III.

SUR LES VIBRATIONS DES CORPS ÉLASTIQUES ISOTROPES

« Acta Mathematica », vol. 18, 1894, pp. 161–232.

INTRODUCTION.

1. Les lignes caractéristiques jouent un rôle très important dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Leur étude a été développée dans l'ouvrage de M. DU BOIS REYMOND dont la première partie a paru en 1864 et dans un court article du même auteur qui a été publié en 1883.

Mais dès 1860 RIEMANN dans son mémoire sur la propagation du son avait montré l'avantage qu'on peut tirer de la considération des lignes caractéristiques dans l'intégration des équations différentielles. Les idées de RIEMANN ont été reprises tout récemment par M. DARBOUX qui leur a consacré un chapitre de son ouvrage sur la théorie des surfaces pour les appliquer à une équation qui offre le plus grand intérêt dans la physique mathématique et la géométrie.

Il serait intéressant de généraliser la théorie des caractéristiques aux équations à trois variables indépendantes; mais il paraît avantageux de faire précéder à cette extension l'étude approfondie de quelques équations particulières. Les résultats relatifs à la généralisation des caractéristiques qu'on obtient de la sorte, et les méthodes qu'on est porté à suivre peuvent servir de guide pour une étude générale car ils offrent le moyen de s'orienter et de trouver son chemin dans un champ tout à fait nouveau.

C'est pourquoi j'ai essayé de généraliser la théorie des caractéristiques au cas d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles à trois variables qui se présente dans la physique mathématique. C'est le système des équations différentielles des vibrations des corps élastiques isotropes lorsque les déplacements des points sont indépendants d'une coordonnée. Les mêmes équations paraissent dans la théorie des vibrations des membranes élastiques. Elles sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z,$$

où les quantités constantes a, b représentent les vitesses de propagation des ondes transversales et longitudinales.

2. Si nous concevons que x, y, t soient les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace nous pourrons borner nos considérations à un espace à trois dimensions. Quels sont maintenant les éléments qui jouent dans ce cas le même rôle que les lignes caractéristiques dans les équations à deux variables? Prenons pour sommet un point quelconque de l'espace et conduisons deux cônes de révolution dont l'axe soit parallèle à l'axe t et dont les ouvertures soient $2 \operatorname{arc\,tg} a$, $2 \operatorname{arc\,tg} b$. Ces cônes jouent le rôle de *cônes caractéristiques*. Je donne dans ce mémoire les formules par lesquelles on peut calculer les valeurs des fonctions inconnues au sommet des cônes lorsqu'on connaît les valeurs des mêmes fonctions et de leurs dérivées sur des surfaces quelconques limitées par une nappe ou par les deux nappes de ces cônes.

3. En particularisant les formules on peut en obtenir d'autres qui ont une application directe en physique mathématique.

Il est connu que la conception du principe de HUYGHENS a présenté beaucoup de difficultés jusqu'à ce que KIRCHHOFF donna sa formule qui présente ce principe sous une forme rigoureuse et générale. Pour les ondes cylindriques on ne connaissait pas la formule correspondante, car on ne pouvait pas la trouver en employant une méthode tout à fait semblable à celle suivie par KIRCHHOFF. En effet j'ai montré dans l'Art. 11ème que dans le cas des ondes cylindriques les intégrales qui ont la forme de celles dont KIRCHHOFF a fait usage, sont polydromes, c'est à dire présentent la même particularité que j'ai observée pour les intégrales de LAMÉ relatives aux équations de la double réfraction (1). Pour employer la méthode GREEN-KIRCHHOFF il faudrait alors modifier l'espace par des coupures, et l'on trouverait des résultats fort différents de ceux qu'on voudrait obtenir.

Au contraire, en particularisant les formules générales dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent, on peut trouver sous trois formes différentes l'expression mathématique du principe de HUYGHENS pour les ondes cylindriques. Lorsque les vibrations sont harmoniques l'une d'elle se réduit à celle qui a été trouvée par M. WEBER dans son mémoire sur l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$ (2), de la même façon que la formule de KIRCHHOFF se réduit à une autre formule que M. HELMHOLTZ avait donné antérieurement.

Enfin on peut trouver que les surfaces caractéristiques jouent un rôle dans une question du calcul des variations et l'on peut trouver par là une application de ces surfaces à la théorie du choc dans un milieu élastique.

(1) «Acta mathematica», vol. 16, 1892, p. 153. [In queste «Opere»: vol. primo, XXXIII, p. 154].

(2) «Math. Annalen», vol. 1, 1869, p. 1.

Art. 1. – Les formules fondamentales.

1. Les équations que nous allons étudier sont les suivantes

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z,$$

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y \end{aligned}\right.$$

où a, b sont des constantes et l'on a

$$b > a.$$

Soient a', b', a'', b'' des nouvelles constantes telles que

$$(1) \qquad b^2 - a^2 = b'^2 - a'^2 = b''^2 - a''^2;$$

on aura

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} a^2 - a'^2 &= b^2 - b'^2 = k', \\ a^2 - a''^2 &= b^2 - b''^2 = k'', \end{aligned}\right.$$

et les équations (B) pourront s'écrire

$$\text{(B')} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= X, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= Y. \end{aligned}\right.$$

2. Commençons par trouver la *formule fondamentale* relative à l'équation (A). Regardons x, y, t comme les coordonnées cartésiennes des points de l'espace et supposons que dans un champs S à trois dimensions l'intégrale w de l'équation (A) soit régulière.

Si nous désignons par Σ le contour du champ S, on aura, en intégrant par parties,

$$(3) \qquad \int_S w_\lambda Z dS = \int_S w_\lambda\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right) dS$$

$$= -\int_\Sigma w_\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w}{\partial y}\cos ny\right)\right) d\Sigma$$

$$-\int_S\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) dS$$

où w_λ dénote une nouvelle fonction régulière dans le champ S, et n est la normale à la surface Σ dirigée vers l'intérieur du champ S.

De même on aura

$$-\int_S \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) dS$$

$$= \int_\Sigma w\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\cos ny\right)\right) d\Sigma$$

$$+ \int_S w\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2}\right)\right) dS.$$

Par suite en posant

$$\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2}\right) = Z_\lambda, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w}{\partial y}\cos ny\right) = W, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\cos ny\right) = W_\lambda, \tag{6}$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\int_S (w_\lambda Z - w Z_\lambda)\, dS = \int_\Sigma (w W_\lambda - w_\lambda W)\, d\Sigma. \tag{C}$$

La formule qu'on vient de trouver est la formule fondamentale qu'on cherchait.

3. Nous allons maintenant procéder d'une façon analogue pour trouver une formule semblable pour le système des équations (B).

$u, v, u_\lambda, v_\lambda$ étant quatre fonctions régulières dans le champ S, et les deux premières étant des intégrales des équations (B), on aura

$$\int_S (u_\lambda X + v_\lambda Y)\, dS = \int_S \Big\{ u_\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$+ v_\lambda\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\Big\} dS$$

$$= -\int_\Sigma \Big\{ u_\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\frac{\partial u}{\partial x} + b'^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\frac{\partial u}{\partial y} - a'^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos ny\right]$$

$$+ v_\lambda\left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\frac{\partial v}{\partial x} - a''^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\frac{\partial v}{\partial y} + b''^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos ny\right]\Big\} d\Sigma$$

$$-\int_S \Big\{ \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - \left(b^2\frac{\partial u}{\partial x} + b'^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} - \left(a^2\frac{\partial u}{\partial y} - a'^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$- \left(a^2\frac{\partial v}{\partial x} - a''^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - \left(b^2\frac{\partial v}{\partial y} + b''^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v_\lambda}{\partial y}\Big\} dS.$$

Mais la dernière intégrale qui paraît dans la formule précédente peut se transformer dans l'expression suivante

$$\int_\Sigma \Big\{ u \left[\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(b^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + b''^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - a''^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny\right]$$

$$+ v\left[\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(a^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - a'^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial y} + b'^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny\right]\Big\} d\Sigma$$

$$+ \int_S \Big\{ u\left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ v\left(\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y}\right)\Big\} dS\,.$$

Par suite en posant

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x \partial y} = X_\lambda\,, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2} - b^2 \dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} = Y_\lambda\,, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos nt - \left(b^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + b'^2 \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2 \dfrac{\partial u}{\partial y} - a'^2 \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\cos ny = U'\,, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}\cos nt - \left(a^2 \dfrac{\partial v}{\partial x} - a''^2 \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + b''^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\cos ny = V''\,, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(b^2 \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x} + b''^2 \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2 \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial y} - a''^2 \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny = U''_\lambda\,, \\[2ex] \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(a^2 \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial x} - a'^2 \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2 \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y} + b'^2 \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny = V'_\lambda\,, \end{cases}$$

on aura

$$(D)\quad \int_S \{u_\lambda X + v_\lambda Y - u X_\lambda - v Y_\lambda\}\, dS = \int_\Sigma \{u U''_\lambda + v V'_\lambda - u_\lambda U' - v_\lambda V''\}\, d\Sigma$$

qui est la deuxième *formule fondamentale* qu'on cherchait.

Art. 2. – Les intégrales fondamentales.

1. Soit $\varphi(\tau, \xi, \eta)$ une intégrale de l'équation

$$(1)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\,;$$

il est evident que

$$(2)\quad w = \varphi(\pm a(t_1 - t), x - x_1, y - y_1)\,,$$

t_1, x_1, y_1 étant des constantes arbitraires, sera une intégrale de l'équation (A) en supposant $Z = 0$. De même on vérifiera aisément que les deux systèmes de fonctions

$$(3)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi\,(a\,(t_1 - t)\,, x - x_1\,, y - y_1)}{\partial y}\,, \\ v = -\dfrac{\partial\varphi\,(a\,(t_1 - t)\,, x - x_1\,, y - y_1)}{\partial x}\,, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi\,(b\,(t_1 - t)\,, x - x_1\,, y - y_1)}{\partial x}\,, \\ v = \dfrac{\partial\varphi\,(b\,(t_1 - t)\,, x - x_1\,, y - y_1)}{\partial y}\,, \end{cases}$$

satisferont aux équations (B) si l'on suppose $X = Y = 0$.

On pourra donc trouver des intégrales particulières des équations (A), (B), X, Y, Z étant nuls, en intégrant l'équation (1).

2. Soit

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}:$$

on aura tout de suite deux intégrales de l'équation (1)

$$(5)\qquad \varphi_0 = \log \rho,$$

$$(6)\qquad \Phi_0 = \tau \log \rho.$$

Mais considérons les intégrales de l'équation (1) qui ont la forme

$$\varphi = \tau^n \psi(\theta)$$

où

$$\theta = \frac{\tau}{\rho}.$$

L'équation (1) alors se transforme dans la suivante

$$\theta^2 (1 - \theta^2)\, \psi'' + \theta\,(2\,n - \theta^2)\, \psi' + n\,(n - 1)\, \psi = 0.$$

Examinons les deux cas qui se présentent lorsque $n = 0$, $n = 1$.

Dans le premier cas on trouvera l'intégrale

$$\psi_1 = \log\left(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}\right)$$

qui sera réel si $\theta > 1$, ou l'autre

$$\psi_2 = \arcsin\theta + \text{const.}$$

qui sera réel si $|\theta| < 1$.

Dans l'autre cas on aura l'intégrale

$$\Psi_1 = \frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right)$$

si $\theta > 1$, ou

$$\Psi_2 = \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta$$

si $|\theta| < 1$.

Dans tous les cas on prendra les radicaux avec leur valeur absolue.

On tire de là les intégrales suivantes de l'équation (1)

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \log\left(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}\right), \\ \Phi_1 &= \tau\left[\frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

qui seront réels si $\theta > 1$, et

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2 &= \arcsin\theta, \\ \Phi_2 &= \tau\left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta\right), \end{aligned}\right.$$

qui seront réels si $|\theta| < 1$.

3. Nous allons maintenant chercher les intégrales de l'équation (1) qui ont la forme

$$\varphi = \tau^n \left(f(\theta) + \chi(\theta)\log\rho\right)$$

dans le cas $|\theta| < 1$. L'équation (1) se transforme aisément dans l'autre

$$\begin{gathered} (\theta^2(1-\theta^2)f'' + \theta(2n-\theta^2)f' + n(n-1)f + 2\theta^3\chi') \\ + \log\rho\,(\theta^2(1-\theta^2)\chi'' + \theta(2n-\theta^2)\chi' + n(n-1)\chi) = 0, \end{gathered}$$

d'où l'on déduit

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta^2(1-\theta^2)\chi'' + \theta(2n-\theta^2)\chi' + n(n-1)\chi = 0, \\ &\theta^2(1-\theta^2)f'' + \theta(2n-\theta^2)f' + n(n-1)f + 2\theta^3\chi' = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant $n = 0$. En s'appuyant sur les résultats précédents on pourra prendre pour intégrale de la première équation

$$\chi_0 = \arcsin\theta$$

et par suite en intégrant l'autre on trouvera pour f,

$$f_0 = \int \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}.$$

En ajoutant à $f_0 + \chi_0\log\rho$ l'intégrale φ_0 après l'avoir multipliée par une constante, on trouvera

$$\varphi_3 = c + \int_0^\theta \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log\rho\cdot(\arcsin\theta + c')$$

qui sera une nouvelle intégrale de l'équation (1). Les quantités c, c' qui paraissent dans la formule précédente sont deux constantes arbitraires.

Faisons maintenant $n = 1$ dans les équations (7). Pour intégrale de la première équation on pourra prendre

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arc \sin \theta$$

et en intégrant la seconde on aura

$$f_1 = -\int \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta^2} \log (1-\theta^2)\, d\theta\,.$$

En formant l'expression

$$\tau (f_1 + \chi_1 \log \rho) + c' \Phi_0\,,$$

nous aurons

$$\Phi_3 = \tau \left[c - \int_0^\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta^2} \log (1-\theta^2)\, d\theta + \log \rho \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arc \sin \theta + c' \right) \right],$$

qui sera la dernière des intégrales de l'équation (1) dont nous nous servirons.

4. Employons maintenant la formule (2); en l'appliquant aux trois intégrales φ_1, φ_2, φ_3 on trouvera

$$w_1 = \log \left(\pm \frac{a(t_1 - t)}{r} + \sqrt{\frac{a^2 (t_1 - t)^2}{r^2} - 1} \right), \tag{8}$$

$$w_2 = \arc \sin \frac{a(t - t_1)}{r} + c\,, \tag{8'}$$

$$w_3 = c + \int_0^{\theta_a} \log (1-\theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log r \left(\arc \sin \frac{a(t-t_1)}{r} + c' \right), \tag{8''}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$\theta_a = \frac{a(t-t_1)}{r} \quad , \quad r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Dans la première intégrale nous prendrons le signe supérieur lorsque $t_1 > t$, et nous prendrons le signe inférieur si $t_1 < t$.

