scorcio del periodo padovano, intorno al 1917, si iniziano le sue fondamentali ricerche relativistiche. Se si tien conto dell'ampiezza dei suoi orizzonti speculativi e della sua connaturata facilità a risentire e assimilare ogni nuovo orientamento del pensiero scientifico, può apparire che la sua attiva partecipazione a quel movi-

mento d'idee sia maturata con una certa lentezza. Ma, quanto pronto nel cogliere e dominare le idee nuove, altrettanto era cauto e ponderato nel consentire e nell'affermare. A dir vero, già durante la elaborazione della relatività ristretta egli era intervenuto, fra il 1908 e il 1909, con una sua teoria asintotica delle radiazioni elettriche, che, pur rispettando il principio di relatività, com'egli allora diceva, di Lorentz-Einstein-Minkowski, evitava ogni ipotesi cinematica di accomodamento (quali la rigidità delle cariche dell'Abraham o la contrazione lorentziana o l'ipotesi del Poincaré); ma, ancora nel 1911, in un suo magistrale Rapporto alla Società italiana per il progresso delle Scienze sulla *Estensione ed evoluzione della Fisica matematica nell'ultimo cinquantennio, con speciale riguardo all'Italia*, dopo aver rilevato la « tendenza rivoluzionaria » com'egli diceva testualmente « a fondere i concetti di spazio e di tempo e a negare l'invariabilità della massa che renderebbe... necessaria una ricostruzione *ab imis* di tutta la filosofia naturale », concludeva: « attendiamo per giudicare ». E, forse, a chiarire non soltanto quella sua prudente attesa, ma, sotto qualche aspetto, il suo abituale atteggiamento speculativo, possono valere le parole, con cui, qualche anno dopo, iniziava una sua conferenza al Seminario matematico di Roma, *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova Meccanica*: « In politica » egli disse in quell'occasione « non sono molti quelli che amano chiamarsi puramente e semplicemente conservatori, perchè conservatore si prende spesso a sinonimo di misoneista. Questo pericolo non c'è evidentemente in scienza. Nessun ricercatore può essere misoneista, ma molti cultori di scienza possono, quasi direi debbono essere conservatori per la stessa loro missione di custodire con gelosa cura un certo patrimonio intellettuale ben consolidato, e di vagliare con severo spirito critico tutto ciò che importa variazione o alienazione del patrimonio stesso ».

Ora è appunto con questo « severo spirito critico », guidato da un vigile senso storico della continuità evolutiva delle teorie scientifiche, che egli ha affrontato i problemi matematici della nascente relatività generale. Riprendendo alla base la formulazione analitica della teoria, assegnava anzitutto la corretta espressione del tensore gravitazionale, che sotto la forma allora attribuitagli dallo stesso Einstein, difettava di quell'invariantività, che doveva essere suo carattere essenziale, e, d'altro canto, implicava conseguenze fisiche non accettabili se non a patto di accomodamenti desunti dalla teoria

dei quanti; stabiliva poi i fondamenti della Statica einsteniana, riducendo le equazioni gravitazionali a quella forma spazialmente invariante, che ad esse conviene nel caso statico, e, classificatene, in base alle loro caratteristiche geometriche, le soluzioni possibili *a priori*, le determinava effettivamente in vari casi suscettibili di espressive interpretazioni meccaniche, di cui uno conduce ad un'ampia generalizzazione della soluzione dello Schwarzschild; riconosceva, infine, che, per ogni metrica stazionaria, il postulato fondamentale dell'Ottica einsteniana, enunciato dallo Hilbert, equivale al principio della minima durata del Fermat.

