IX.

UN TEOREMA SULLA ROTAZIONE DEI CORPI E SUA APPLICAZIONE AL MOTO DI UN SISTEMA NEL QUALE SUSSISTONO MOTI INTERNI STAZIONARI

« Atti Acc. Sc. di Torino », vol. XXX, 1895, pp. 524–541.

1. Rappresentiamo colla seguente tabella i coseni di direzione che una terna di assi mobili ξ, η, ζ formano con una terna congruente di assi fissi x, y, z

	ξ	η	ζ
x	α_1 ,	α_2 ,	α_3
y	β_1 ,	β_2 ,	β_3
z	γ_1 ,	γ_2 ,	γ_3

Le equazioni di POISSON esprimono le derivate di questi coseni rispetto al tempo in funzione dei coseni medesimi e delle componenti p, q, r della rotazione secondo gli assi ξ, η, ζ, e sono le seguenti

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_2 r - \alpha_3 q \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \alpha_3 p - \alpha_1 r \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \alpha_1 q - \alpha_2 p \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_2 r - \beta_3 q \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= \beta_3 p - \beta_1 r \\ \frac{d\beta_3}{dt} &= \beta_1 q - \beta_2 p \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{aligned}\right.$$

Introduciamo, come fece il BRILL nel suo importante studio sul problema di EULERO (1), le quantità

$$A_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad , \quad A_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad , \quad A_3 = \alpha_3 + i\beta_3 ;$$

avremo (2), per le note relazioni fra i coseni di due terne di assi congruenti,

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3 = 0$$

$$iA_1 - A_2\gamma_3 + A_3\gamma_2 = 0 .$$

(1) « Annali di Matematica », Ser. II, vol. III.

(2) Cfr. HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 27.

d'onde

$$(1)\qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{-\gamma_1\gamma_2 + i\gamma_3}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} A_1 \\[2ex] A_3 = \dfrac{-\gamma_1\gamma_3 - i\gamma_2}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} A_1 \end{cases}$$

da cui segue che A_2 e A_3 possono esprimersi *razionalmente* mediante $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$.

Pongasi ora

$$B_1 = \alpha_1 - i\beta_1 \quad , \quad B_2 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad , \quad B_3 = \alpha_3 - i\beta_3 ;$$

avremo

$$B_1 = \frac{1-\gamma_1^2}{A_1} \quad , \quad B_2 = \frac{1-\gamma_2^2}{A_2} \quad , \quad B_3 = \frac{1-\gamma_3^2}{A_3}$$

per conseguenza anche B_1, B_2, B_3 si esprimeranno *razionalmente* per mezzo di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$ e quindi i sei coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ saranno *funzioni razionali* delle stesse quantità.

Finalmente osservando che

$$\gamma_2 - i\gamma_3 = \frac{1-\gamma_1^2}{\gamma_2 + i\gamma_3}$$

si riconosce che tutti i nove coseni sono esprimibili razionalmente mediante

$$(2)\qquad 1+\gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 + i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1 + i\beta_1 .$$

Il vantaggio che si ha sostituendo agli angoli di EULERO le quantità (2), per esprimere i nove coseni mediante *tre* soli elementi indipendenti, consiste in ciò: che i coseni stessi si ottengono *razionalmente* in funzione delle (2), mentre sono funzioni trascendenti degli angoli di EULERO [(3)].

Dalle equazioni di POISSON segue

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2 r - A_3 q$$

onde applicando le (1) otterremo

$$(3)\qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{-\gamma_1(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + i(\gamma_3 r + \gamma_2 q)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} .$$

Ciò dimostra che quando siano noti p, q, r ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, basta una sola quadratura per determinare i rimanenti coseni.

2. Premesse per chiarezza queste considerazioni elementari notissime, dimostriamo il teorema seguente:

Se p, q, r ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *sono funzioni uniformi del tempo, e non hanno altre singolarità che dei poli, e in questi punti gli ordini d'infinito delle* p, q, r

(3) Cfr. G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. II, p. 11.

non superano quello di una almeno delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, *anche i rimanenti coseni saranno funzioni uniformi del tempo aventi delle singolarità polari soltanto.*

Se $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ non hanno altre singolarità che dei poli, potremo scrivere

$$p = \frac{P}{D} \quad , \quad q = \frac{Q}{D} \quad , \quad r = \frac{R}{D},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

ove $P, Q, R; \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D sono funzioni intere di t, che supporremo ridotte a non avere più zeri comuni.

In tale ipotesi neppure $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, D potranno avere zeri comuni, altrimenti una almeno delle p, q, r diverrebbe in un punto infinita di ordine superiore a tutte le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il che è contrario all'ipotesi.

Ciò premesso trasformiamo la equazione (3).