5. Appliquons enfin les formules (3), (4) aux intégrales Φ_1, Φ_2, Φ_3; on aura:

en partant de Φ_1:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{R_a}{r^2}(y-y_1) = \frac{R_a}{r} \sin \omega\,, \\ v_1 &= -\frac{R_a}{r^2}(x-x_1) = -\frac{R_a}{r} \cos \omega\,, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_2 &= \frac{R_b}{r^2}(x-x_1) = \frac{R_b}{r} \cos \omega\,, \\ v_2 &= \frac{R_b}{r^2}(y-y_1) = \frac{R_b}{r} \sin \omega\,, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

en partant de Φ_2:

$$(11)\quad \begin{cases} u_3 = \dfrac{P_a}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{P_a}{r}\sin\omega\,, \\ v_3 = -\dfrac{P_a}{r^2}(x - x_1) = -\dfrac{P_a}{r}\cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} u_4 = \dfrac{P_b}{r^2}(x - x_1) = \dfrac{P_b}{r}\cos\omega\,, \\ v_4 = \dfrac{P_b}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{P_b}{r}\sin\omega\,, \end{cases}$$

en partant de Φ_3:

$$(13)\quad \begin{cases} u_5 = \dfrac{Q_a}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{Q_a}{r}\sin\omega\,, \\ v_5 = -\dfrac{Q_a}{r^2}(x - x_1) = -\dfrac{Q_a}{r}\cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} u_6 = \dfrac{Q_b}{r^2}(x - x_1) = \dfrac{Q_b}{r}\cos\omega\,, \\ v_6 = \dfrac{Q_b}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{Q_b}{r}\sin\omega\,, \end{cases}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(15)\quad \begin{cases} Q_a = P_a \log\left(\dfrac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{er}\right) + a(t - t_1)\left(\arc\sin\dfrac{a(t - t_1)}{r} + c\right), \\ R_a = \sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}\quad,\quad P_a = \sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}, \\ Q_b = P_b \log\left(\dfrac{r^2 - b^2(t - t_1)^2}{er}\right) + b(t - t_1)\left(\arc\sin\dfrac{b(t - t_1)}{r} + c\right), \\ R_b = \sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - r^2}\quad,\quad P_b = \sqrt{r^2 - b^2(t_1 - t)^2}, \end{cases}$$

$$\cos\omega = \frac{x - x_1}{r}\quad,\quad \sin\omega = \frac{y - y_1}{r}\,.$$

Art. 3. – Calcul des quantités conjuguées aux intégrales fondamentales.

1. Nous appellerons *quantités conjuguées* à $w_\lambda, u_\lambda, v_\lambda$ les fonctions $W_\lambda, U''_\lambda, V'_\lambda$, que nous avons introduites dans le premier article. Il faut maintenant les calculer pour les intégrales fondamentales que nous avons trouvées dans l'article précédent.

Ce calcul ne présente pas de difficultés. Nous en donnerons ici les résultats:

$$(1)\quad W_1 = \mp \frac{a}{R_a}\left(\cos nt - a^2\,\frac{t_1 - t}{r}\cos nr\right),$$

$$(2)\quad W_2 = \frac{a}{P_a}\left(\cos nt + a^2\,\frac{t - t_1}{r}\cos nr\right),$$

$$(3)\quad W_3 = \frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\,\frac{t - t_1}{r}\cos nr\right) - a^2\,\frac{\cos nr}{r}\left(\arc\sin\frac{a(t - t_1)}{r} + c'\right)$$

où l'on a posé

$$\cos nr = \cos nx \cos \omega + \cos ny \sin \omega.$$

2. Les expressions de U''_λ, V'_λ sont les suivantes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} U''_1 &= \frac{1}{R_a}\left\{-a^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt \sin\omega + \frac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny + \frac{1}{2}k''\beta\right\} + R_a\frac{k''}{r^2}\beta \\ V'_1 &= \frac{1}{R_a}\left\{a^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\cos\omega - \frac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \frac{1}{2}k'\alpha\right\} - R_a\frac{k'}{r^2}\alpha, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} U''_2 &= \frac{1}{R_b}\left\{-b^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\cos\omega + \frac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx + \frac{1}{2}k''\alpha\right\} + R_b\frac{k''}{r^2}\alpha, \\ V'_2 &= \frac{1}{R_b}\left\{-b^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\sin\omega + \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \frac{1}{2}k'\beta\right\} + R_b\frac{k'}{r^2}\beta, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} U''_3 &= -\frac{1}{P_a}\left\{a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nt\sin\omega + \frac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny + \frac{1}{2}k''\beta\right\} + P_a\frac{k''}{r^2}\beta, \\ V'_3 &= -\frac{1}{P_a}\left\{-a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nt\cos\omega - \frac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \frac{1}{2}k'\alpha\right\} - P_a\frac{k'}{r^2}\alpha, \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} U''_4 &= -\frac{1}{P_b}\left\{b^2\frac{t-t_1}{r}\cos nt\cos\omega + \frac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx + \frac{1}{2}k''\alpha\right\} + P_b\frac{k''}{r^2}\alpha, \\ V'_4 &= -\frac{1}{P_b}\left\{b^2\frac{t-t_1}{r}\cos nt\sin\omega + \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \frac{1}{2}k'\beta\right\} + P_b\frac{k'}{r^2}\beta, \end{aligned}\right.$$

où nous avons posé

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \cos nx\cos 2\omega + \cos ny \sin 2\omega\,, \\ \beta &= \cos nx \sin 2\omega - \cos ny\cos 2\omega\,. \end{aligned}\right.$$

3. Pour obtenir U''_5, V'_5, U''_6, V'_6, posons

$$(9)\quad M_a = \log\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\quad,\quad M_b = \log\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{r}$$

$$(9')\quad N_a = \arc\sin\frac{a(t-t_1)}{r} + c\quad,\quad N_b = \arc\sin\frac{b(t-t_1)}{r} + c:$$

on aura (voir form. (15) art. 2)

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} Q_a &= P_a(M_a - 1) + a(t-t_1)N_a, \\ Q_b &= P_b(M_b - 1) + b(t-t_1)N_b, \end{aligned}\right.$$

et par suite

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} U''_5 = \frac{M_a}{P_a}&\left\{-a^2\frac{t-t_1}{r}\sin\omega\cos nt - \frac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny - \frac{1}{2}k''\beta\right\} \\ &+\frac{a}{r}N_a\sin\omega\cos nt + Q_a\frac{k'}{r^2}\beta, \\ V'_5 = \frac{M_a}{P_a}&\left\{a^2\frac{t-t_1}{r}\cos\omega\cos nt + \frac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx + \frac{1}{2}k'\alpha\right\} \\ &-\frac{a}{r}N_a\cos\omega\cos nt - Q_a\frac{k'}{r^2}\alpha, \end{aligned}\right.$$

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_6 &= \frac{M_b}{P_b}\left\{ - b^2 \frac{t-t_1}{r}\cos\omega\cos nt - \frac{1}{2}(b^2 + b''^2)\cos nx - \frac{1}{2}k''\alpha \right\} \\
&\qquad + \frac{b}{r} N_b \cos\omega \cos nt + Q_b \frac{k'}{r^2}\alpha, \\
V'_6 &= \frac{M_b}{P_b}\left\{ - b^2 \frac{t-t_1}{r}\sin\omega\cos nt - \frac{1}{2}(b^2 + b'^2)\cos ny - \frac{1}{2}k'\beta \right\} \\
&\qquad + \frac{b}{r} N_b \sin\omega \cos nt + Q_b \frac{k'}{r^2}\beta.
\end{aligned}
\right.
$$

Art. 4. – Valeurs des intégrales fondamentales et des quantités conjuguées sur des surfaces spéciales.

1. Conduisons (voir fig. 1) par un point quelconque x_1, y_1, t_1 un cône de révolution Λ ayant l'axe parallèle à l'axe t et dont l'ouverture soit 2λ; conduisons ensuite un cylindre de révolution C ayant le même axe que le cône et dont le rayon soit ε; et enfin un plan T passant par (x_1, y_1, t_1) et perpendiculaire à l'axe t. Nous allons calculer les valeurs des intégrales fondamentales et de leurs conjuguées sur ces surfaces.

2. Désignons par Λ_1 la nappe du cône dont les points ont une coordonnée $t < t_1$, et par Λ_2 l'autre; prenons la normale n à cette surface dirigée extérieurement au cône. On aura alors

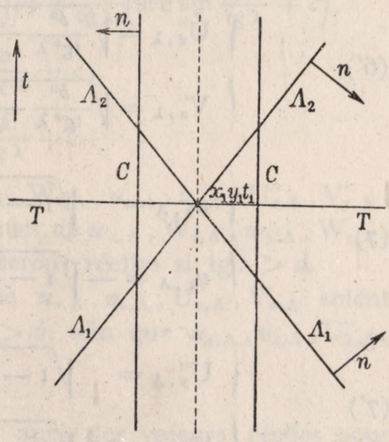

Fig. 1.

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos nt &= \pm \sin\lambda \\
\cos nx &= \cos\lambda\cos\omega, \\
\cos ny &= \cos\lambda\sin\omega, \\
\cos nr &= \cos\lambda, \\
\frac{t_1 - t}{r} &= \pm \operatorname{cotg}\lambda,
\end{aligned}
\right.
$$

où le signe supérieur est relatif à la nappe Λ_1 et l'inférieur à la nappe Λ_2. On tire de là immédiatement les valeurs cherchées sur le cône Λ. Elles sont les suivantes:

$$
(2)\quad w_{1,\Lambda} = \log\left(\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda} - 1}\right), \qquad (2')\quad W_{1,\Lambda} = \frac{a\cos\lambda}{r}\sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2\lambda},
$$

$$
(3)\quad w_{2,\Lambda} = \mp \arcsin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + c\,, \qquad (3')\quad W_{2,\Lambda} = \pm\frac{a\cos\lambda}{r}\sqrt{\operatorname{tg}^2\lambda - a^2},
$$

$$
(4)\quad w_{3,\Lambda} = c + \int_0^{\pm a/\operatorname{tg}\lambda} \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log r\cdot\left(\mp \arcsin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + c'\right),
$$

$$
(4')\quad W_{3,\Lambda} = \pm\frac{a\sin\lambda}{r}\sqrt{1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\log\left(r\left(1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}\right)\right) -
$$

$$-a^2\frac{\cos\lambda}{r}\left(\mp\operatorname{arc}\sin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda}+c'\right),$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} u_{1,\Lambda} &= \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\sin\omega\,,\\ v_{1,\Lambda} &= -\sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\cos\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(5')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{1,\Lambda} &= \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\sin\omega\,,\\ V'_{1,\Lambda} &= -\sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} u_{2,\Lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\cos\omega\,,\\ v_{2,\Lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\sin\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(6')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{2,\lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\cos\omega\,,\\ V'_{2,\lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned} u_{3,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\sin\omega\,,\\ v_{3,\Lambda} &= -\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\cos\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(7')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{3,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\sin\omega\,,\\ V'_{3,\Lambda} &= -\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned} u_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\cos\omega\,,\\ v_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\sin\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(8')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\cos\omega\,,\\ V'_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned} u_{5,\Lambda} &= \frac{Q_{a,\Lambda}}{r}\sin\omega\,,\\ v_{5,\Lambda} &= -\frac{Q_{a,\Lambda}}{r}\cos\omega\,,\end{aligned}\right.$$

$$(9')\quad \begin{cases} U''_{5,\Lambda} = \left[\pm \dfrac{a}{r} N_{a,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k''}{r^2} Q_{a,\Lambda} \cos\lambda\right] \sin\omega\,, \\ V'_{5,\Lambda} = -\left[\pm \dfrac{a}{r} N_{a,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2} Q_{a,\Lambda} \cos\lambda\right] \cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} u_{6,\Lambda} = \dfrac{Q_{b,\Lambda}}{r} \cos\omega\,, \\ v_{6,\Lambda} = \dfrac{Q_{b,\Lambda}}{r} \sin\omega\,, \end{cases}$$

$$(10')\quad \begin{cases} U''_{6,\Lambda} = \left[\pm \dfrac{b}{r} N_{b,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k''}{r^2} Q_{b,\Lambda} \cos\lambda\right] \cos\omega\,, \\ V'_{6,\Lambda} = \left[\pm \dfrac{b}{r} N_{b,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2} Q_{b,\Lambda} \cos\lambda\right] \sin\omega\,, \end{cases}$$

où l'on a

$$(11)\quad \begin{cases} Q_{a,\Lambda} = r\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}} \log\left(\dfrac{r}{e}\left(1 - \dfrac{a^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}\right)\right) + r\dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\lambda}\left(\arcsin\dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\lambda} \mp c\right), \\ Q_{b,\Lambda} = r\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}} \log\left(\dfrac{r}{e}\left(1 - \dfrac{b^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}\right)\right) + r\dfrac{b}{\mathrm{tg}\,\lambda}\left(\arcsin\dfrac{b}{\mathrm{tg}\,\lambda} \mp c\right), \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} N_{a,\Lambda} = \mp \arcsin\dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\lambda} + c\,, \\ N_{b,\Lambda} = \mp \arcsin\dfrac{b}{\mathrm{tg}\,\lambda} + c\,. \end{cases}$$

Il est évident que les valeurs de $w_{1,\Lambda}$, $W_{1,\Lambda}$, $u_{1,\Lambda}$, $v_{1,\Lambda}$, $U''_{1,\Lambda}$, $V'_{1,\Lambda}$, seront réelles si $\mathrm{tg}\,\lambda < a$, tandis que les valeurs de $w_{2,\Lambda}$, $W_{2,\Lambda}$, $w_{3,\Lambda}$, $W_{3,\Lambda}$, $u_{3,\Lambda}$, $v_{3,\Lambda}$, $U''_{3,\Lambda}$, $V'_{3,\Lambda}$, $u_{5,\Lambda}$, $v_{5,\Lambda}$, $U''_{5,\Lambda}$, $V'_{5,\Lambda}$ seront réelles si $\mathrm{tg}\,\lambda > a$.

De même il faut que $\mathrm{tg}\,\lambda < b$, afin que $u_{2,\Lambda}$, $v_{2,\Lambda}$, $U''_{2,\Lambda}$, $V'_{2,\Lambda}$ soient réelles, et il faut au contraire qu'on ait $\mathrm{tg}\,\lambda > b$, afin que $u_{4,\Lambda}$, $v_{4,\Lambda}$, $U''_{4,\Lambda}$, $V'_{4,\Lambda}$, $u_{6,\Lambda}$, $v_{6,\Lambda}$, $U''_{6,\Lambda}$, $V'_{6,\Lambda}$ soient réelles.

3. On tire de là que sur le plan T on aura des valeurs réelles pour $w_{2,\Lambda}$, $w_{3,\Lambda}$, $u_{5,\Lambda}$, $v_{5,\Lambda}$, $u_{6,\Lambda}$, $v_{6,\Lambda}$, et pour leurs quantités conjuguées. Pour les trouver il suffira de prendre $\lambda = \pi/2$. On aura alors

$$(13)\quad w_{2,T} = c\,, \qquad (13')\quad W_{2,T} = \pm\frac{a}{r}\,,$$

$$(14)\quad w_{3,T} = c + c'\log r\,, \qquad (14')\quad W_{3,T} = \pm\frac{a}{r}\log r\,,$$

$$(15)\quad \begin{cases} u_{5,T} = \dfrac{\log r - 1}{r}\sin\omega\,, \\ v_{5,T} = -\dfrac{\log r - 1}{r}\cos\omega\,, \end{cases} \qquad (15')\quad \begin{cases} U''_{5,T} = \pm\dfrac{ac}{r}\sin\omega\,, \\ V'_{5,T} = \mp\dfrac{ac}{r}\cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} u_{6,T} = \dfrac{\log r - 1}{r}\cos\omega\,, \\ v_{6,T} = \dfrac{\log r - 1}{r}\sin\omega\,, \end{cases} \qquad (16')\quad \begin{cases} U''_{6,T} = \pm\dfrac{bc}{r}\cos\omega\,, \\ V'_{6,T} = \pm\dfrac{bc}{r}\sin\omega\,. \end{cases}$$

Il est évident par la manière dont ces valeurs ont été trouvées qu'on devra prendre le signe supérieur si la normale au plan T a la même direction que l'axe t, et qu'on devra prendre le signe inférieur lorsque la normale au plan T aura la direction contraire.