È poi ben noto che già l'Einstein aveva trovato nel Calcolo differenziale assoluto lo strumento algoritmico direttamente adeguato allo sviluppo matematico della sua concezione, in cui intervenivano, come elementi essenziali, le proprietà di curvatura della varietà riemanniana quadridimensionale spazio-tempo. Il LEVI-CIVITA, obbedendo alla costante sua tendenza semplificatrice, si volse a indagare se non fosse possibile ridurre e chiarire, nelle sue profonde ragioni di successo, l'apparato formale, che, traverso i procedimenti del Calcolo differenziale assoluto, conduce a individuare quella curvatura e a stabilirne il carattere invariante; e, movendo da una costruzione geometrica di sorprendente semplicità, scoperse il suo trasporto per parallelismo sulle varietà riemanniane a quante si vogliono dimensioni. Veniva così rivelato l'intrinseco significato geometrico delle operazioni fondamentali del Calcolo differenziale assoluto, il quale si trovava trasformato, come per un'improvvisa luce, da algoritmo aridamente formalistico in una teoria nitidamente concettuale. Ma la portata di quella geniale scoperta andava ben oltre quella geometrizzazione del Calcolo differenziale assoluto. La possibilità, messa in luce dal LEVI-CIVITA, di analizzare le proprietà di curvatura di una qualsiasi varietà riemanniana, considerandola come un continuo di elementi spaziali euclidei, raccordati fra loro per mezzo di una legge di trasporto per parallelismo, ha dato origine, per via di successive estensioni in vario senso, ad una vasta corrente d'indagini geometriche, cui attendono tuttora operosamente e fruttuosamente matematici di ogni paese. Può apparir singolare il fatto che uno dei più vivi e caratteristici indirizzi di ricerca della Geometria d'oggi sia stato promosso proprio da un matematico, che, ove, tornando a vecchie classificazioni — in verità ormai superate —, si badasse alla specie degli interessi speculativi in lui prevalenti e al

tipo delle tecniche preferite, andrebbe collocato fra gli analisti. Ma anche nel LEVI-CIVITA, come nella più gran parte dei nostri maggiori matematici, era innata quella profonda tendenza — di natura, in qualche senso, estetica — alla visione dell'essenza geometrica dei problemi, che costituisce una caratteristica saliente del genio matematico italiano.

Alla fine del 1918 la Facoltà di Scienze di Roma, conscia degli alti compiti, che, in quella tormentata ripresa delle relazioni scientifiche internazionali dopo la prima grande guerra, le tradizioni e la vittoria imponevano all'Italia, volle accrescere il prestigio del suo collegio di maestri insigni e chiamò nel suo seno il LEVI-CIVITA, che, superato non senza qualche contrasto il suo profondo attaccamento alla città natale, nel gennaio del 1919 assunse nell'Università romana la cattedra di Analisi superiore, da cui, due anni dopo, si trasferì a quella di Meccanica razionale.

Qui in Roma, per un altro ventennio, esplicò ancora più intensa e più larga la sua opera di Maestro, iniziando e guidando alla ricerca tutta una schiera di giovani matematici, che indirizzava sulle vie da lui stesso aperte, a tutti proponendo con inesauribile fantasia nuovi problemi, a tutti prodigando con generosa larghezza germi d'idee e norme direttive. Ma la sua guida non era costrizione, il suo consiglio non era imposizione di metodi o di vedute particolari. Comprensivo e rispettoso delle inclinazioni e delle attitudini di ciascun suo discepolo, le assecondava e le reggeva con una assistenza assidua e suggestiva, quanto discreta e quasi dissimulata, fino a suscitare le prime iniziative personali. Molti di quei giovani erano stranieri e, tornati ai loro paesi, portano ancora oggi, nei loro insegnamenti universitari, il carattere di quella formazione speculativa nettamente italiana.

Poco prima di lasciar Padova, cedendo a reiterate insistenze di colleghi e discepoli, aveva accolto il disegno di sviluppare e fissare sistematicamente in un trattato le vedute personali e i risultati di rielaborazione critica e di esperienza didattica, maturati nel suo ventennale insegnamento di Meccanica; ed in me è sempre vivo, e ormai nostalgico, il ricordo dei lunghi colloqui, susseguitisi periodicamente per più anni, in cui mi veniva chiarendo il suo pensiero sui principî e gli sviluppi concatenati delle varie teorie, con una così larga e limpida visione d'insieme, con una così precisa e meditata

analisi di ogni nesso logico e di ogni possibile semplificazione dei procedimenti deduttivi, che poi lo sforzo di dar forma non indegna a quel pensiero lucidissimo si tramutava in un appassionante godimento.