Avremo

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{(1-\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) - (\gamma_2 - i\gamma_3)(r - iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

$$= \frac{-(1+\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + (\gamma_2 + i\gamma_3)(r + iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

e tenendo presente che

$$\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = (1-\gamma_1)(1+\gamma_1) = (\gamma_2 - i\gamma_3)(\gamma_2 + i\gamma_3)$$

si otterrà

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1+\gamma_1} - \frac{r - iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = -\frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1-\gamma_1} + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}.$$

Teniamo conto che

$$\gamma_2 r - \gamma_3 q = \frac{d\gamma_1}{dt};$$

la equazione precedente diverrà

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log(1+\gamma_1) - \frac{r-iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = \frac{d}{dt}\log(1-\gamma_1) + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}$$

quindi

$$(4) \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right) - \frac{R - iQ}{\Gamma_2 + i\Gamma_3} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right) + \frac{R+iQ}{\Gamma_2 - i\Gamma_3}.$$

I poli di $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ potranno trovarsi solo ove si annullano

$$D + \Gamma_1, D - \Gamma_1, D, \Gamma_2 + i\Gamma_3, \Gamma_2 - i\Gamma_3.$$

Sia t_0 uno qualunque di questi punti. Se in esso non si annullano contemporaneamente Γ_2 e Γ_3, una almeno delle espressioni $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ o $\Gamma_2 - i\Gamma_3$ sarà diversa da zero; quindi l'infinito di $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ dipenderà soltanto dal *primo termine* di una delle due espressioni in cui venne posta questa quantità nell'ultima formula. Siccome questi termini sono derivate logaritmiche di funzioni aventi sole singolarità polari, così segue che $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ diverrà nel punto t_0 *infinita del primo ordine con un residuo intero*.

Supponiamo ora che nel punto t_0 si annullino contemporaneamente Γ_2 e Γ_3: ivi si annulleranno $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ e $\Gamma_2 - i\Gamma_3$; e poiché

$$(D + \Gamma_1)(D - \Gamma_1) = (\Gamma_2 + i\Gamma_3)(\Gamma_2 - i\Gamma_3),$$

così uno dei fattori $D + \Gamma_1$ o $D - \Gamma_1$ si annullerà; e se ne dovrà annullare uno solo, giacché, se ambedue si annullassero, sarebbero zero contemporaneamente $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ il che è da escludersi. Si ha dunque che Γ_1 e D debbono avere nel punto t_0 nulla *o* la somma *o* la differenza soltanto, quindi in t_0 esse *non* si annullano e

$$\lim_{t=t_0} \frac{\Gamma_1}{D} = \pm 1 . \tag{6}$$

Consideriamo

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{D}\right) = \frac{1}{D^2}\left(D\,\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} - (\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\frac{dD}{dt}\right).$$

Dalle equazioni di POISSON segue

$$\frac{d(\gamma_2 \pm i\gamma_3)}{dt} = \mp ip(\gamma_2 \pm i\gamma_3) - \gamma_1(r \mp iq)$$

$$= \frac{1}{D^2}\{\mp iP(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3) - \Gamma_1(R \mp iQ)\},$$

quindi

$$\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} = \frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \pm iQ) \tag{7}$$

e per conseguenza

$$\frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)} = \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)} . \tag{8}$$

Supponiamo che $\Gamma_2 \pm i\Gamma_3$ abbia in t_0 uno zero di ordine n; ivi $d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)/dt$ avrà uno zero di ordine $n - 1$ e per conseguenza dalla (7) risulterà che $R \mp iQ$ avrà in t_0 uno zero di ordine $n - 1$, e quindi

$$\frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}$$

diverrà infinito del primo ordine.

Ricordiamo ora le due forme sotto cui si è posto $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ (vedi (4)). Il primo termine dell'una o dell'altra espressione sarà certamente finito per $t = t_0$, quindi $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ avrà in t_0 un polo del primo ordine.

Calcoliamo il residuo: a tal fine basterà determinare il residuo del rapporto

$$\frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}$$

il quale, come è noto, sarà dato da

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}.$$

Serviamoci perciò della formula (8): avremo

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}$$

$$= n \lim_{t=t_0} \frac{-\frac{D}{\Gamma_1}}{1 - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{R \mp iQ}\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right)} = n \lim_{t=t_0}\left(-\frac{D}{\Gamma_1}\right).$$

Tenendo quindi presente la (6) si può concludere che il residuo è un numero intero.

Siamo dunque giunti al risultato che

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log A_1$$

ha soltanto delle *singolarità polari del primo ordine con residui interi*. Ne segue che A_1 è una funzione uniforme con singolarità polari soltanto.

Ma tutti i nove coseni possono esprimersi razionalmente mediante $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$, dunque essi saranno funzioni uniformi del tempo aventi per singolarità soltanto dei poli, come si doveva dimostrare.