4. Il nous faut maintenant déterminer les valeurs des intégrales fondamentales et de leurs conjuguées sur le cylindre C. Prenons la normale dirigée extérieurement au cylindre, on aura alors

$$\left\{\begin{aligned} &\cos nt = 0, \\ &\cos nx = \cos\omega, \\ &\cos ny = \sin\omega, \\ &\cos nr = 1, \\ &\quad r = \varepsilon, \end{aligned}\right.$$

et par suite les valeurs cherchées sur le cylindre seront:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} w_{1,C} &= \log\left(\pm \frac{a(t_1 - t)}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{a^2(t_1-t)^2}{\varepsilon^2} - 1}\right), \\ w_{2,C} &= \arc\sin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c, \\ w_{3,C} &= c + \int_0^{a(t-t_1)/\varepsilon} \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log\varepsilon\left(\arc\sin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c'\right), \end{aligned}\right.$$

$$(17')\quad \left\{\begin{aligned} W_{1,C} &= \pm \frac{a^2}{\sqrt{(t_1-t)^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{a^2}}}\cdot\frac{t_1 - t}{\varepsilon}, \\ W_{2,C} &= \frac{a^3}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}}\cdot\frac{t-t_1}{\varepsilon}, \\ W_{3,C} &= \frac{a^3\log\left(\dfrac{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}}\cdot\frac{t-t_1}{\varepsilon} - \frac{a^2}{\varepsilon}\left(\arc\sin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c'\right), \end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} u_{1,C} &= \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\sin\omega, \\ v_{1,C} &= -\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\cos\omega, \end{aligned}\right.$$

$$(18')\quad \left\{\begin{aligned} U''_{1,C} &= \frac{a^2\sin\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}} + k''\,\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega, \\ V'_{1,C} &= \frac{-a^2\cos\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}} - k'\,\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\cos\omega, \end{aligned}\right.$$

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} u_{2,C} &= \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\cos\omega, \\ v_{2,C} &= \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega, \end{aligned}\right.$$

$$
(19')\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_{2,C} &= \frac{b^2 \cos\omega}{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}} + k'' \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\cos\omega ,\\
V'_{2,C} &= \frac{b^2 \sin\omega}{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}} + k' \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_{3,C} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t_1-t)^2}}{\varepsilon}\sin\omega ,\\
v_{3,C} &= -\frac{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t_1-t)^2}}{\varepsilon}\cos\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(20')\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_{3,C} &= -\frac{a^2 \sin\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}} + k'' \frac{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_2)^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega ,\\
V'_{3,C} &= \frac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}} - k' \frac{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}}{\varepsilon^2}\cos\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_{4,C} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t_1-t)^2}}{\varepsilon}\cos\omega ,\\
v_{4,C} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t_1-t)^2}}{\varepsilon}\sin\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(21')\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_{4,C} &= -\frac{b^2 \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t-t_1)^2}} + k'' \frac{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t-t_1)^2}}{\varepsilon^2}\cos\omega ,\\
V'_{4,C} &= -\frac{b^2 \sin\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t-t_1)^2}} + k' \frac{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t-t_1)^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_{5,C} &= \frac{Q_{a,C}}{\varepsilon}\sin\omega ,\\
v_{5,C} &= -\frac{Q_{a,C}}{\varepsilon}\cos\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(22')\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_{5,C} &= \left(-a^2 \frac{M_{a,C}}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}} + \frac{k''}{\varepsilon^2}Q_{a,C}\right)\sin\omega ,\\
V'_{5,C} &= \left(a^2 \frac{M_{a,C}}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}} - \frac{k'}{\varepsilon^2}Q_{a,C}\right)\cos\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_{6,C} &= \frac{Q_{b,C}}{\varepsilon}\cos\omega ,\\
v_{6,C} &= \frac{Q_{b,C}}{\varepsilon}\sin\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(23')\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_{6,C} &= \left(-b^2 \frac{M_{b,C}}{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t-t_1)^2}} + \frac{k''}{\varepsilon^2}Q_{b,C}\right)\cos\omega ,\\
V'_{6,C} &= \left(-b^2 \frac{M_{b,C}}{\sqrt{\varepsilon^2-b^2(t-t_1)^2}} + \frac{k'}{\varepsilon^2}Q_{b,C}\right)\sin\omega ,
\end{aligned}\right.
$$

où

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} M_{a,C} &= \log \frac{\varepsilon^2 - a^2 (t-t_1)^2}{\varepsilon}, \\ Q_{a,C} &= \sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t-t_1)^2} \log\left(\frac{\varepsilon^2 - a^2 (t-t_1)^2}{e\varepsilon}\right) + a(t-t_1)\left(\arc\sin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c\right), \end{aligned} \right.$$

$$(24')\quad \left\{ \begin{aligned} M_{b,C} &= \log \frac{\varepsilon^2 - b^2 (t-t_1)^2}{\varepsilon}, \\ Q_{b,C} &= \sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t-t_1)^2} \log\left(\frac{\varepsilon^2 - b^2 (t-t_1)^2}{e\varepsilon}\right) + b(t-t_1)\left(\arc\sin\frac{b(t-t_1)}{\varepsilon} + c\right). \end{aligned} \right.$$

Art. 5. – Applications des résultats précédents a l'équation (A) Premier cas.

1. Employons la formule (C) du premier article en prenant le champ S de la manière suivante. Conduisons le cône Λ tel que $\lambda < \operatorname{arc\,tg} a$, et par une surface σ limitons dans son intérieur une partie contiguë au sommet.

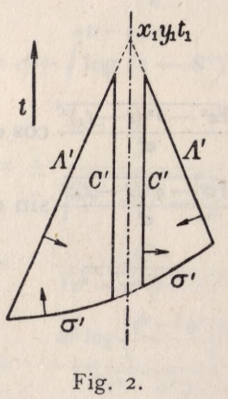

Fig. 2.

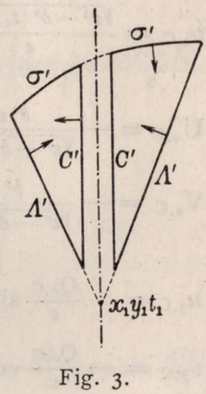

Fig. 3.

Retranchons enfin du solide ainsi formé, la partie intérieure au cylindre C. Le contour Σ du champ S qu'on vient de définir sera formé de parties du cône, du cylindre, et de la surface σ, que nous appellerons respectivement Λ', C', σ'. Deux cas pourront se présenter: ou tout point de S aura une coordonnée $t < t_1$, ou l'on aura au contraire $t > t_1$. Les figures 2, 3 représentent les sections des solides obtenues dans les deux cas par un plan parallèle à l'axe t conduit par le point $x_1 y_1 t_1$.

2. Observons maintenant que dans l'intérieur de l'espace S la fonction w_1 (voir article 2) est régulière; par suite on pourra substituer dans la formule (C) du premier article w_1 à w_λ, et en remarquant que $Z_1 = 0$, on aura

$$(1)\qquad \int_S w_1 Z dS = \int_{\Lambda' + C' + \sigma'} (w W_1 - w_1 W)\, d\Sigma.$$

Lorsqu'on fait l'intégration sur Λ', on doit prendre la normale dirigée vers l'intérieur du cône. Par suite sur Λ' on aura

$$w_1 = w_{1,\Lambda} \quad , \quad W_1 = - W_{1,\Lambda}. \qquad \text{(Voir article 4).}$$

Au contraire sur C′ on devra prendre

$$w_1 = w_{1,C} \quad , \quad W_1 = W_{1,C}. \qquad \text{(Voir article 4).}$$

Observons enfin que sur Λ' on aura

$$d\Sigma = \frac{rdt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

et sur C′,

$$d\Sigma = \varepsilon dt\, d\omega;$$

la formule (1) s'écrira donc

$$\int_S w_1 Z dS = \int_{\sigma'} (wW_1 - w_1 W)\, d\sigma - \int_{\Lambda'} (wW_{1,\Lambda} + w_{1,\Lambda} W) \frac{rdt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C'} (wW_{1,C} - w_{1,C} W)\, dt\, d\omega.$$

Si l'on fait croître λ jusqu'à ce qu'on ait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$, on trouvera $W_{1,\Lambda} = w_{1,\Lambda} = 0$ (article 4, formules (2), (2′)), et par suite l'équation précédente deviendra

$$\int_S w_1 Z dS = \int_\sigma (wW_1 - w_1 W)\, d\sigma' + \varepsilon \int_{C'} (wW_{1,C} - w_{1,C} W)\, dt\, d\omega.$$

Diminuons indéfiniment ε, on aura (voir article 4, formule (17), (17′))

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon w_{1,C} = 0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon W_{1,C} = \pm a^2.$$

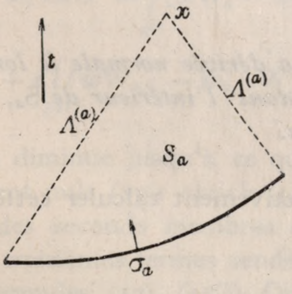

Fig. 4.

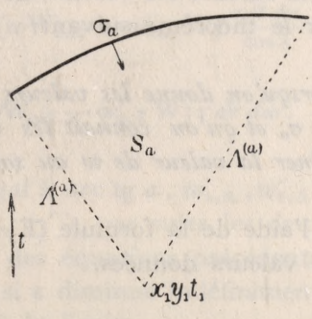

Fig. 5.

Si nous appelons donc (voir figg. 4, 5) S_a l'espace renfermé entre le cône $\Lambda^{(a)}$ dont l'ouverture est $2 \operatorname{arc\,tg} a$ et la surface σ, et que nous désignions par σ_a la partie de σ intérieure au cône, on aura

$$\int_{S_a} w_1 Z dS = \int_{\sigma_a} (wW_1 - w_1 W)\, d\sigma_a \pm a^2 \cdot 2\pi \int_{t_0}^{t_1} w dt,$$

t_0 étant la coordonnée t du point où la ligne $x = x_1$, $y = y_1$ rencontre la surface σ. Dérivons par rapport à t_1 l'équation précédente. Nous obtiendrons

$$(2) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \mp \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{\sigma_a} (w W_1 - w_1 W)\, d\sigma_a \pm \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{S_a} w_1 Z dS \, .$$

Mais (voir article 4, formule (2)) w_1 est nul le long du bord de la surface σ_a et du cône qui limite le solide S_a; par suite on aura (voir article 2, formule (8))

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_a} w_1 W d\sigma = \int_{\sigma_a} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} W d\sigma_a = \pm \int_{\sigma_a} \frac{a}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - r^2}} W d\sigma_a \, ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{S_a} w_1 Z dS_a = \int_{S_a} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} Z dS_a = \pm \int_{S_a} \frac{a}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - r^2}} Z dS_a \, .$$

En substituant pour W_1 la valeur trouvée dans l'article 3, la formule (2) pourra donc s'écrire

$$(\mathrm{E}) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - r^2}} \left(\cos nt - a^2 \frac{t_1 - t}{r} \cos nr \right) w d\sigma_a$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - r^2}} W d\sigma_a + \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - r^2}} Z dS_a \, .$$

Observons maintenant que W est connu lorsqu'on donne sur la surface σ_a les valeurs des dérivées du premier ordre de w, ou lorsqu'on connaît sur cette surface les valeurs de w et de sa dérivée normale. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Lorsqu'on donne les valeurs de w et de sa dérivée normale le long de la surface σ_a et qu'on connaît les valeurs de Z dans l'intérieur de S_a, on peut déterminer la valeur de w au sommet du cône.

A l'aide de la formule (E) on peut effectivement calculer cette valeur par les valeurs données.

Art. 6. – Suite. Deuxième cas.

1. Supposons qu'on ait $\lambda > \operatorname{arc\,tg} a$, 2λ étant l'ouverture du cône Λ. Limitons par une surface σ un champ extérieur au cône, contigu au sommet, et retranchons de ce champ la partie intérieure au cylindre C. Partageons le solide ainsi formé en deux parties par le plan T, et appelons S' la partie dont les points ont une coordonnée $t < t_1$; S'' l'autre partie.

Le contour Σ' de S' sera formé des parties des surfaces σ, Λ, C, T qu'on désignera respectivement par σ', Λ', C', T'. De même on indiquera par σ'', Λ'', C'', T'' les parties correspondantes du contour Σ'' de S''. Evidemment les deux surfaces T', T'' coïncident, mais on devra prendre différemment la direction de la normale sur l'une et sur l'autre (voir fig. 6).

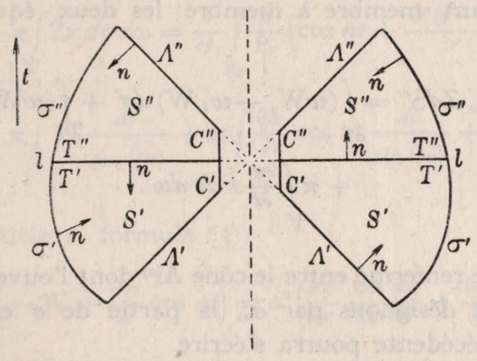

Fig. 6.

2. Appliquons maintenant la formule (C) du premier article aux deux champs S', S'' en prenant $w_\lambda = w_2$. Nous choisirons pour valeur de la constante c, $\pm \pi/2$ selon que l'on se réfère au premier ou au deuxième champ. Appelons w'_2, w''_2 les valeurs de w_2 dans les deux cas; on aura

$$\int_{S'} w'_2\, Z dS' = \int_{\sigma'} (wW_2 - w'_2 W)\, d\sigma' + \int_{\Lambda'} (wW_{2,\Lambda} - w'_{2,\Lambda} W) \frac{r\, dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C'} (wW_{2,C} - w'_{2,C} W)\, d\omega\, dt + \int_{T'} (wW_{2,T} - w'_{2,T} W)\, r\, dr\, d\omega ,$$

$$\int_{S''} w''_2\, Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW_2 - w''_2 W)\, d\sigma'' + \int_{\Lambda''} (wW_{2,\Lambda} - w''_{2,\Lambda} W) \frac{r\, dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C''} (wW_{2,C} - w''_{2,C} W)\, d\omega\, dt + \int_{T''} (wW_{2,T} - w''_{2,T} W)\, r\, dr\, d\omega .$$

Si λ diminue jusqu'à ce qu'il devient égal à arc tg a, $w'_{2,\Lambda}$, $w''_{2,\Lambda}$, $W_{2,\Lambda}$ deviennent nuls (voir article 4, formules (3), (3')), par suite les deuxièmes termes des seconds membres disparaissent des équations précédentes. De plus les troisièmes termes tendent vers zéro si ε diminue indéfiniment (article 4, formules (17), (17')). On aura donc à la limite

$$(1) \qquad \int_{S'} w'_2\, Z dS' = \int_{\sigma'} (wW_2 - w'_2 W)\, d\sigma' + \int_{\overline{T}'} (wW_{2,T'} - w'_{2,T} W)\, r\, dr\, d\omega ,$$

$$(2) \qquad \int_{S''} w''_2\, Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW_2 - w''_2 W)\, d\sigma'' + \int_{\overline{T}''} (wW_{2,T''} - w''_{2,T} W)\, r\, dr\, d\omega ,$$

où $\overline{T}'$, $\overline{T}''$ dénotent T', T'' prolongés jusqu'au point $x_1\, y_1\, t_1$.

Prenant garde aux directions des normales à T′ et à T″ et aux formules (13), (13′) de l'article 4, on aura

$$\int\limits_{\overline{T}'} (wW_{2,T'} - w'_{2,T} W)\, r\, dr\, d\omega + \int\limits_{\overline{T}''} (wW_{2,T''} - w''_{2,T} W)\, r\, dr\, d\omega = \pi \int\limits_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r dr\, d\omega:$$

par suite en ajoutant membre à membre les deux équations (1), (2) on trouvera

$$\int\limits_{S'} w'_2\, Z dS' + \int\limits_{S''} w''_2\, Z dS'' = \int\limits_{\sigma'} (wW_2 - w'_2 W)\, d\sigma' + \int\limits_{\sigma''} (wW_2 - w''_2 W)\, d\sigma''$$
$$+ \pi \int\limits_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r\, dr\, d\omega\, .$$

Appelons $\overline{S}_a$ l'espace renfermé entre le cône $\Lambda^{(a)}$ dont l'ouverture est $2 \operatorname{arc\,tg} a$ et la surface σ, et désignons par $\bar{\sigma}_a$, la partie de σ extérieure au cône.