Frattanto la rinomanza mondiale, ormai indiscussa, e l'eco dei suoi insegnamenti, gli procuravano sempre più frequenti inviti di Università straniere; e, a quando a quando, vi aderiva, vincendo la naturale riluttanza a distogliersi dalle sue abitudini di lavoro e ad interrompere anche per poco l'adempimento dei doveri accademici, che sempre osservò con scrupolosa dedizione. Fu così, successivamente, in Spagna, in Austria, in Germania, in Russia, in Olanda, in Svizzera, in Francia, negli Stati Uniti, nel Perù, in Argentina, nell'Uruguay, nel Brasile; e dovunque con trattazioni riassuntive delle sue teorie accrebbe il prestigio della Matematica italiana, dovunque, col suo fascino personale, suscitò, in quei lontani ambienti culturali, larghe correnti di simpatia per la Patria nostra.

Ma nè le assidue cure dedicate ai discepoli, nè le missioni all'estero interrompevano il suo lavoro, chè anzi egli ne traeva occasione non soltanto a rielaborare, talvolta radicalmente, gruppi di precedenti sue ricerche, ma anche ad affrontare nuovi ordini di problemi.

Al breve periodo dell'insegnamento di Analisi superiore appartiene un memorabile suo corso, in cui espose il Calcolo differenziale assoluto, ricostruito e rinnovato alla luce della sua nozione di trasporto per parallelismo; e ne vennero quelle *Lezioni* (1925), che, nella forma fedele e limpida data ad esse dal prof. Persico, allora suo discepolo, restano nella nostra produzione matematica un modello di perspicuità concettuale e di eleganza analitica. Furono subito tradotte in inglese (1927) e in tedesco (1928); e per la traduzione inglese il LEVI-CIVITA vi aggiunse una serie di nuovi capitoli, pubblicati anche a parte in italiano (*Fondamenti di Meccanica relativistica*, 1928), in cui tratteggiava l'evoluzione relativistica della Meccanica propriamente detta e dell'Ottica geometrica, secondo il suo costante criterio di prender le mosse dalle leggi classiche e di cercare induttivamente quali modificazioni (lievissime in condizioni ordinarie) si dovessero introdurre per rispecchiare le idee dell'Einstein; e vi trovava posto un suo profondo teorema di equivalenza dinamica in seconda approssimazione, da lui allora formulato (1926), che ha poi avuto le sue più significative applicazioni nel problema relativistico del moto dei pianeti intorno al Sole.

In quello stesso periodo di tempo tornava all'Idrodinamica. In una delle sue conferenze di Barcellona, pubblicate, oltre che in cata-

lano (1922), in italiano (*Questioni di meccanica classica e relativistica*, 1924) e in tedesco (1924), egli, pur mirando al caso tipico delle onde di canale, aveva anzitutto sottoposto ad una profonda analisi la generale nozione fisica di fenomeno ondoso, traducendo in termini matematici precisi una suggestiva veduta, che faceva risalire a Leonardo; e aveva poi inquadrato i suoi precedenti apporti alla teoria delle onde di canale in una magistrale trattazione sistematica delle classiche ricerche dell'Airy, del Gerstner, dello Stokes, del Rayleigh. Ma restava insoluto il problema — fondamentale in quella teoria — della determinazione di onde irrotazionali periodiche permanenti o, se si vuole, del passaggio dalla prima approssimazione dell'Airy alla soluzione rigorosa. Esso era stato oggetto di reiterati tentativi dello Stokes e del Rayleigh, che avevano spinto i loro calcoli alla seconda approssimazione; ma il metodo da loro seguito, pur essendo il più naturale, non era adatto a mostrare la via per le approssimazioni successive e tanto meno a preparare la verifica della convergenza. Nel 1925 il LEVI-CIVITA affrontò direttamente il problema e, vincendone le gravi difficoltà analitiche con l'uso di un nuovo tipo di funzioni maggioranti, da lui per primo ideate, lo risolse con pieno rigore nel caso di canali molto profondi. In tal modo, come ebbe poi a rilevare, nella sua alta autorevolezza, H. Lamb, il LEVI-CIVITA concludeva « an historic controversy », assegnando per mezzo di formule particolarmente maneggevoli non solo il profilo esatto di quelle onde, ma anche la relazione globale che lega l'altezza e la lunghezza d'onda al trasporto di liquido e alla velocità di propagazione. In relazione coi risultati del LEVI-CIVITA sono state effettuate numerose ricerche da suoi discepoli, come lo Struik, il Weinstein, il Geppert, e da altri matematici, come il Burgers e il Favre; e quest'ultimo ha potuto assodare che nei casi ordinari (in cui l'altezza dell'onda supera raramente $1/20$ della lunghezza) le differenze tra le onde irrotazionali del LEVI-CIVITA e quelle trocoidali del Gerstner sono praticamente trascurabili, sicchè risulta giustificato l'uso largo e pressochè esclusivo, che di quest'ultime si suol fare nelle applicazioni idrauliche e nautiche, benchè il loro carattere implichi l'intervento di misteriose azioni dissipative, che non sembrano avere riscontro nel fenomeno fisico. Le verifiche quantitative del Favre, nei confronti delle onde del LEVI-CIVITA, assicurano che in quelle applicazioni non v'è da preoccuparsi di tale difficoltà, perchè nei casi comunemente considerati la sua influenza non è praticamente sensibile.