8. Il Teorema ora dimostrato equivale al seguente:

Se si possono porre p, q, r; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sotto la forma

$$(9) \qquad p = \frac{P}{D}, q = \frac{Q}{D}, r = \frac{R}{D} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}, \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}, \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

con P, Q, R; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D *funzioni uniformi ed intere del tempo, e se* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ *non hanno alcuno zero comune, anche i rimanenti sei coseni saranno funzioni uniformi del tempo con sole singolarità polari.*

Infatti, come abbiamo veduto nel paragrafo precedente, se nei punti di singolarità gli ordini d'infinito di p, q, r non superano quello di una almeno delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, si potranno scrivere le (9) ammettendo che $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ non abbiano alcuno zero a comune. Reciprocamente, se questa condizione sarà soddisfatta, D dovrà annullarsi in ogni punto di singolarità; e se n sarà l'ordine di zero della D in uno di questi punti, esisterà almeno una delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ il cui ordine d'infinito sarà n, mentre nello stesso punto nessuna fra le p, q, r potrà divenire infinita di ordine superiore ad n.

4. Passiamo ad applicare il teorema precedente, sotto l'ultima forma in cui fu enunciato, al caso del *moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii* (4).

(4) Vedi le mie Note: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii*; *Sopra un sistema di equazioni differenziali*. « Atti R. Acc. di Torino », 1895. [In questo vol.: VI, VII, VIII, pp. 108–128].

In una precedente Nota furono ottenute le espressioni delle componenti p, q, r della rotazione (5).

Si ponga per semplicità

$$
(10)\quad
\begin{cases}
M_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}}\sqrt{(\lambda_1-A)(\lambda_1-B)(\lambda_1-C)} \\[2ex]
M_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_1-\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}}\sqrt{(\lambda_2-A)(\lambda_2-B)(\lambda_2-C)} \\[2ex]
M_3 = \sqrt{\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}}\sqrt{(\lambda_3-A)(\lambda_3-B)(\lambda_3-C)} \\[2ex]
M_4 = \sqrt{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\dfrac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+1)})(\lambda_4-\lambda_{(r)})}}\sqrt{\dfrac{(\lambda_4-A)(\lambda_4-B)(\lambda_4-C)}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}}
\end{cases}
$$

si avrà

$$
(11)\quad
\begin{cases}
p = m_1\dfrac{\dfrac{M_1}{\lambda_1-A}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-A}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-A}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-A}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma} \\[3ex]
q = m_2\dfrac{\dfrac{M_1}{\lambda_1-B}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-B}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-B}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-B}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma} \\[3ex]
r = m_3\dfrac{\dfrac{M_1}{\lambda_1-C}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-C}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-C}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-C}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma}\,.
\end{cases}
$$

Abbiamo ora, scegliendo per asse z l'asse fisso della coppia di quantità di moto,

$$
\gamma_1 = \frac{Ap+m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq+m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr+m_3}{K}
$$

quindi dalle formole precedenti seguirà

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\gamma_1 = \dfrac{m_1}{K}\dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1-A}\sigma_1+\dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2-A}\sigma_2+\dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3-A}\sigma_3+\dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4-A}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma} \\[3ex]
\gamma_2 = \dfrac{m_2}{K}\dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1-B}\sigma_1+\dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2-B}\sigma_2+\dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3-B}\sigma_3+\dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4-B}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma} \\[3ex]
\gamma_3 = \dfrac{m_3}{K}\dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1-C}\sigma_1+\dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2-C}\sigma_2+\dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3-C}\sigma_3+\dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4-C}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma}\,.
\end{cases}
$$

Si sono dunque ottenuti p, q, r; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sotto la forma (9) in cui

$$
(13)\quad
\begin{cases}
P = m_1\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1-A}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-A}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-A}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-A}\sigma\right) \\[3ex]
Q = m_2\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1-B}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-B}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-B}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-B}\sigma\right) \\[3ex]
R = m_3\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1-C}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-C}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-C}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-C}\sigma\right)
\end{cases}
$$

(5) Vedi la terza delle note citate, form. (20) e seguenti.

$$(14)\quad \begin{cases} \Gamma_1 = \dfrac{m_1}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right) \\ \Gamma_2 = \dfrac{m_2}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right) \\ \Gamma_3 = \dfrac{m_3}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right) \\ D = \qquad M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma . \end{cases}$$