La formule précédente pourra s'écrire

$$(3) \qquad \int\limits_{\overline{S}_a} \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r} \cdot Z d\overline{S}_a + \frac{\pi}{2} \int\limits_{S'} Z dS' - \frac{\pi}{2} \int\limits_{S''} Z dS''$$
$$= \int\limits_{\bar{\sigma}_a} \left\{ \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + a^2 \frac{t - t_1}{r} \cos nr \right) w - \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r} \cdot W \right\} d\bar{\sigma}_a$$
$$- \frac{\pi}{2} \int\limits_{\sigma'} W d\sigma' + \frac{\pi}{2} \int\limits_{\sigma''} W d\sigma'' + \pi \int\limits_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r\, dr\, d\omega\, .$$

Il suffit pour le voir d'avoir égard aux formules (2) de l'article 3 et (8′) de l'article 2. L'équation qu'on vient d'écrire est vraie pour toute valeur de t_1. On peut donc la dériver par rapport à cette variable. Remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int\limits_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r\, dr\, d\omega = \int\limits_{l} \frac{\partial w}{\partial t} \cos nt \cdot \frac{dl}{\sin \widehat{(tn)}} + \int\limits_{\overline{T}'} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r\, dr\, d\omega\, ,$$

l étant la ligne d'intersection de la surface σ avec le plan T.

D'ailleurs on a

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \int\limits_{\overline{S}_a} \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r} Z d\overline{S}_a + \frac{\pi}{2} \int\limits_{S'} Z dS' - \int\limits_{S''} Z dS'' \right\}$$
$$= - \int\limits_{\overline{S}_a} \frac{a}{P_a} Z d\overline{S}_a + \pi \int\limits_{\overline{T}'} Z r\, dr\, d\omega\, ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \int\limits_{\bar{\sigma}_a} \left\{ \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w - \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r} W \right\} d\bar{\sigma}_a \right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{2} \int\limits_{\sigma'} W d\sigma' + \int\limits_{\sigma''} W d\sigma'' \right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{\bar{\sigma}}_a} \frac{a}{P_a} \cdot W d\bar{\sigma}_a - \pi \int_l W \frac{dl}{\sin \widehat{(nt)}} .$$

Par suite la dérivation de l'équation (3) par rapport à t_1 nous conduira à la formule suivante:

$$- \int_{\bar{S}_a} \frac{a}{P_a} Z d\bar{S}_a + \pi \int_{T'} Z r\, dr\, d\omega = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\bar{\bar{\sigma}}_a} \frac{a}{P_a} W d\bar{\sigma}_a - \pi \int_l W \frac{dl}{\sin \widehat{(tn)}} + \pi \int_l \frac{\partial w}{\partial t} \cos nt \frac{dl}{\sin \widehat{(tn)}} + \pi \int_{T'} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r\, dr\, d\omega .$$

Mais (voir article 1, formule (5))

$$\frac{1}{\sin \widehat{(tn)}} \left(- W + \frac{\partial w}{\partial t} \cos nt \right) = a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\cos nx}{\sin nt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\cos ny}{\sin nt} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \nu x + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \nu y \right) = a^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} ,$$

ν étant la normale à la ligne l située dans le plan T et dirigée vers l'intérieur de T'; et (voir formule (A))

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) .$$

Par suite

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{\bar{\sigma}}_a} \frac{a}{P_a} W d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{S}_a} \frac{a}{P_a} Z d\bar{S}_a$$

$$= - \pi a^2 \left\{ \int_l \frac{\partial w}{\partial \nu} dl + \int_{T'} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dT' \right\} .$$

Le dernier membre est nul par le théorème de GREEN, on a donc

$$\text{(F)} \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\bar{\bar{\sigma}}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}} W d\bar{\sigma} + \int_{\bar{S}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}} Z d\bar{S}_a ,$$

c'est à dire:

Entre les valeurs de w et de ses dérivées du premier ordre le long de la surface $\bar{\sigma}_a$ et les valeurs de Z *dans l'intérieur de* S_a *a lieu la relation exprimée par la formule* (F) (voir fig. 7).

3. Tâchons maintenant d'exprimer la valeur de w dans le point x_1, y_1, t_1 par les valeurs de w et de W sur $\bar{\sigma}_a$ et celles de Z dans $\bar{S}_a$.

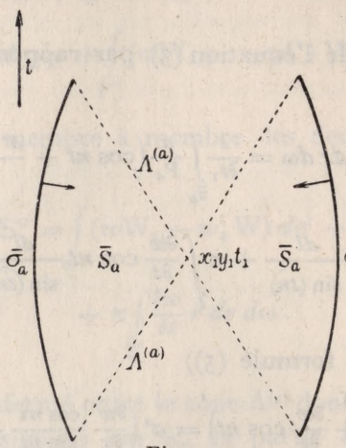

Fig. 7.

À cet effet, nous appliquerons la formule (C) du premier article en prenant $w_\lambda = w_3$ avec

$$\left\{\begin{aligned} c &= \pm q = \pm \int_0^1 \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\,, \\ c' &= \pm\frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}\right.$$

selon que l'on se réfère au premier ou au second champ. Nous appellerons w'_3, w''_3, W'_3, W''_3 les valeurs de w_3, W_3 dans les deux cas. Nous aurons donc

$$\int_{S'} w'_3\, Z dS' = \int_{\sigma'} (wW'_3 - w'_3\, W)\, d\sigma' + \int_{\Lambda'} (wW'_{3,\Lambda} - w'_{3,\Lambda}\, W)\frac{r dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C'} (wW'_{3,C} - w'_{3,C}\, W)\, dt\, d\omega + \int_{T'} (wW'_{3,T'} - w'_{3,T'}\, W)\, r\, dr\, d\omega\,,$$

$$\int_{S''} w''_3\, Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW''_3 - w''_3\, W)\, d\sigma'' + \int_{\Lambda''} (wW''_{3,\Lambda} - w''_{3,\Lambda}\, W)\frac{r\, dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C''} (wW''_{3,C} - w''_{3,C}\, W)\, dt\, d\omega + \int_{T''} (wW''_{3,T''} - w''_{3,T''}\, W)\, r dr\, d\omega\,.$$

Si l'on fait diminuer λ jusqu'à ce que l'on ait $\lambda = \text{arc tg}\, a$, les deuxièmes termes des seconds membres des équations précédentes tendent vers zero, et même les avant-derniers termes s'annulent si ε diminue indéfiniment. À la limite on aura

$$(4) \qquad \int_{S'} w'_3\, Z dS' = \int_{\sigma'} (wW'_3 - w'_3\, W)\, d\sigma' + \int_{\bar{T}'} (wW'_{3,T'} - w'_{3,T'}\, W)\, r dr\, d\omega\,,$$

$$(5) \qquad \int_{S''} w''_3\, Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW''_3 - w''_3\, W)\, d\sigma'' + \int_{\bar{T}''} (wW''_{3,T''} - w''_{3,T''}\, W)\, r\, dr\, d\omega\,.$$

Remarquons maintenant que

$$\int_{\overline{\overline{T}}'} (wW'_{3,T'} - w'_{3,T'} W)\, r\,dr\,d\omega = \int_{\overline{\overline{T}}'} \left[-w\frac{a}{r}\log r + \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right] r\,dr\,d\omega ,$$

$$\int_{\overline{\overline{T}}''} (wW''_{3,T''} - w''_{3,T''} W)\, r\,dr\,d\omega = \int_{\overline{\overline{T}}''} \left[w\frac{a}{r}\log r + \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right] r\,dr\,d\omega ,$$

par suite en ajoutant membre à membre les deux équations (4), (5), on trouvera

$$\int_{S'} w'_3\, Z dS' + \int_{S''} w''_3\, Z dS'' = \int_{\sigma'} (wW'_3 - w'_3 W)\, d\sigma' + \int_{\sigma''} (wW''_3 - w''_3 W)\, d\sigma''$$

$$+ 2\int_{\overline{\overline{T}}} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial t}\, r\,dr\,d\omega .$$

Substituons pour w'_3, w''_3, W'_3, W''_3 les valeurs qu'on tire de la formule (8″) de l'article 2 et de la formule (3) de l'article 3. En posant pour simplifier

$$f(x) = \int_0^x \log(1 - \theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} ,$$

nous aurons

$$\int_{\overline{\overline{S}}_a} \left\{ f\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right) + \log r \arcsin\frac{a(t-t_1)}{r} \right\} Z d\overline{S}_a$$

$$+ \int_{S'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) Z dS' - \int_{S''} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) Z dS''$$

$$= \int_{\overline{\sigma}_a} \left\{ \left[\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\,\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) - a^2\,\frac{\cos nr}{r}\arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}\right] w\right.$$

$$\left. - \left[f\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right) + \log r \cdot \arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}\right] W \right\} d\overline{\sigma}_a$$

$$- a^2\,\frac{\pi}{2}\left\{ \int_{\sigma'} w\,\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\sigma' - \int_{\sigma''} w\,\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\sigma'' \right\}$$

$$- \left\{ \int_{\sigma'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) W d\sigma' - \int_{\sigma''} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) W d\sigma'' \right\}$$

$$+ 2\int_{\overline{\overline{T}}'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial t}\, r\,dr\,d\omega .$$

Dérivons par rapport à t. Par un calcul fort semblable à celui qu'on a fait dans l'article précédent, on trouvera

$$-\int_{\mathrm{S}_a} \frac{a}{\mathrm{P}_a} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right) \mathrm{Z} d\overline{\mathrm{S}}_a + 2\int_{\overline{\mathrm{T}}'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) \mathrm{Z} r\, dr\, d\omega$$

$$= \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a^3 \cos nr}{r \mathrm{P}_a} w d\bar{\sigma}_a + \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{\mathrm{P}_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2 \frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{\mathrm{P}_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right) \mathrm{W} d\sigma_a - \pi a^2 \int_l w \frac{\partial \log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})}$$

$$- 2\int_l \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) \mathrm{W}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})} + 2\int_{\overline{\mathrm{T}}'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r\, dr\, d\omega$$

$$+ 2\int_l \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt \frac{dl}{\sin(\widehat{tn})}.$$

Examinons la somme des termes du second membre où paraissent les intégrales étendues sur la ligne l. Elle peut s'écrire

$$-\pi\int_l w \frac{\partial \log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})} + 2\int_l \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - \mathrm{W}\right)\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})}$$

$$= -\pi a^2 \int_l w \frac{\partial \log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})} + 2a^2\int_l \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial \nu} dl$$

$$= \pi a^2 \int_l \left(\log r \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial \log r}{\partial \nu}\right) dl + 2a^2 q\int_l \frac{\partial w}{\partial \nu} dl.$$

On trouve par suite

$$\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a^3 \cos nr}{r\, \mathrm{P}_a} w d\bar{\sigma}_a + \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{\mathrm{P}_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{\mathrm{P}_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right) \mathrm{W} d\bar{\sigma}_a + \int_{\overline{\mathrm{S}}_a} \frac{a}{\mathrm{P}_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\mathrm{Z} d\overline{\mathrm{S}}_a$$

$$= -2\int_{\overline{\mathrm{T}}'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mathrm{Z}\right) r\, dr\, d\omega$$

$$- 2a^2 q\int_l \frac{\partial w}{\partial \nu} dl - \pi a^2 \int_l \left(\log r \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial \log r}{\partial \nu}\right) dl$$

$$= -2a^2 q\left\{\int_{\overline{\mathrm{T}}'} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) r\, dr\, d\omega + \int_l \frac{\partial w}{\partial \nu} dl\right\}$$

$$- \pi a^2\left\{\int_{\overline{\mathrm{T}}'} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\log r \cdot r\, dr\, d\omega + \int_l \left(\log r \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial \log r}{\partial \nu}\right) dl\right\}.$$

Mais le théorème de GREEN nous dit que des deux termes du second membre le premier est nul et le second est égal à $-2\pi^2 a^2 w(x_1 y_1 t_1)$. Nous aurons donc la formule

$$(F') \qquad w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a \cos nr}{r\sqrt{r^2 - a^2(t-t_1)^2}} w d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) W d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\int_{\bar{S}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) Z d\bar{S}_a .$$

Cette formule fait connaître la valeur de $w(x_1, y_1, t_1)$ lorsque sont données les valeurs de w et de ses dérivées du premier ordre sur la surface $\bar{\sigma}_a$ et celle de Z dans l'espace $\bar{S}_a$.

Art. 7. - Application des formules fondamentales aux équations (B). Premier cas.

1. Faisons dans la formule (D) du premier article $u_\lambda = u_1$, $v_\lambda = v_1$ (voir article 2) et définissons la champ S de la même façon que nous avons fait dans le premier paragraphe du 5ème article.

En remarquant que $X_1 = Y_1 = 0$, on aura

$$\int_S (u_1 X + v_1 Y)\, dS = \int_{\sigma' + \Lambda' + C'} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'')\, d\Sigma .$$

Si λ devient égal à arc tg a, $U''_{1,\Lambda}$, $V'_{1,\Lambda}$, $u_{1,\Lambda}$, $v_{1,\Lambda}$ deviennent nuls, par suite dans cette hypothèse l'équation précédente pourra s'écrire

$$(1) \qquad \int_{S'_a} (u_1 X + v_1 Y)\, dS'_a = \int_{\sigma'_a + C'_a} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'')\, d\Sigma ,$$

S'_a, σ'_a, C'_a désignant S', σ', C' lorsque $\lambda =$ arc tg a.