I problemi matematici suggeriti dalla schematizzazione di fenomeni ondosi esercitavano sul LEVI-CIVITA un fascino particolare, e, qualche anno dopo (1930), egli si volse alla teoria della propagazione delle onde di discontinuità, iniziata dall'Hugoniot e sviluppata dall'Hadarnard, per applicarla a stabilire la coincidenza delle bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali dell'Einstein con le geodetiche di lunghezza nulla della corrispondente varietà quadridimensionale, con che risultava stabilito il collegamento diretto fra codeste equazioni e l'Ottica geometrica, indipendentemente da ogni teoria dei fenomeni elettro-magnetici. Condotta così a rimeditare sulla teoria delle onde di discontinuità dell'Hadarnard, originariamente alquanto involuta e faticosa, il LEVI-CIVITA sentì il bisogno di rielaborarne i fondamenti matematici secondo quei criteri di semplicità e di chiarezza, che gli erano propri; e la nuova trattazione espose nelle sue linee essenziali in un corso di conferenze, raccolte dal prof. Lampariello (*Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, 1931), che, anche a prescindere dal contenuto matematico, offrono un alto grado d'interesse concettuale nelle riflessioni conclusive. Il LEVI-CIVITA vi rileva, anche in base ad esempi espressivi, come ad ogni fenomeno, che trovi un'adeguata rappresentazione analitica in un determinato sistema a derivate parziali, si possano associare simultaneamente, attraverso le varietà caratteristiche di quel sistema, un aspetto ondulatorio, e, attraverso le bicaratteristiche, un aspetto corpuscolare. « Si ha così — egli concludeva — uno schema matematico comprensivo, e, nel suo agnosticismo, perfettamente soddisfacente, di quel dualismo fra onde e corpuscoli, che ispirò la geniale intuizione del De Broglie, e di cui fu, dallo stesso De Broglie e da altri, indarno cercato un più concreto modello, veramente in accordo coi fatti osservati ».

Egli aveva sempre seguito con attento interesse e con largo spirito di comprensione gli sviluppi della Fisica atomica e i nuovi problemi matematici, che, anche fuori degli schemi classici, mano mano vi si imponevano. Così, nel 1927-28, fissando l'attenzione sugli invarianti adiabatici, che, pur avendo ricevuto fondamentali applicazioni nel primo assetto sistematico della Meccanica atomica, erano stati considerati soltanto sotto aspetti particolari, ne costruì per primo la teoria generale, riconducendola, attraverso i principi della Meccanica statistica, alle proprietà degli integrali dei sistemi canonici; e di tale sua teoria illustrò la portata anche su problemi di

Meccanica planetaria, aprendo una via, che fu proseguita con brillanti risultati dal prof. Krall.

Ma al suo pensiero, non appena egli aveva conchiuso un'indagine, si affacciavano nuovi problemi; e vediamo così susseguirsi tutta una serie di altre ricerche, in ciascuna delle quali si ravvisa il frutto maturo di lunghe meditazioni, e che qui non mi è dato che di accennare in una scheletrica enumerazione: nel campo teorico, lo studio differenziale dello scostamento geodetico su di una varietà riemanniana qualsiasi (1926); l'estensione della distribuzione maxwelliana a un sistema di corpuscoli, in cui siano rappresentate non soltanto tutte le velocità, ma anche tutte le masse, con applicazione al problema del moto di un punto di massa variabile (1930); la deduzione dell'Ottica geometrica, anche nel caso stazionario, dal principio variazionale dell'Einstein, con una espressiva applicazione allo specchio mobile (1931); la dimostrazione che lo schema di Dinamica analitica, di cui si valevano i teorici della Fisica, prima del De Broglie, dello Schrödinger, del Dirac, riguardandolo come generale, rientra invece, in base a classici risultati del Liouville e del Weierstrass, nel caso particolare, in cui esistono n integrali uniformi (1933); la proposta di aggiunta di termini elettromagnetici all'equazione di Schrödinger, in sostituzione degli spinori provenienti dalle matrici del Dirac, di cui il LEVI-CIVITA asserisce l'incompatibilità con la norma generale d'indipendenza delle leggi fisiche dagli elementi geometrici di riferimento (1933); la trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei su di una qualsiasi superficie (1937-38); nel campo applicativo, la valutazione globale dell'aumento di cimento, che si riscontra in un sistema elastico, quando di una data sollecitazione si considera non soltanto l'effetto statico, bensì anche quello dinamico (1928); un primo saggio di trattazione in tre dimensioni dello strato limite del Prandtl (1930); infine la teoria dei getti liquidi sotto forte carico (1931-32).

L'ultimo periodo della sua attività fu dedicato al problema relativistico degli n corpi, sul quale a più riprese aveva lungamente meditato. Fin dal 1922 erano state segnalate da L. M. Brillouin le difficoltà derivanti dal fatto che nella relatività generale vengono meno, insieme col principio di reazione, tutte le schematizzazioni abituali, che nella Meccanica classica ad esso si riconnettono. Il LEVI-CIVITA, sottoposta la questione ad una profonda analisi critica, poteva nel 1937 enunciare, per il caso dei due corpi, conclu-

sioni precise intorno alle ineguaglianze secolari, riservando i particolari deduttivi e gli ulteriori sviluppi, riguardanti il caso degli n corpi, ad una trattazione sistematica, sinora rimasta inedita (**).

Si conclude così l'opera del LEVI-CIVITA, che, per l'ampiezza dei campi via via indagati, per l'originalità delle schematizzazioni concettuali e dei metodi, per l'importanza fondamentale dei risultati conseguiti, per la fecondità degli indirizzi promossi, resterà nella storia come uno dei più geniali e più poderosi contributi a quel movimento d'idee e di ricerche, che, dagli ultimi decenni del secolo passato ai giorni nostri, ha assicurato alla Matematica italiana, nel mondo scientifico internazionale, un alto e indiscusso prestigio.

Larghi furono i riconoscimenti che il LEVI-CIVITA ebbe in Italia e all'estero. Del suo nome si fregiarono tutte — si può dire — le antiche Accademie nostre, alle quali si aggiunsero, quasi in gara, le più insigni istituzioni scientifiche straniere — fra le altre le Accademie delle Scienze di Amsterdam, di Berlino, di Boston, di Bruxelles, di Dublino, di Lisbona, di Madrid, di Mosca, di Parigi e la Società Reale di Londra —; e particolarmente gradita gli giunse nel 1936 la nomina ad Accademico Pontificio, personalmente voluta, all'atto della istituzione di quell'Accademia, da S.S. Pio XI. Già nel 1903 aveva avuto la Medaglia d'oro della Società dei XL e nel 1907, da questa Accademia dei Lincei, il Premio Reale per la Matematica, diviso con un altro Grande scomparso — Federigo Enriques —; mentre nel 1922 la Società Reale di Londra gli assegnava la « Medaglia Sylvester », di cui prima di allora erano stati insigniti soltanto matematici anglo-sassoni, nel 1928 l'Università di Amburgo lo fregiava della Medaglia « dem Verdienste », nel 1937 l'Università di San Marcos di Lima gli decretava una speciale medaglia d'oro; e via via gli era conferita la Laurea « honoris causa » dalle Università di Amsterdam, Cambridge Mass., La Plata, Lima, Parigi, Tolosa e dal Politecnico di Aquisgrana.