En posant pour simplifier

$$(2) \qquad \Omega'_a = \int_{\sigma'_a} \left\{ \frac{1}{R_a}\left[\left(-a^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt \sin\omega + \frac{1}{2}(a^2 + a''^2)\cos ny + \frac{1}{2}k''\beta\right)u \right.\right.$$

$$\left. -a^2\left(\frac{t_1-t}{r}\cos nt \cos\omega - \frac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \frac{1}{2}k'\alpha\right)v\right]$$

$$\left. -\frac{R_a}{r}(U'\sin\omega - V''\cos\omega)\right\} d\sigma'_a ,$$

on pourra écrire

$$\int_{\sigma'_a} (u\mathrm{U}''_1 + v\mathrm{V}'_1 - u_1\,\mathrm{U}' - v_1\,\mathrm{V}'')\,d\sigma'_a = \Omega'_a + \int_{\sigma'_a} \frac{\mathrm{R}_a}{r^2}(k''\,\beta u - k'\alpha v)\,d\sigma'_a.$$

En prenant garde aux formules (18), (18') de l'article 4, on aura

$$\int_{\mathrm{C}'_a} (u\mathrm{U}''_1 + v\mathrm{V}'_1 - u_1\,\mathrm{U}' - v_1\,\mathrm{V}'')\,d\mathrm{C}_a = \varepsilon \int_{\mathrm{C}'_a} \frac{a^2 \sin\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}(u\sin\omega - v\cos\omega)\,d\omega\,dt$$

$$+ \int_{\mathrm{C}'_a} \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(k''\,u\sin\omega - k'\,v\cos\omega)\,d\omega\,dt$$

$$- \int_{\mathrm{C}'_a} \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(\mathrm{U}'\sin\omega - \mathrm{V}''\cos\omega)\,d\omega\,dt\,.$$

Mais sur le cylindre C' on a

$$\mathrm{U}'\sin\omega - \mathrm{V}''\cos\omega = \frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2+a''^2}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(-k''\frac{\partial u}{\partial x} + k'\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin 2\omega$$

$$+ \frac{1}{2}\left(k''\frac{\partial u}{\partial y} + k'\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos 2\omega = \frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2+a''^2}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + m\sin 2\omega + n\cos 2\omega$$

en posant

$$2\,m = -\,k''\frac{\partial u}{\partial x} + k'\frac{\partial v}{\partial y}\;, \qquad 2\,n = k''\frac{\partial u}{\partial y} + k'\frac{\partial v}{\partial x}\,;$$

donc, si pour simplifier on appelle p_a l'intégrale

$$\int_{\mathrm{C}_a} \frac{a^2\sin\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}(u\sin\omega - v\cos\omega)\,d\omega\,dt\,,$$

la formule (1) s'écrira

$$(3) \qquad \int_{\mathrm{S}'_a} (u_1\,\mathrm{X} + v_1\,\mathrm{Y})\,d\mathrm{S}'_a = \Omega'_a + \int_{\sigma'_a} \frac{\mathrm{R}_a}{r^2}(k''\,\beta u - k'\,\alpha v)\,d\sigma'_a + \varepsilon p_a$$

$$+ \int_{\mathrm{C}'_a} \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(k''\,u\sin\omega - k'\,v\cos\omega)\,d\omega\,dt$$

$$- \int_{\mathrm{C}'_a} \left(\frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2+a''^2}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + m\sin 2\omega + n\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,d\omega\,dt\,.$$

2. Substituons maintenant dans la formule (D) du premier article u_2, v_2 (voir article 2) à u_λ, v_λ. Faisons augmenter l'ouverture du cône Λ, jusqu'à ce que l'on ait $\lambda = \mathrm{arc\,tg}\,b$, et désignons par S'_b et σ'_b ce que devien-

nent le champ S et la surface σ'. Par un procédé analogue à celui suivi dans le paragraphe précédent on obtiendra la formule

$$(4) \qquad \int_{S'_b} (u_2 X + v_2 Y)\, dS'_b = \Omega'_b + \int_{\sigma'_b} \frac{R_b}{r^2} (k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma'_b + \varepsilon p_b$$

$$+ \int_{C'_b} \frac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \cos\omega + k' v \sin\omega)\, d\omega\, dt$$

$$+ \int_{C'_b} \left(\frac{b^2 + b'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2 + b''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + n \sin 2\omega - m \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt,$$

où

$$(5) \qquad \Omega'_b = \int_{\sigma'_b} \left\{ \frac{1}{R_b} \left(- b^2 \frac{t_1 - t}{r} \cos nt \cos\omega + \frac{1}{2} (b^2 + b'^2) \cos nx + \frac{1}{2} k''\alpha \right) u \right.$$

$$+ \frac{1}{R_b} \left(- b^2 \frac{t_1 - t}{r} \cos nt \sin\omega + \frac{1}{2} (b^2 + b'^2) \cos ny + \frac{1}{2} k'\beta \right) v$$

$$\left. - \frac{R_b}{r} (U' \cos\omega + V'' \sin\omega) \right\} d\sigma'_b ,$$

$$p_b = \int_{C'_b} \frac{b^2}{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} (u \cos\omega + v \sin\omega)\, d\omega\, dt .$$

3. Cela posé, il faut dériver les deux équations (3), (4) par rapport à x_1, y_1. Pour simplifier ce calcul observons que l'on peut écrire (voir article 3, formule (8))

$$\frac{\alpha}{r^2} = - \cos nx \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} - \cos ny \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1},$$

$$\frac{\beta}{r^2} = - \cos nx \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} - \cos ny \frac{\partial^2 \log r}{\partial y_1^2}$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\alpha}{r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\beta}{r^2} \right) = \cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\alpha}{r^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\beta}{r^2} \right) = - \cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} .$$

On tire de là

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\sigma'_a} \frac{R_a}{r^2} (k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma'_a = \int_{\sigma'_a} \frac{\sin\omega}{r R_a} (k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma'_a$$

$$+ \int_{\sigma'_a} R_a \left\{ k'' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} \right) u - \right.$$

$$-k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \Big\} d\sigma'_a$$

$$-\int_g \frac{\mathrm{R}_a}{\varepsilon \cos nt} (k''\,\beta u - k'\,\alpha v) \sin \omega \, d\omega \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\sigma'_b} \frac{\mathrm{R}_b}{r^2} (k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma'_b = \int_{\sigma'_b} \frac{\cos \omega}{r \mathrm{R}_b} (k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma'_b$$

$$+\int_{\sigma'_b} \mathrm{R}_b \Big\{ k''\left(-\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right)$$

$$+ k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \Big\} d\sigma'_b$$

$$-\int_g \frac{\mathrm{R}_b}{\varepsilon \cos nt} (k''\,\alpha u + k'\,\beta v) \cos \omega \, d\omega \,,$$

g étant la ligne d'intersection de la surface σ avec le cylindre C, et n la normale à la surface σ'.

D'ailleurs on a, puisque u_1, v_1 sont nuls sur la surface du cône qui limite l'espace S'_a,

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\mathrm{S}'_a} (u_1 \mathrm{X} + v_1 \mathrm{Y})\, d\mathrm{S}'_a = \int_{\mathrm{S}'_a}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\mathrm{X} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\mathrm{Y}\right) d\mathrm{S}'_a - \int_{\mathrm{C}'_a} (u_1 \mathrm{X} + v_1 \mathrm{Y})\, \varepsilon \sin \omega \, d\omega \, dt$$

$$= \int_{\mathrm{S}'_a} \frac{1}{\mathrm{R}_a} (\mathrm{X} \sin^2 \omega - \mathrm{Y} \sin \omega \cos \omega)\, d\mathrm{S}'_a + \int_{\mathrm{S}'_a} \mathrm{R}_a \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2}\mathrm{X} + \frac{\partial \log r}{\partial x_1 \partial y_1}\mathrm{Y}\right) d\mathrm{S}'_a$$

$$-\int_{\mathrm{C}'_a} (u_1 \mathrm{X} + v_1 \mathrm{Y})\, \varepsilon \sin \omega \, d\omega \, dt$$

et d'une façon analogue

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathrm{S}'_b} (u_2 \mathrm{X} + v_2 \mathrm{Y})\, d\mathrm{S}'_b = \int_{\mathrm{S}'_b} \frac{1}{\mathrm{R}_b} (\mathrm{X} \cos^2 \omega + \mathrm{Y} \sin \omega \cos \omega)\, d\mathrm{S}'_b$$

$$-\int_{\mathrm{S}'_b} \mathrm{R}_b \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2}\mathrm{X} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1}\mathrm{Y}\right) d\mathrm{S}'_b - \int_{\mathrm{C}'_b} (u_2 \mathrm{X} + v_2 \mathrm{Y})\, \varepsilon \cos \omega \, d\omega \, dt \,.$$

Observons enfin que si A est une fonction quelconque

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\mathrm{C}_a} \mathrm{A}\, d\omega \, dt = \int_{\mathrm{C}_a} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\, d\omega \, dt + \int_g \mathrm{A} \frac{\cos ny}{\cos nt}\, d\omega \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathrm{C}_b} \mathrm{A}\, d\omega \, dt = \int_{\mathrm{C}_b} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\, d\omega \, dt + \int_g \mathrm{A} \frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega \,,$$

où n représente toujours la normale à la surface σ. On trouvera donc, en dérivant la formule (3) par rapport à y_1, et la formule (4) par rapport à x_1,

(6)
$$\int_{S'_a} \frac{1}{R_a} (X \sin\omega - Y \cos\omega) \sin\omega \, dS'_a$$

$$+ \int_{S'_a} R_a \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y \right) dS'_a - \int_{C'_a} (u_1 X + v_1 Y) \varepsilon \sin\omega \, d\omega \, dt$$

$$= \frac{\partial \Omega'_a}{\partial y_1} + \int_{\sigma'_a} \frac{\sin\omega}{r R_a} (k'' \beta u - k' \alpha v) \, d\sigma'_a$$

$$+ \int_{\sigma'_a} R_a \left\{ k'' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} \right) u \right.$$

$$\left. - k' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} \right) v \right\} d\sigma'_a$$

$$- \int_g \frac{R_a}{\varepsilon \cos nt} (k'' \beta u - k' \alpha v) \sin\omega \, d\omega + \varepsilon \frac{\partial p_a}{\partial y_1}$$

$$+ \int_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \left(k'' \frac{\partial u}{\partial y} \sin\omega - k' \frac{\partial v}{\partial y} \cos\omega \right) d\omega \, dt$$

$$+ \int_g \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \sin\omega - k' v \cos\omega) \frac{\cos ny}{\cos nt} d\omega$$

$$- \int_{C'_a} \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial m}{\partial y} \sin 2\omega + \frac{\partial n}{\partial y} \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} d\omega \, dt$$

$$- \int_g \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + m \sin 2\omega + n \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \frac{\cos ny}{\cos nt} d\omega,$$

(7)
$$\int_{S'_b} \frac{1}{R_b} (X \cos\omega + Y \sin\omega) \cos\omega \, dS'_b$$

$$- \int_{S'_b} R_b \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y \right) dS'_b - \int_{C'_b} (u_2 X + v_2 Y) \varepsilon \cos\omega \, d\omega \, dt$$

$$= \frac{\partial \Omega'_b}{\partial x_1} + \int_{\sigma_b} \frac{\cos\omega}{r R_b} (k'' \alpha u + k' \beta v) \, d\sigma'_b$$

$$+ \int_{\sigma'_b} R_b \left\{ k'' \left(- \cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} \right) u + \right.$$

$$+ k'\left(\cos nx\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \Big\} d\sigma'_b$$

$$-\int_g \frac{R_b}{\varepsilon \cos nt}(k''\alpha u + k'\beta v)\cos\omega\, d\omega + \varepsilon\,\frac{\partial p_b}{\partial x_1}$$

$$+\int_{C'_b} \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\left(k''\,\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega + k'\,\frac{\partial v}{\partial x}\sin\omega\right) d\omega\, dt$$

$$+\int_g \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(k''u\cos\omega + k'v\sin\omega)\,\frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega$$

$$+\int_{C'_b}\left(\frac{b^2+b'^2}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{b^2+b''^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial n}{\partial x}\sin 2\omega - \frac{\partial m}{\partial x}\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt$$

$$+\int_g \left(\frac{b^2+b'^2}{2}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2+b''^2}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x} + n\sin 2\omega - m\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{2}\,\frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega\,.$$

4. Ajoutons membre à membre les deux équations (6), (7) après les avoir multipliées respectivement par $1/a$, $1/b$.

Puis supposons que ε diminue indéfiniment et cherchons la limite de l'équation ainsi obtenue.

À cet effet remarquons que

$$\frac{R_a}{a} - \frac{R_b}{b} = \frac{(a^2-b^2)\,r^2}{ab\,(bR_a + aR_b)}\,.$$

Si A est une fonction qui reste finie pour $\varepsilon = 0$, on aura

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a} A\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b} A\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a} A\cos\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b} A\cos\omega\, d\omega = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a}\frac{A}{\varepsilon}\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b}\frac{A}{\varepsilon}\sin\omega\, d\omega = \pm\,\pi\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial A}{\partial y}\, dt,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a}\frac{A}{\varepsilon}\cos\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b}\frac{A}{\varepsilon}\cos\omega\, d\omega = \pm\,\pi\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial A}{\partial x}\, dt,$$

où t_0 est la coordonnée t du point de rencontre de la ligne $x = x_1$, $y = y_1$ avec la surface σ. De même on a

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_g A\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_g A\cos\omega\, d\omega = 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_g \frac{A}{\varepsilon}\sin\omega\, d\omega = \pi\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_g \frac{A}{\varepsilon}\cos\omega\, d\omega = \pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0,$$

$(\partial A/\partial x)_0$, $(\partial A/\partial y)_0$ étant les valeurs de $\partial A/\partial x$, $\partial A/\partial y$ pour $x = x_1$, $y = y_1$, $t = t_0$. En prenant garde à ces formules on trouvera

$$\frac{1}{a}\int\limits_{S_a} \frac{1}{R_a}(X \sin\omega - Y \cos\omega) \sin\omega \, dS_a$$

$$+ \frac{1}{b}\int\limits_{S_b} \frac{1}{R_b}(X \cos\omega + Y \sin\omega) \cos\omega \, dS_b - \frac{1}{b}\int\limits_{S_b - S_a} R_b \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{ab}\int\limits_{S_a} \frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS_a - 2\pi\int\limits_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) X \, dt$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial \Omega_a}{\partial y_1} + \frac{1}{b}\frac{\partial \Omega_b}{\partial x_1} + \frac{1}{a}\int\limits_{\sigma_a} \frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma_a + \frac{1}{b}\int\limits_{\sigma_b} \frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma_b$$

$$- \frac{1}{b}\int\limits_{\sigma_b - \sigma_a} R_b \left\{ k''\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right) u \right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \right\} d\sigma$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{ab}\int\limits_{\sigma_a} \frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left\{ k''\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right) u \right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \right\} d\sigma_a$$

$$+ 2\pi\int\limits_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\left\{ a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + b^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)\right\} dt$$

$$- 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+ 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{b^2 + b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

où n_0 dénote la normale à la surface σ dans le point x_1, y_1, t_0, et Ω_a, Ω_b sont égaux aux mêmes intégrales qui paraissent dans les formules (2), (5) si on les suppose étendues aux surfaces, σ_a, σ_b, au lieu qu'aux surfaces σ'_a, σ'_b.

Transportons le dernier terme du premier membre de l'équation précédente dans le second membre, et les premiers six termes du second membre dans le premier. Alors le second membre de l'équation deviendra

$$2\pi\int\limits_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\left\{ b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X\right\} dt$$

$$- 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+ 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{b^2 + b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

c'est à dire, à cause de la première des équations (B') du premier article,

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt-2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{b^2+b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}=2\pi u(x_1,y_1,t_1)$$

$$-2\pi\left\{u_0+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t+\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{b^2+b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right]\right\}.$$

On tire de là la formule suivante

$$(G_1)\qquad u(x_1,y_1,t_1)$$

$$=u_0+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t+\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b^2+b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{S_a}\frac{1}{R_a}(X\sin\omega-Y\cos\omega)\sin\omega\, dS_a$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\int_{S_b}\frac{1}{R_b}(X\cos\omega+Y\sin\omega)\cos\omega\, dS_b$$

$$-\frac{1}{2\pi b}\int_{S_b-S_a}R_b\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}X+\frac{\partial^2\log r}{\partial x\,\partial y}Y\right)dS$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab}\int_{S_a}\frac{r^2}{bR_a+aR_b}\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}X+\frac{\partial^2\log r}{\partial x\,\partial y}Y\right)dS_a$$

$$-\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}-\frac{1}{2\pi b}\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1}-\frac{1}{2\pi a}\int_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u-k'\alpha v)\,d\sigma_a$$

$$-\frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b}\frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u+k'\beta v)\,d\sigma_b$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b-\sigma_a}R_b\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}-\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u\right.$$

$$\left.-k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}+\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}\right)v\right\}d\sigma$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab}\int_{\sigma_a}\frac{r^2}{bR_a+aR_b}\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x^3}-\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y^3}\right)u\right.$$

$$\left.-k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y^3}+\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x^3}\right)v\right\}d\sigma_a.$$

5. Par un procédé tout à fait analogue on peut obtenir la valeur de $v(x_1, y_1, t_1)$ exprimée d'une façon semblable. Il suffit à cet effet de dériver l'équation (4) par rapport à y_1, de dériver l'équation (3) par rapport à x_1, et de les soustraire l'une de l'autre après les avoir respectivement multipliées par $1/b$ et $1/a$; enfin de faire évanouir ε. La formule qu'on trouve est la suivante

$$v(x_1, y_1, t_1)$$

$$(G_2) \qquad = v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \left(\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right.$$

$$\left. - \left(\frac{b^2 + b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi b}\int_{S_b}\frac{1}{R_b}(X\cos\omega + Y\sin\omega)\sin\omega\, dS_b$$

$$- \frac{1}{2\pi a}\int_{S_a}\frac{1}{R_a}(X\sin\omega - Y\cos\omega)\cos\omega\, dS_a$$

$$- \frac{1}{2\pi b}\int_{S_b - S_a} R_b\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y}X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}Y\right)dS$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{2\pi ab}\int_{S_a}\frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y}X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}Y\right)dS_a$$

$$- \frac{1}{2\pi b}\frac{\partial \Omega_b}{\partial y_1} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial \Omega_a}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b}\frac{\sin\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma_b$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{\sigma_a}\frac{\cos\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma_a$$

$$+ \frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b - \sigma_a} R_b\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3} + \cos ny\frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right)u\right.$$

$$\left. + k'\left(\cos nx\frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} - \cos ny\frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3}\right)v\right\}d\sigma$$

$$- \frac{(b^2 - a^2)}{2\pi ab}\int_{\sigma_a}\frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3} + \cos ny\frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right)\right.$$

$$\left. + k'\left(\cos nx\frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} - \cos ny\frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3}\right)v\right\}d\sigma_a .$$

6. On a donc démontré que *si l'on connaît sur la surface σ_b les valeurs de u, v, et de leurs dérivées, on peut trouver leur valeur au sommet commun des deux cônes par les formules* (G_1), (G_2) (voir figg. 8, 9).