Ma, ben più di quel plebiscito di onori accademici, fu suo privilegio l'universale consenso di calde simpatie, di affettuosa reverenza,

(**) È stata poi pubblicata, postuma, la seguente monografia, che il LEVI-CIVITA aveva redatto con la collaborazione del prof. G. LAMPARIELLO: *Le problème des n corps en relativité générale* « Mémorial des Sciences mathématiques », fasc. CXVI, Paris (1950).

che, sempre e dovunque, egli suscitò intorno a se stesso. Le doti sovrane di pensiero si armonizzavano in lui con le note umane del carattere morale e dell'indole affettiva in un così suggestivo equilibrio, che chiunque avesse la ventura di avvicinarlo se ne sentiva immediatamente avvinto. In lui tutto era semplice, limpido, spontaneo: l'aperta e signorile cordialità, l'impareggiabile modestia, candidamente ignara di se stessa, la finezza squisita nel comprendere e nel compiacere gli altri, la innata, fiduciosa predisposizione a giudicare benevolmente; e al fondo di quelle avvincenti caratteristiche personali traspariva, come norma di ogni suo atteggiamento e di ogni sua manifestazione, una rettilinea dirittura morale, costantemente illuminata da un largo e altruistico senso di solidarietà umana. Severo soltanto con se stesso, conservò imperturbata, nella vicenda degli anni e nel contrasto degli eventi, una sua visione serena e ottimistica della vita e dei rapporti umani; e, come fu sempre largo del suo in opere di bene, a lui tanto più gradite quanto più silenziose e nascoste, recò una eguale generosità — virtù fors'anche più rara — nel campo della ricerca scientifica, dove non cercò un tranquillo e comodo rifugio a straniarsi dalla vita, ma una sfera elevata di operosa ed espansiva comunione spirituale. Per questo fece suo mondo la Scuola, per questo vi fu Maestro incomparabile di scienza e di vita. Ben lo sanno, anche oltre la numerosa schiera dei discepoli, quanti matematici, in Italia e fuori, attinsero alla prodiga sua ricchezza d'idee, e tutti recano in sè per la vita, con la forte impronta del suo pensiero, la memoria indelebilmente cara della incontaminata sua superiorità morale e della sua comunicativa umanità.

Quando sopravvenne il brutale, obbrobrioso ostracismo dalla Scuola, la ferita fu profonda e insanabile. Nel sicuro dominio di se stesso, non vacillò e, pensoso soltanto di celare alla eletta Consorte e agli amici rimastigli vicini il suo chiuso dolore, proseguì, in dignitoso isolamento, la sua vita di meditazione e di ricerca, pronto ancora a prodigare ai giovani, che a lui ricorrevano, i tesori inesausti della sua genialità e del suo fervore speculativo, pronto ancora a compiacersi, senza recriminazione, delle voci, che a quando a quando gli giungevano dalla sua Scuola.

Ma a quel profondo e contenuto travaglio interiore le forze fisiche a un tratto cedettero e le progressive insidie del male gli contesero ben presto il conforto del lavoro scientifico. Anche quel supremo sacrificio accolse con tranquilla fermezza d'animo, e già si andava adattando a

vivere spiritualmente ai margini di quel mondo d'idee, che aveva così poderosamente signoreggiato; ma oramai tutto, che in lui era di pensiero e di affettività, egli aveva dato fino all'estremo, e, in silenzio, si spense. In quel tramonto, che — dopo tanta luce di pensiero e di nobiltà morale — per il prevalere della iniquità si colorò di tragedia, la vita di TULLIO LEVI-CIVITA si è conclusa con la più alta delle ascese umane.

MEMORIE E NOTE

MEMORIE E KOTB

INDICE

PREFAZIONE	pag. VII
TULLIO LEVI-CIVITA. Commemorazione di U. Amaldi.	» IX
I. Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici. « Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », s. 7 ^a , t. IV (1892-93), pp. 1765-1815	pag. I
II. Sugli invarianti assoluti. « Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti » s. 7 ^a , t. V (1893-94), pp. 1447-1523	» 41
III. Sui gruppi di operazioni funzionali. « Rend. Ist. Lombardo di Sc., lett. ed arti » s. 2 ^a , vol. XXVIII (1895), pp. 458-468	» 101
IV. Alcune osservazioni alla nota sui gruppi di operazioni fun- zionali. « Rend. Ist. Lomb. di Sc., lett. ed arti », s. 2 ^a , vol. XXVIII (1895), pp. 864-873	» 113
V. I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli inte- grali definiti:	
NOTA I. « Rend. Ist. Lomb. di Sc., lett. ed arti » s. 2 ^a , vol. XXVIII (1895), pp. 529-544	» 125
NOTA II. Ibidem, pp. 567-577	» 140
VI. Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi in un determinato intervallo. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. IV (1 ^o sem. 1895), pp. 303-309	» 153
VII. Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale. « Atti Acc. Torino », vol. XXXI (1895), pp. 25-51	» 159
VIII. Sulla distribuzione indotta in un cilindro indefinito da un sistema simmetrico di masse:	
NOTA I. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. IV (2 ^o sem. 1895), pp. 332-336	» 185
NOTA II., Ibidem, vol. V (1 ^o sem. 1896), pp. 6-12	» 191
IX. Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche. « Atti Acc. Torino », vol. XXXI, (1896), pp. 816-823	» 199

X.	Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. « Ann. di Mat. », s. 2 ^a , t. XXIV (1896), pp. 255-300	pag. 207
XI.	Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso: NOTA I « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. V (2 ^o sem. 1896), pp. 3-9	» 253
	NOTA II. Ibidem, pp. 122-127	» 261
XII.	Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. V (2 ^o sem. 1896), pp. 164-171	» 269
XIII.	Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità. « Atti Ist. Ven. », s. 7 ^a , t. VII (1895-1896), pp. 1004-1008	» 279
XIV.	Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXIV (1897), pp. 392-395	» 283
XV.	Sur une classe de ds^2 à trois variables. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXIV (1897), pp. 1434-1438	» 287
XVI.	Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana. « Nuovo Cimento », s. 4 ^a , vol. VI (1897), pp. 93-108	» 291
XVII.	Sopra una classe di integrali dell'equazione $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$. « Nuovo Cimento », s. 4 ^a , vol. VI (1897), pp. 204-209	» 305
XVIII.	Sulla stabilità dell'equilibrio per i sistemi a legami completi. « Atti Ist. Veneto », s. 7 ^a , t. VIII (1896-1897), pp. 1247-1250	» 311
XIX.	Sui numeri transfiniti: NOTA I. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. VII (1 ^o sem. 1898), pp. 91-96	» 315
	NOTA II. Ibidem, pp. 113-121	» 321
XX.	Sulla integrazione dell'equazione $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$. « Atti Acc. Torino », vol. XXXIII (1898), pp. 932-956	» 331
XXI.	Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione $\Delta \Delta = 0$. « Atti Ist. Ven. », s. 7 ^a , t. IX (1897-98), pp. 1399-1410	» 357
XXII.	Sulle congruenze di curve. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. VIII (1 ^o sem. 1899), pp. 239-246	» 369
XXIII.	Sulle equazioni a coppie di integrali ortogonali. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. VIII (1 ^o sem. 1899), pp. 295-296	» 379
XXIV.	Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate. « Mem. Acc. Torino », s. 2 ^a , t. XLIX (1899), pp. 105-152	» 381
XXV.	Sur les intégrales périodiques des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXVIII (1899), pp. 978-981	» 439

XXVI. Interpretazione gruppale degli integrali di un sistema canonico. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 ^a , vol. VIII (2 ^o sem. 1899), pp. 235-238	» 443
XXVII. Complementi al teorema di Malus-Dupin:	
NOTA I. « Rend. Acc. Lincei », s. 5, vol. IX (1 ^o sem. 1900), pp. 185-189	» 447
NOTA II. Ibidem, pp. 237-245	» 452
XXVIII. Sur l'instabilité de certaines substitutions. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXX (1900), pp. 103-106	» 461
XXIX. Sur l'instabilité de certaines solutions périodiques. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXX (1900), pp. 170-173	» 465
XXX. Sur le problème restreint des trois corps. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXXI (1900), pp. 236-239	» 469
XXXI. Funzioni armoniche e trasformazioni di contatto. « Atti Ist. Ven. », t. LIX (1899-900), pp. 671-675	» 473
XXXII. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, par G. RICCI et T. LEVI-CIVITA « Math. Ann. », Band LIV (1900), pp. 125-201	» 479