Nous avons dû faire un calcul fort laborieux et recourir à plusieurs artifices pour arriver à ce but.

Pour justifier l'emploi de ces artifices, observons qu'on ne pouvait pas faire évanouir tout de suite ε dans les formules (3), (4), car on aurait trouvé

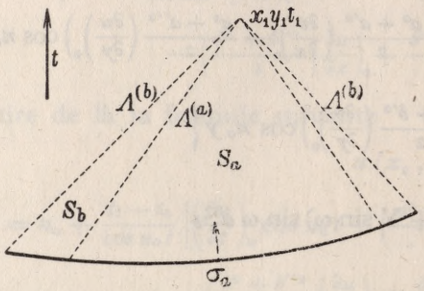

Fig. 8.

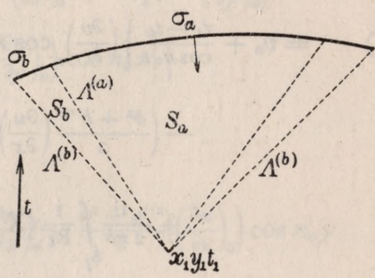

Fig. 9.

sous les signes d'intégration des fonctions qui seraient devenues infinies d'un ordre supérieur à celui qu'elles n'auraient dû dépasser afin que les intégrales aient une valeur déterminée et finie.

Art. 8. – Suite. Deuxième cas.

1. Revenons aux champs S', S'' du 6ème article et appelons S leur ensemble. Appliquons à ce champ la formule fondamentale (D) en supposant

$$u_\lambda = u_3 \quad , \quad v_\lambda = v_3 .$$

Dans ce cas Σ sera formé de l'ensemble des surfaces σ', σ'' qu'on appellera σ, de la partie du cône Λ qu'on appellera (Λ) et de celle du cylindre C qu'on désignera par (C). On aura donc

$$\int_S (u_3 \mathrm{X} + v_3 \mathrm{Y})\, d\mathrm{S} = \int_{\sigma + (\Lambda) + (\mathrm{C})} (u \mathrm{U}_3'' + v \mathrm{V}_3' - u_3 \mathrm{U}' - v_3 \mathrm{V}'')\, d\Sigma$$

et à cause des formules (7), (7'), (20), (20') de l'article 4

$$\int_S (u_3 \mathrm{X} + v_3 \mathrm{Y})\, d\mathrm{S} = \int_\sigma (u \mathrm{U}_3'' + v \mathrm{V}_3' - u_3 \mathrm{U}' - v_3 \mathrm{V}'')\, d\sigma$$

$$+ \int_{(\Lambda)} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\mathrm{tg}^2 \lambda}} \left\{ \frac{\cos \lambda}{r} (u \sin \omega - v \cos \omega) - (\mathrm{U}' \sin \omega - \mathrm{V}'' \cos \omega) \frac{r\, dt\, d\omega}{\cos \lambda} + \right.$$

$$+\int_{(C)}\left\{\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)^2}}(-u\sin\omega+v\cos\omega)\right.$$

$$+\sqrt{1-a^2\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)^2}\,(k''u\sin\omega-k'v\cos\omega)$$

$$\left.-\varepsilon\sqrt{1-a^2\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)^2}\,(U'\sin\omega-V''\cos\omega)\right\}d\omega\,dt.$$

Si l'angle λ devient arc tg a, la deuxième intégrale s'évanouit, et par suite en posant

$$a\frac{t-t_1}{\varepsilon}=\eta,$$

on aura

$$\int_S(u_3X+v_3Y)\,dS=\int_{\bar\sigma_a}(uU_3''+vV_3'-u_3U'-v_3V'')\,d\bar\sigma_a$$

$$+\frac{\varepsilon}{a}\int_0^{2\pi}d\omega\int_{-1}^{1}\left\{\frac{a^2}{\sqrt{1-\eta^2}}(-u\sin\omega+v\cos\omega)\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\eta^2}\,[k''u\sin\omega-k'v\cos\omega-\varepsilon(U'\sin\omega-V''\cos\omega)]\right\}d\eta$$

où l'on a désigné par $\bar\sigma_a$ la même surface que nous avons indiquée par le même symbole dans l'article 6.

Si ε devient nul le dernier terme s'évanouit et le champ S devient $\bar S_a$. On trouve donc la formule

$$(\mathrm{H}_1)\qquad \int_{\bar S_a}(u_3X+v_3Y)\,d\bar S_a=\int_{\bar\sigma_a}(uU_3''+vV_3'-u_3U'-v_3V'')\,d\bar\sigma_a\,.$$

De même, si l'on appelle $\bar S_b$ l'espace extérieur au cône $\Lambda^{(b)}$, dont l'ouverture est 2 arc tg b, limité par la surface du cône et la surface $\bar\sigma_b$, on aura

$$(\mathrm{H}_2)\qquad \int_{\bar S_b}(u_4X+v_4Y)\,d\bar S_b=\int_{\bar\sigma_b}(uU_4''+vV_4'-u_4U'-v_4V'')\,d\bar\sigma_b\,.$$

Les deux formules (H_1), (H_2) sont analogues à la formule (F) de l'article 6. Elles donnent *des relations entre* u, v *et leurs dérivées du premier ordre sur les surfaces* $\bar\sigma_a$, $\bar\sigma_b$, *et les valeurs de* X, Y *dans les espaces* $\bar S_a$, $\bar S_b$.

2. Supposons maintenant que $\bar\sigma_b$ soit une partie de la surface $\bar\sigma_a$, et cherchons d'exprimer les valeurs de u, v au point x_1, y_1, t_1 par celles des mêmes quantités et de leurs dérivées sur $\bar\sigma_a$ et par les valeurs de X, Y dans l'intérieur de l'espace S_a.

À cet effet nous nous servirons des dernières intégrales fondamentales que nous avons trouvées dans l'article 2.

Commençons par appliquer la formule fondamentale (D) de l'article 1 aux champs S', S'' du 6ème article en supposant

$$u_\lambda = u_5 \quad , \quad v_\lambda = v_5 \qquad \text{(voir article 2).}$$

Nous prendrons la constante arbitraire c qui paraît dans ces fonctions égale à $\pm \pi/2$ selon qu'on se réfère au champ S' ou au champ S''. Nous désignerons par

$$u_{5,1}\,,\; v_{5,1}\,,\; U''_{5,1}\,,\; V'_{5,1}\,,$$
$$u_{5,2}\,,\; v_{5,2}\,,\; U''_{5,2}\,,\; V'_{5,2}\,,$$

les valeurs de u_5, v_5, U''_5, V'_5 dans les deux cas. On aura donc (cf. article 6)

$$\int\limits_{S'} (u_{5,1}\,X + v_{5,1}\,Y)\,dS' = \int\limits_{\sigma'+\Lambda'+C'+T'} (uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}\,U' - v_{5,1}\,V'')\,d\Sigma\,,$$

$$\int\limits_{S''} (u_{5,2}\,X + v_{5,2}\,Y)\,dS'' = \int\limits_{\sigma''+\Lambda''+C''+T''} (uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}\,U' - v_{5,2}\,V'')\,d\Sigma\,.$$

Ayant égard aux formules (9), (9'), (11), (12) de l'article 4 on voit aisément que les intégrales étendues à Λ', Λ'' s'évanouissent lorsqu'on fait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$.

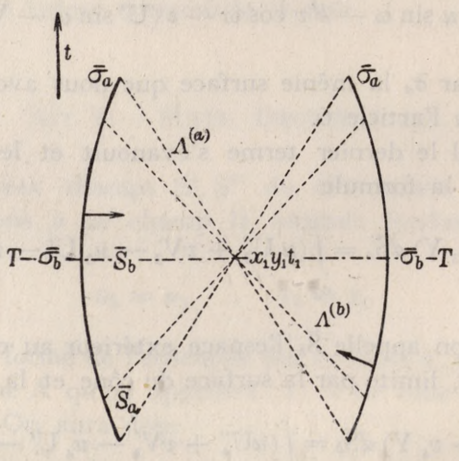

Fig. 10.

De même les intégrales étendues à C', C'' s'annulent à la limite lorsque ε diminue indéfiniment. C'est pourquoi en désignant par $\bar{S}_{a,1}$, $\bar{S}_{a,2}$; $\bar{\sigma}_{a,1}$, $\bar{\sigma}_{a,2}$ les deux parties de $\bar{S}_a$ et de $\bar{\sigma}_a$ qui se trouvent des deux côtés du plan T et si $\bar{T}', \bar{T}''$ dénotent T', T'' prolongées jusqu'au point x_1, y_1, t_1, on aura (voir article 4, formules (15), (15'))

$$\int\limits_{\bar{S}_{a,1}} (u_{5,1}\,X + v_{5,1}\,Y)\,d\bar{S}_{a,1} = \int\limits_{\bar{\sigma}_{a,1}} (uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}\,U' - v_{5,1}\,V'')\,d\bar{\sigma}_{a,1} -$$

$$-\frac{\pi}{2} a \int_{\bar{\bar{T}}'} \frac{1}{r}(u \sin\omega - v \cos\omega)\, r\, dr\, d\omega - \int_{\bar{\bar{T}}'} \frac{(\log r - 1)}{r}(U' \sin\omega - V'' \cos\omega)\, r\, dr\, d\omega,$$

$$\int_{\bar{S}_{a,2}} (u_{5,2}\, X + v_{5,2}\, Y)\, d\bar{S}_{a,2} = \int_{\bar{\sigma}_{a,2}} (u U''_{5,2} + v V'_{5,2} - u_{5,2}\, U' - v_{5,2}\, V'')\, d\bar{\sigma}_{a,2}$$

$$-\frac{\pi}{2} a \int_{\bar{\bar{T}}'} \frac{1}{r}(u \sin\omega - v \cos\omega)\, r\, dr\, d\omega - \int_{\bar{\bar{T}}''} \frac{(\log r - 1)}{r}(U' \sin\omega - V'' \cos\omega)\, r\, dr\, d\omega.$$

Si nous observons maintenant que les valeurs de U', V'' sur T', T'' sont égales et de signes contraires (cf. article 6) on aura, en ajoutant membre à membre les deux équations précédentes,

$$(1) \qquad \int_{\bar{S}_{a,1}} (u_{5,1}\, X + v_{5,1}\, Y)\, d\bar{S}_{a,1} + \int_{\bar{S}_{a,2}} (u_{5,2}\, X + v_{5,2}\, Y)\, d\bar{S}_{a,2}$$

$$= \int_{\bar{\sigma}_{a,1}} (u U''_{5,1} + v V'_{5,1} - u_{5,1}\, U' - v_{5,1}\, V'')\, d\bar{\sigma}_{a,1}$$

$$+ \int_{\bar{\sigma}_{a,2}} (u U''_{5,2} + v V'_{5,2} - u_{5,2}\, U' - v_{5,2}\, V'')\, d\bar{\sigma}_{a,2}$$

$$-\pi a \int_{\bar{\bar{T}}'} \frac{1}{r}(u \sin\omega - v \cos\omega)\, r\, dr\, d\omega.$$

Posons

$$(2) \qquad \Theta_a = \frac{1}{a}\Big\{ \int_{\bar{S}_{a,1}} (u_{5,1}\, X + v_{5,1}\, Y)\, d\bar{S}_{a,1} + \int_{\bar{S}_{a,2}} (u_{5,2}\, X + v_{5,2}\, Y)\, d\bar{S}_{a,2}$$

$$- \int_{\bar{\sigma}_{a,1}} (u U''_{5,1} + v V'_{5,1} - u_{5,1}\, U' - v_{5,1}\, V'')\, d\bar{\sigma}_{a,1}$$

$$- \int_{\bar{\sigma}_{a,2}} (u U''_{5,2} + v V'_{5,2} - u_{5,2}\, U' - v_{5,2}\, V'')\, d\bar{\sigma}_{a,2} \Big\}$$

et remarquons que

$$\frac{\sin\omega}{r} = -\frac{\partial \log r}{\partial y_1}\ , \qquad \frac{\cos\omega}{r} = -\frac{\partial \log r}{\partial x_1};$$

alors l'équation (1) pourra s'écrire

$$(3) \qquad \pi\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\bar{\bar{T}}'} u \log r \cdot r\, dr\, d\omega - \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\bar{\bar{T}}'} v \log r \cdot r\, dr\, d\omega\right] = \Theta_a.$$

3. Désignons par

$$u_{6,1}\,,\ v_{6,1}\,,\ U''_{6,1}\,,\ V'_{6,1}\,,$$

$$u_{6,2}\,,\ v_{6,2}\,,\ U''_{6,2}\,,\ V'_{6,2}\,,$$

les valeurs de u_6, v_6, U''_6, V'_6 (voir article 2, formules (14), article 3, formules (12)) selon que l'on prend $c = \pm \pi/2$.

Si $\overline{S}_{b,1}$, $\overline{S}_{b,2}$; $\overline{\sigma}_{b,1}$, $\overline{\sigma}_{b,2}$ sont les parties de $\overline{S}_b$, $\overline{\sigma}_b$ qui se trouvent des deux côtés du plan T, par le procédé employé dans le paragraphe précédent on trouvera

$$(4) \qquad \pi\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{T'} u \log r\cdot r\,dr\,d\omega + \frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{T'} v \log r\cdot r\,dr\,d\omega\right] = \Theta_b,$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(5) \qquad \Theta_b = \frac{1}{b}\left\{\int\limits_{\overline{S}_{b,1}} (u_{6,1}X + v_{6,1}Y)\,d\overline{S}_{b,1} + \int\limits_{\overline{S}_{b,2}} (u_{6,2}X + v_{6,2}Y)\,d\overline{S}_{b,2}\right.$$

$$-\int\limits_{\overline{\sigma}_{b,1}} (uU''_{6,1} + vV'_{6,1} - u_{6,1}U' - v_{6,1}V'')\,d\overline{\sigma}_{b,1}$$

$$\left.-\int\limits_{\overline{\sigma}_{b,2}} (uU''_{6,2} + vV'_{6,2} - u_{6,2}U' - v_{6,2}V'')\,d\overline{\sigma}_{b,2}\right\}.$$

4. Des équations (3), (4) on tire

$$\frac{\partial\Theta_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_a}{\partial y_1} = \pi\Delta\int\limits_{T'} u\log r\cdot r\,dr\,d\omega,$$

$$\frac{\partial\Theta_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_a}{\partial x_1} = \pi\Delta\int\limits_{T'} v\log r\cdot r\,dr\,d\omega,$$

où le symbole Δ dénote

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

Mais, par un théorème bien connu relatif aux potentiels logarithmiques, on a

$$\Delta\int\limits_{T'} u\log r\cdot r\,dr\,d\omega = 2\pi u\,(x_1, y_1, t_1),$$

$$\Delta\int\limits_{T'} v\log r\cdot r\,dr\,d\omega = 2\pi v\,(x_1, y_1, t_1),$$

par suite

$$(H'_1) \qquad u\,(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\partial\Theta_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_a}{\partial y_1}\right],$$

$$(H'_2) \qquad v\,(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\partial\Theta_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_a}{\partial x_1}\right].$$

Ces formules donnent les valeurs de u, v *au sommet* x_1, y_1, t_1 *des cônes par les valeurs des mêmes quantités et de* U', V'' *sur la surface* σ_a, *et par celles de* X, Y *dans l'intérieur de l'espace* $\overline{S}_a$ (voir fig. 10).

Art. 9. – Conséquences des résultats trouvés.

1. Les surfaces coniques Λ dont les ouvertures sont $2 \operatorname{arc tg} a$, $2 \operatorname{arc tg} b$, ont joué dans le cours de ces recherches un rôle bien important. Nous les appellerons les *surfaces caractéristiques* et nous les désignerons respectivement par $\Lambda_A^{(a)}$, $\Lambda_A^{(b)}$, A étant leur sommet.

2. Supposons pour simplifier $Z = 0$, et que l'on connaisse les valeurs de w et de W sur une surface σ quelconque. On peut se poser la question: *dans quelle partie de l'espace pourra-t-on déterminer la fonction* w?

Les formules (E), (F') que nous avons donné dans les articles 5 et 6 nous montrent qu'*on peut calculer la valeur de w dans tout point* A *par lequel on peut conduire un cône* $\Lambda_A^{(a)}$ *qui découpe, soit dans son intérieur, soit extérieurement, une partie de la surface σ dont le bord est formé seulement de l'intersection du cône avec la surface.*

Pour simplifier on dira que le cône $\Lambda_A^{(a)}$ *coupe intérieurement ou extérieurement, d'une manière complète la surface* σ.

On trouve par là bien aisément l'espace $S^{(\sigma)}$, lieu géométrique des points A, en conduisant les cônes $\Lambda_L^{(a)}$ par tous les points L du bord de la surface σ et en cherchant leur enveloppe.

3. De même, X et Y étant nuls, *si l'on connaît u, v et leurs dérivées du premier ordre sur la surface σ on pourra déterminer ces fonctions par les formules* (G_1), (G_2), (H'_1), (H'_2) *dans un point* B *si l'on peut conduire un cône* $\Lambda_B^{(b)}$ *qui coupe intérieurement, d'une manière complète la surface σ, ou si l'on peut conduire un cône $\Lambda_B^{(a)}$ qui coupe extérieurement d'une manière complète la même surface.*

Par l'enveloppe des cônes $\Lambda_L^{(b)}$ et des cônes $\Lambda_L^{(a)}$ on pourra limiter l'espace qui est le lieu géométrique des points B.

4. Si la surface σ est telle qu'on peut la couper *extérieurement* d'une manière complète par des cônes $\Lambda_A^{(a)}$, alors *entre w, W doivent subsister les relations données par la formule* (F) *de l'article 6.*

De même si la surface σ est coupée d'une manière complète *extérieurement* par des cônes $\Lambda_B^{(a)}$, $\Lambda_B^{(b)}$, *entre u, v*, U', V'' *doivent subsister les relations données par les formules* (H_1), (H_2) *de l'article 8.*

5. Dans les expressions de U', V'' paraissent les constantes a', b', a'', b'' qui satisfont aux conditions (1) du 1[er] article. On peut se servir du caractère arbitraire des constantes k', k'' pour donner à a', b', a'', b'' des valeurs telles que U', V'' s'expriment par des quantités qui ont une signification mécanique. Par exemple posons

$$a = a' = a'' \quad , \quad b = b' = b'', \tag{1}$$

on trouvera alors

$$U' = \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\vartheta\cos nx + a^2\tilde{\omega}\cos ny\,,$$

$$V'' = \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - a^2\tilde{\omega}\cos nx - b^2\vartheta\cos ny\,,$$

où

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\quad , \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Il est bien connu que ϑ représente la *dilatation superficielle de chaque élément parallèle au plan xy*, et que $\tilde{\omega}/2$ représente la *composante de la rotation de chaque élément autour de l'axe Z*.

Dans l'hypothèse (1) les quantités qui paraissent au dehors des signes d'intégration dans les formules (G_1) et (G_2) de l'article 7 deviennent

$$u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t + a^2\tilde{\omega}_0\cos n_0 y - b^2\vartheta_0\cos n_0 x\right] = u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}U'_0,$$

$$v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - a^2\tilde{\omega}_0\cos n_0 x - b^2\vartheta_0\cos n_0 y\right] = v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}V''_0\,.$$

Au lieu des équations (1), posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a'^2 &= a''^2 = -a^2,\\ b'^2 &= b''^2 = \quad b^2 - 2a^2,\end{aligned}\right.$$

on aura alors

$$U' = \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - t_{11}\cos nx - t_{12}\cos ny\,,$$

$$V'' = \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - t_{12}\cos nx - t_{22}\cos ny\,,$$

où

$$\left\{\begin{aligned} t_{11} &= b^2\frac{\partial u}{\partial x} + (b^2 - 2a^2)\frac{\partial v}{\partial y}\,,\\ t_{22} &= b^2\frac{\partial v}{\partial y} + (b^2 - 2a^2)\frac{\partial u}{\partial x}\,,\\ t_{12} &= a^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).\end{aligned}\right.$$

Les quantités précédentes sont *les composantes des tensions qui s'exercent dans l'intérieur du corps élastique*. Dans l'hypothèse (2) les quantités qui paraissent au dehors des signes d'intégration dans les formules (G_1), (G_2) de l'article 7 deviennent

$$u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\cos n_0 x\right],$$

$$v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\cos n_0 y\right].$$

6. Si l'on a

$$\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nt = 0 ,$$

n étant la normale à la surface σ, la quantité

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma \frac{\partial w}{\partial t}$$

sera connue si l'on donne seulement les valeurs de w sur la surface σ.

Par suite si la condition

$$(3) \qquad (-a^2 \cos nx) \cos nx + (-a^2 \cos ny) \cos ny + \cos nt \cdot \cos nt = 0$$

est satisfaite, W sera connu sur la surface σ, si l'on connait w sur la même surface (cf. formule (5) du premier article).

L'équation (3) peut s'écrire

$$\cos^2 nt - a^2 \sin^2 nt = 0$$

d'où

$$\operatorname{tg} nt = \pm \frac{1}{a} .$$

On tire de là:

Si la surface σ est telle que $\operatorname{tg} nt = \pm 1/a$, *la fonction w sera déterminée dans tout point de l'espace* $S^{(a)}$, *même si l'on connaît sur la surface σ les valeurs de w seulement.*

Il est évident que toute surface obtenue par l'enveloppe des cônes $\Lambda_A^{(a)}$ jouit de cette propriété.

Art. 10. – Particularisation des formules.

1. Commençons par prouver que la formule de Poisson–Parseval n'est qu'un cas particulier de la formule (E) de l'article 5. En effet, sup-

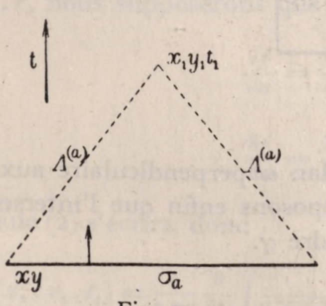

Fig. 11.

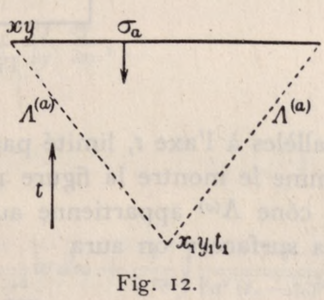

Fig. 12.

posons que la surface σ soit le plan xy (voir figg. 11, 12). Alors σ_a deviendra un cercle dont le rayon est

$$| at_1 | .$$

D'ailleurs sur σ on aura

$$\cos nt = \pm 1 \quad , \quad \cos nx = \cos ny = 0 :$$

par suite, si l'on suppose $Z = 0$, l'équation (E) du 5ème article s'écrira

$$(1) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \pm \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int\limits_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} w d\sigma_a$$

$$\pm \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} \frac{\partial w}{\partial t} d\sigma_a ,$$

qui est l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

donnée par POISSON et PARSEVAL.

2. En nous rapportant toujours à la formule (E) de l'article 5, supposons que nous nous trouvions dans le premier cas, c'est à dire que les coordonnées t des points de la surface σ soient plus petites que t_1. Examinons ce qu'on a lorsque la surface σ_a se réduit à un cylindre γ avec les généra-

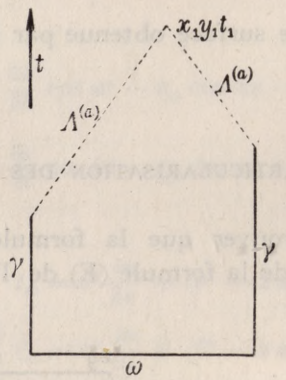

Fig. 13.

trices parallèles à l'axe t, limité par un plan ω perpendiculaire aux génératrices, comme le montre la figure 13. Supposons enfin que l'intersection de σ avec le cône $\Lambda^{(a)}$ appartienne au cylindre γ.

Sur la surface γ on aura

$$\cos nt = 0,$$

et sur ω

$$t = \text{const.} = t_0 \quad , \quad \cos nx = \cos ny = 0 \quad , \quad \cos nt = 1 .$$

C'est pourquoi, en appelant s le contour de ω, l'équation (E) de l'article 5 deviendra, Z étant nul,

$$(2)\quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\, w\, d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t} d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\gamma \frac{a^2}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{t-t_1}{r}\cos nr\cdot w\, d\gamma - \frac{1}{2\pi a}\int_\gamma \frac{a^2}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n} d\gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\, w\, d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t} d\omega$$

$$+\frac{a}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{t-t_1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\, w\, dt - \int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n} dt\right\}.$$

Posons $a(t_1-t) = u$, on aura

$$\int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n} dt = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{t-t_1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\, w\, dt = \frac{1}{a^2}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{a(t_1-t_0)}\frac{-u\, du}{\sqrt{u^2-r^2}}\, w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} = \frac{1}{a}\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}},$$

où les symboles $\partial/\partial n$, $\delta/\delta n$ ont la signification suivante. Si f est une fonction de x, y, r, nous supposerons que

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

$$\frac{\delta f}{\delta n} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

La formule (2) s'écrira donc

$$(3)\quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\, w\, d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t} d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Supposons que la fonction $w(x, y, t)$ soit nulle pour toute valeur de t inférieure à une certaine limite $-T$, alors en faisant diminuer indéfiniment t_0 on trouvera

$$w(x_1, y_1, t_1) \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^\infty w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^\infty w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

3. Examinons maintenant le deuxième cas, c'est à dire supposons que les coordonnées t des points de σ soient supérieures à t_1, tandis que la surface σ se réduit à un cylindre γ dont les génératrices sont parallèles à t, limité par un plan ω perpendiculaire aux génératrices. Supposons enfin que l'intersection de σ avec le cône $\Lambda^{(a)}$ appartienne à γ (voir fig. 14).

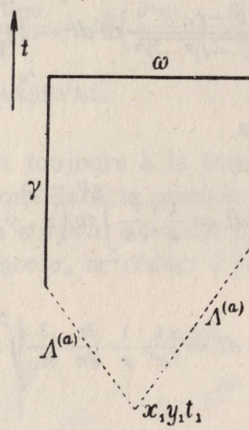

Fig. 14.

Par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le paragraphe précédent on trouve la formule

$$w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\, w(x, y, t_0)\, d\omega \tag{5}$$
$$-\frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\, d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_0 - t_1)} w\left(x, y, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_0 - t_1)} w\left(x_1, y_1, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

Si $w(x, y, t)$ s'annule pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite T, en faisant augmenter indéfiniment t_0, la formule précédente deviendra

$$w(x_1, y_1, t_1) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^\infty w\left(x_1, y_1, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^\infty w\left(x_1, y_1, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

4. Il faut maintenant chercher ce que deviennent les formules (F), (F′) de l'article 6, lorsque la surface σ_a se réduit à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe t.

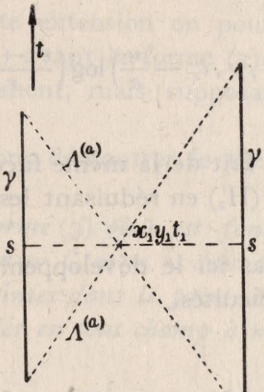

Fig. 15.

On voit tout de suite qu'en supposant toujours Z = o, la formule (F) devient

$$(7)\quad \begin{aligned} \text{o} = \int_s ds \Bigg\{ \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} w\left(x\,,y\,,t_1 - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \\ - \frac{\delta}{\delta n} \int_{-r}^{r} w\left(x\,,y\,,t_1 - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \Bigg\}, \end{aligned}$$

s étant la ligne d'intersection du cylindre avec le plan $t = t_1$ (voir fig. 15). Examinons maintenant la formule (F′) (article 6). Elle s'écrira

$$\begin{aligned} w\,(x_1\,,y_1\,,t_1) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_s ds \Bigg\{ \int_{t_1 - r/a}^{t_1 + r/a} \frac{a \cos nr}{r\sqrt{r^2 - a^2\,(t - t_1)^2}}\, w\,dt \\ + \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_1 - r/a}^{t_1 + r/a} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2\,(t - t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2\,(t - t_1)^2}{r}\right) \frac{t - t_1}{r}\, w\,dt \\ - \int_{t_1 - r/a}^{t_1 + r/a} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2\,(t - t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2\,(t - t_1)^2}{r}\right) \frac{\partial w}{\partial n}\, dt \Bigg\} \end{aligned}$$

et en posant

$$a\,(t - t_1) = u,$$

on trouvera

$$w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right.$$

(8)

$$\left. - \frac{\delta}{\delta n}\int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right\}.$$

5. On pourrait tout à fait de la même façon particulariser les formules (G_1), (G_2), (H_1), (H_2), (H'_1), (H'_2) en réduisant les surfaces σ_b, $\overline{\sigma}_a$ à des cylindres ou à des plans.

Nous ne donnerons pas ici le développement de ces calculs qui d'ailleurs ne présentent de difficultés.

Art. 11. – Le principe de Huyghens.

1. Par une élégante application du théorème de Green, Kirchhoff est parvenu à établir sa célèbre formule qui étend le principe de Huyghens et peut le donner sous une forme mathématique tout à fait rigoureuse (3).

Son procédé est fondé sur l'existence de l'intégrale

(1) $$\frac{f(r \pm at)}{r}$$

de l'équation

(1′) $$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}\right)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et f dénote une fonction arbitraire.

Dans le cas des ondes cylindriques l'équation précédente devient

(2) $$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}\right)$$

et l'on peut démontrer qu'il n'y a pas d'intégrale de la forme

(3) $$\lambda f(r \pm at)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, λ étant une fonction de r seulement. D'ailleurs si l'on cherche les cas dans lesquels l'équation générale

(4) $$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2 \sum_{1}^{m}{}_i \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}$$

possède des intégrales de la forme (3), où $r = \left(\sum_1^m{}_i x_i^2\right)^{1/2}$, et λ est une fonction de r seulement, on trouve qu'il n'y en a que deux, savoir lorsque $m = 1$,

(3) *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, « Sitzungsber. d. Berliner Akademie », 1882.

ou $m = 3$ [4]. C'est pourquoi on ne donne ordinairement une formule analogue à celle de KIRCHHOFF dans le cas des ondes cylindriques, ni on étend la même formule au cas général.

2. Ayant en vue cette extension on pourrait tâcher de trouver des intégrales de l'équation (4) ayant la forme (3) sans poser la condition que λ soit fonction de r seulement, mais supposant qu'elle soit fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

A ce propos nous allons démontrer le théorème suivant:

Les intégrales de la forme (3) *où* λ *est fonction de* $x_1, \cdots, x_m$ *existent; mais si l'on exclue les cas* $m = 1$, $m = 3$, *dans tous les autres, non seulement les intégrales deviennent infinies dans le point* $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$, *mais elles ont d'autres singularités en tout champ à* m *dimensions qui renferme ce point.*

Si $x_i = r\beta_i$, on aura $\sum_1^m {}_i \beta_i^2 = 1$, et par suite on pourra poser

$$\beta_1 = \cos\alpha_1, \ \beta_2 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \cdots, \beta_{m-1} = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_{m-2} \cos\alpha_{m-1},$$

$$\beta_m = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_{m-2} \sin\alpha_{m-1},$$

et l'on pourra regarder λ comme une fonction de r et de $\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$.

Posons pour simplifier

$$\Delta = \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad V = \lambda f(r + at).$$

Nous aurons

$$\Delta V = f \cdot \Delta\lambda + \lambda \cdot \Delta f + 2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Mais

$$\Delta f = f'' + \frac{m-1}{r} f',$$

$$\sum_1^m {}_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial r} f';$$

c'est pourquoi

$$\Delta V = f''\lambda + f'\left(\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial \lambda}{\partial r}\right) + f\Delta\lambda.$$

D'ailleurs nous avons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \lambda f'',$$

(4) DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* Cours professé en 1890–91. Tome II, livre III, chap. VIII.

par suite l'équation (4) s'écrira

$$f'\left(\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) + f\Delta\lambda = 0,$$

et puisque f doit être arbitraire

$$\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial\lambda}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

$$\Delta\lambda = 0. \tag{6}$$

La première équation nous donne

$$\lambda = \theta r^{-\frac{m-1}{2}},$$

θ étant fonction de $\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$ seulement. Par suite l'équation (6) se transforme dans la suivante

$$-\frac{(m-1)(m-3)}{4}\theta + \frac{1}{\sin^{m-2}\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\sin^{m-2}\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}\right) \tag{7}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\alpha_1\sin^{m-3}\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\sin^{m-3}\alpha_2\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}\right) + \cdots + \frac{1}{\sin^2\alpha_1\cdots\sin^2\alpha_{m-2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_{m-1}^2} = 0.$$

Cela démontre la première partie du théorème, c'est à dire qu'il y a des intégrales de la forme (3). Dans les cas $m = 1$, $m = 3$, on pourra prendre évidemment $\theta = \text{const.}$ et par suite dans le dernier cas on aura une singularité pour V dans le point $r = 0$ seulement. Il faut maintenant prouver dans tous les autres cas l'existence de singularités dans les environs du point $r = 0$.

Supposons que l'intégrale V, dans un champ Σ_m à m dimensions qui renferme le point $r = 0$, n'ait d'autre singularité que dans ce point même.

Conduisons dans l'intérieur de Σ_m deux espaces sphériques S_{m-1}, Ω_{m-1} à $m-1$ dimensions ayant le centre dans le point $r = 0$. Soit S_m l'espace à m dimensions renfermé entre S_{m-1} et Ω_{m-1}.

Désignons par W une fonction régulière dans tout l'espace renfermé dans S_{m-1} et qui satisfait à l'équation différentielle $\Delta W = 0$.

Puisque V et W sont regulières dans S_m, on aura par le théorème de Green

$$\int_{S_{m-1}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS_{m-1} + \int_{\Omega_{m-1}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\Omega_{m-1} = 0,$$

n, n' étant les normales à S_{m-1} et Ω_{m-1} dirigées vers l'intérieur de l'espace S_m. Puisque V devient infini d'ordre $(m-1)/2$ dans le point $r = 0$, si $m > 3$, l'integrale étendue à Ω_{m-1} s'évanouira lorsque son rayon diminuera indéfiniment, et par suite on aura

$$\int_{S_{m-1}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS_{m-1} = 0.$$

Remplaçons V par son expression $\theta / r^{(m-1)/2}$ et remarquons que sur S_{m-1}

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}.$$

L'équation précédente s'écrira donc

$$\int_{S_{m-1}} \theta \left(\frac{1}{r^{(m-1)/2}} \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{m-1}{2} \frac{1}{r^{(m+1)/2}} \right) dS_{m-1} = 0.$$

Mais, r est constant le long de S_{m-1}, par suite

$$\int_{S_{m-1}} \theta \left(r \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W \right) dS_{m-1} = 0. \tag{8}$$

Remarquons que la fonction

$$r \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W = W_1$$

est une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta = 0$. On pourra donc choisir arbitrairement les valeurs de W_1 sur S_{m-1}, pourvu qu'elles forment une fonction continue [5], et construire après, par des formules bien connues, la fonction W_1 en sorte qu'elle soit régulière dans l'espace renfermé dans S_{m-1}. On aura alors que W sera donnée par la formule

$$W = \frac{1}{r^{(m-1)/2}} \int_0^r r^{(m-3)/2} W_1 \, dr$$

et par suite elle résultera régulière dans le même espace. On tire de là que la relation (8) est absurde si $m > 3$, puisque elle devrait être satisfaite pour tout système de valeurs de $r \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W$. Par conséquent la supposition que V soit regulière dans tout point de Σ_m, excepté le point $r = 0$, est elle-même absurde.

Il nous reste à examiner le cas $m = 2$. L'équation (7) devient alors

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_1^2} = -\frac{1}{4} \theta$$

d'où

$$\theta = A \sin \frac{1}{2} \alpha_1 + B \cos \frac{1}{2} \alpha_1,$$

A, B étant des constantes arbitraires, et par suite

$$V = \frac{A \sin \frac{1}{2} \alpha_1 + B \cos \frac{1}{2} \alpha_1}{\sqrt{r}} f(r \pm at). \tag{9}$$

(5) Cette condition ne serait pas même nécessaire.

Cette intégrale est évidemment polydrome et le point $r = 0$ est le point de diramation.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

3. On peut calculer de là que si l'on applique la méthode de KIRCHHOFF aux intégrales (3) on ne pourra pas trouver des résultats semblables à ceux qu'il a obtenu. Considérons par exemple le cas des ondes cylindriques. Si nous prenons garde à la polydromie de la fonction (9), lorsque nous emploierons la méthode de KIRCHHOFF, il faudra faire des coupures dans la partie du plan xy où l'on étend l'intégration, en sorte que les formules seront affectées des termes relatifs aux coupures, qui ne paraissent pas dans celles de KIRCHHOFF et par suite on ne pourra pas exprimer la valeur d'une intégrale régulière V de l'équation (2), dans un point intérieur au champ, par celles de V et de ses dérivées au contour.

Au contraire on parvient à ce résultat par les formules (4), (6), (8) de l'article précédent. Elles jouent dans le cas des ondes cylindriques un rôle tout à fait semblable à celui joué par la formule de KIRCHHOFF. Elles ont aussi la même interprétation physique que celle-ci. Considérons en effet les fonctions

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
V_1(r, t) &= \int_0^\infty f\left(t - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\,,\\
V_2(r, t) &= \int_0^\infty f\left(t + \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\,,\\
V_3(r, t) &= \int_{-r}^{r} f\left(t + \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

où f est une fonction arbitraire.

Dans la première formule nous supposerons que f s'évanouit pour toute valeur de l'argument inférieure à une certaine limite, et dans la deuxième au contraire on supposera que f s'évanouit pour les valeurs de l'argument supérieures à une certaine limite.

Les trois fonctions (10) satisfont à l'équation (2) et n'ont de singularités qu'au point $r = 0$ où elles deviennent infinies du même ordre que $\log r$.

De la même maniere qu'on fait correspondre l'intégrale (1) aux ondes sphériques on peut référer les fonctions (10) aux ondes cylindriques progressives ou régressives, relatives à une ligne lumineuse.

En comparant donc les formules (4), (6), (8) de l'article précédent avec celle de KIRCHHOFF, on voit tout de suite qu'elles représentent sous une forme mathématique le principe de HUYGHENS dans le cas des ondes cylindriques.

On pourrait montrer que les mêmes formules peuvent s'obtenir directement des intégrales (10), mais nous ne développerons pas ici ces calculs (6).

4. Enfin posons

$$w(x, y, t) = e^{it} \psi(x, y).$$

L'équation (2) deviendra

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a^2 \psi = 0$$

et les formules (7) et (8) de l'article 10 se réduiront aux suivantes

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{Y}_0(ar) - \psi \frac{\partial \mathrm{Y}_0(ar)}{\partial n} \right) ds, \\ 0 &= \int_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{I}_0(ar) - \psi \frac{\partial \mathrm{I}_0(ar)}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \right.$$

où Y_0 et I_0 dénotent les fonctions de BESSEL de deuxième et de première espèce. Les deux formules (11) ont été données par M. WEBER (7) et dépendent des équations (7), (8) de l'article 10 de la même façon que la formule bien connue découverte par M. HELMHOLTZ (8) est liée avec celle de KIRCHHOFF dont nous avons parlé dans cet article.

Art. 12. – Remarque relative à une question de calcul des variations.

1. Supposons qu'on propose la question suivante: *Déterminer la fonction* U (x, y, t) *de telle façon que la première variation de l'intégrale triple*

$$\mathrm{V} = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{F}\left(\mathrm{U}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}, x, y, t \right) dx\, dy\, dt$$

soit nulle, S *étant une partie de l'espace à trois dimensions* x, y, t.

Par les règles bien connues du calcul des variations on aura

$$0 = \delta \mathrm{V} = \int_{\mathrm{S}} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{U}} \delta \mathrm{U} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{U}_1} \delta \mathrm{U}_1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{U}_2} \delta \mathrm{U}_2 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{U}_3} \delta \mathrm{U}_3 \right) dx\, dy\, dt$$

où l'on a posé

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \quad \mathrm{U}_2 = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \quad \mathrm{U}_3 = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}.$$

(6) Voir ma Note: *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. I, 2º Sem. 1892, p. 161. [In queste *Opere*: volume primo, XXXIV, p. 559].

(7) *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. « Math. Annalen », vol. I, 1869, p. 1.

(8) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden*. « Wiss. Abhandlungen », vol. I.

En supposant U_1, U_2, U_3 continues on aura par des intégrations par parties

$$0 = \delta V = \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\, dS$$

$$-\int_\sigma \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)d\sigma,$$

n étant la normale au contour σ dirigée vers l'intérieur de S.

On obtiendra donc l'équation du 2ème ordre

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3} = 0.$$

2. Prenons garde que pour établir l'équation précédente on a supposé la continuité des dérivées U_1, U_2, U_3. On peut maintenant se proposer les questions: U *étant toujours continue, quelles seront les surfaces où les dérivées* U_1, U_2, U_3 *pourront être discontinues en sorte que la variation de* V *soit toujours nulle? A quelles conditions devront satisfaire les valeurs des dérivées des deux côtés des surfaces de discontinuité?*

Supposons qu'il y ait une seule surface de discontinuité Λ qui partage l'espace S en deux parties S_1, S_2 et le contour en σ_1 et σ_2. Soit ν la normale à la surface Λ dirigée vers l'intérieur de S_1. On aura

$$0 = \delta V = \int_{S_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_1$$

$$+\int_{S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_2.$$

Mais par des intégrations par parties on trouve

$$\int_{S_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_1$$

$$= \int_{S_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\, dS_1$$

$$-\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U\, d\sigma$$

$$-\int_{\Lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos \nu x + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos \nu y + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos \nu t\right)\delta U\, d\Lambda,$$

$$\int_{S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_2$$

$$= \int_{S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\, dS_2 -$$

$$- \int_{\sigma_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U_1} \cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2} \cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3} \cos nt \right) \delta U \, d\sigma$$

$$+ \int_{\Lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial U_1} \cos \nu x + \frac{\partial F}{\partial U_2} \cos \nu y + \frac{\partial F}{\partial U_3} \cos \nu t \right) \delta U \, d\Lambda .$$

Désignons par

$$U'_1 , U'_2 , U'_3 , \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' , \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' , \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'$$

les valeurs limites de $U_1 , U_2 , U_3 , \partial F/\partial U_1 , \partial F/\partial U_2 , \partial F/\partial U_3$, lorsqu'on s'approche indéfiniment d'un point de la surface Λ du côté de l'espace S_1, et désignons par les mêmes symboles avec deux suffixes les valeurs limites qu'on trouve lorsqu'on s'approche indéfiniment du même point du côté de S_2. Ajoutant membre à membre les deux équations précédentes, on aura alors

$$o = \int_{S_1+S_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial U_3} \right) \delta U \, dS$$

$$- \int_{\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial U_1} \cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2} \cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3} \cos nt \right) \delta U \, d\sigma$$

$$- \int_{\Lambda} \left\{ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)'' \right] \cos \nu x + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)'' \right] \cos \nu y \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'' \right] \cos \nu t \right\} \delta U \, d\Lambda .$$

Donc en tout point de S, excepté ceux qui appartiennent à Λ, il sera

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial U_3} = o \tag{1}$$

et sur Λ on aura

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)'' \right] \cos \nu x + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)'' \right] \cos \nu y$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'' \right] \cos \nu t = o . \tag{2}$$

Prenons sur Λ un système de coordonnées curvilignes λ , μ. Puisque U est continue on aura

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)' = \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)'' \quad , \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)' = \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)''$$

où les suffixes dénotent de quel côté de la surface Λ on prend les valeurs des dérivées. Les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$(U'_1 - U''_1) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + (U'_2 - U''_2) \frac{\partial y}{\partial \lambda} + (U'_3 - U''_3) \frac{\partial t}{\partial \lambda} = o ,$$

$$(U'_1 - U''_1) \frac{\partial x}{\partial \mu} + (U'_2 - U''_2) \frac{\partial y}{\partial \mu} + (U'_3 - U''_3) \frac{\partial t}{\partial \mu} = o ,$$

d'où

$$(3) \qquad U'_1 - U''_1 : U'_2 - U''_2 : U'_3 - U''_3 = \frac{d(y,t)}{d(\lambda,\mu)} : \frac{d(t,x)}{d(\lambda,\mu)} : \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)}$$

$$= \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu t.$$

L'équation (2) deviendra donc

$$(4) \qquad 0 = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right](U'_1 - U''_1) + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right](U'_2 - U''_2)$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right](U'_3 - U''_3).$$

L'équation (4) *nous donne une condition relative à la discontinuité, tandis que les équations* (3) *donnent les conditions auxquelles doit satisfaire la surface* Λ.

Il est évident que si, au lieu d'une seule surface, on avait plusieurs surfaces de discontinuité, sur chacune on aurait vérifiées les conditions (3), (4).

3. Appliquons les résultats qu'on vient de trouver au cas où

$$F = a^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + 2wZ\right].$$

L'équation (1), dans ce cas, se réduira à l'autre

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

c'est à dire à l'équation (A) du premier article.

Les conditions (3), (4) deviendront

$$(5) \qquad U'_1 - U''_1 : U'_2 - U''_2 : U'_3 - U''_3 = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu t,$$

$$(6) \qquad a^2\{(U'_1 - U''_1)^2 + (U'_2 - U''_2)^2\} - (U'_3 - U''_3)^2 = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{a^2} = \frac{(U'_1 - U''_1)^2 + (U'_2 - U''_2)^2}{(U'_3 - U''_3)^2} = \frac{\cos^2 \nu x + \cos^2 \nu y}{\cos^2 \nu t} = \mathrm{tg}^2\, \nu t,$$

d'où

$$\mathrm{tg}\, \nu t = \pm \frac{1}{a}.$$

Donc, dans ce cas, les surfaces de discontinuité seront les enveloppes des cônes $\Lambda_A^{(a)}$ et la condition relative à la discontinuité sera donnée par l'équation (6).

Il est aisé de voir quelle relation a lieu entre ce résultat et la théorie du choc dans un milieu élastique.

TABLE DES ARTICLES