Per dimostrare che i rimanenti sei coseni sono funzioni uniformi del tempo, aventi sole singolarità polari, basterà provare, in virtù del teorema del § 3, che D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 non possono annullarsi contemporaneamente. Posto

$$M_1\sigma_1 = y_1 \quad , \quad M_2\sigma_2 = y_2 \quad , \quad M_3\sigma_3 = y_3 \quad , \quad M_4\sigma = y_4$$

e tenendo presente che si sono supposte m_1, m_2, m_3 diverse da zero, le equazioni che si ottengono annullando D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 prendono la forma:

$$(15)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A}y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A}y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A}y_4 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B}y_4 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C}y_4 = 0 . \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di y_1, y_2, y_3, y_4 sarà dunque

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 \ , & 1 \ , & 1 \ , & 1 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} \end{vmatrix} .$$

Sviluppandolo ne otteniamo il valore dato da

$$\frac{ABC\,(B-A)\,(C-A)\,(C-B)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-A)(\lambda_2-A)(\lambda_3-A)(\lambda_4-A)(\lambda_1-B)(\lambda_2-B)(\lambda_3-B)(\lambda_4-B)(\lambda_1-C)(\lambda_2-C)(\lambda_3-C)(\lambda_4-C)} .$$

Il denominatore di questa espressione non è altro che il prodotto $\alpha\beta\gamma$, adottando le notazioni usate nel § 6 della seconda delle note citate, quindi esso è eguale a

$$\frac{ABC\,m_1^2\,m_2^2\,m_3^2\,(B-A)^2\,(C-A)^2\,(C-B)^2}{8\,h^3}$$

e perciò

$$\Delta = 8\,h^3\,\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{m_1^2\,m_2^2\,m_3^2\,(B-A)\,(C-B)\,(A-C)} .$$

Ne segue, poiché si sono ammesse le radici diverse fra loro, che Δ non si annulla. Le (15) dunque non potrebbero essere soddisfatte che prendendo $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, il che è impossibile, perché M_1, M_2, M_3, M_4 sono diverse da zero e le quattro funzioni σ non hanno zeri a comune.

Possiamo dunque concludere che *i coseni* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *sono al pari di* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *funzioni uniformi del tempo aventi solo delle singolarità polari.*

5. Per ottenere le effettive espressioni dei nove coseni basterà che determiniamo quelle di

$$1+\gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 + i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1 + i\beta_1 \, ,$$

giacché, come abbiamo veduto, i coseni stessi si otterranno razionalmente mediante queste tre quantità (vedi § 1).

Dalla espressione di D segue che

$$\frac{D}{\sigma} = M_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} + M_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} + M_3 \frac{\sigma_3}{\sigma} + M_4 = f(u);$$

$f(u)$ è dunque una funzione doppiamente periodica con i periodi 4ω, $4\omega'$ (6), onde posto $u = 2v$, avremo che $f(2v) = \varphi(v)$ sarà una funzione di v doppiamente periodica con i periodi 2ω e $2\omega'$. La $\varphi(v)$ diverrà infinita del primo ordine, entro il parallelogrammo dei periodi, nei punti O, ω, ω', ω''; quindi sarà una funzione ellittica del quarto grado e potrà porsi (7)

$$\varphi(v) = C_1 \frac{\sigma\left(v - \frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_4}{2}\right)}{\sigma v\, \sigma(v-\omega)\, \sigma(v-\omega')\, \sigma(v-\omega'')}$$

supponendo $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4\omega''$ e C_1 costante.

Per conseguenza avremo

$$D = C_1\, \sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right) G$$

essendo

$$G = \frac{\sigma u}{\sigma \frac{u}{2}\, \sigma\left(\frac{u}{2} - \omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega''\right)}.$$

In modo analogo si otterrà

$$D + \Gamma_1 = C_2\, \sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right) G$$

$$\Gamma_2 + i\Gamma_3 = C_3\, \sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right) G$$

in cui C_2 e C_3 sono costanti e

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 4\omega''.$$

(6) Vedi K. WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, p. 28.

(7) Ibid., p. 15.

Ne segue che $1+\gamma_1$ e $\gamma_2+i\gamma_3$ hanno le espressioni seguenti

$$(16)\quad \begin{cases} 1+\gamma_1 = L_1 \dfrac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)} \\[2ex] \gamma_2+i\gamma_3 = L_2 \dfrac{\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)} \end{cases}$$

in cui deve supporsi (8)

$$\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2} = \frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{2} = \frac{w_1+w_2+w_3+w_4}{2} \equiv 0$$

e L_1 e L_2 costanti.

Osserviamo ora che le funzioni

$$(17)\quad \begin{cases} D' = \sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right) \\[1ex] \quad = \sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right) \\[1ex] D'+\Gamma' = L_1\,\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right) \\[1ex] \quad = L_1\,\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_4}{2}\right) \\[1ex] \Gamma'_2+i\Gamma'_3 = L_2\,\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right) \\[1ex] \quad = L_1\,\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_4}{2}\right) \end{cases}$$

sono funzioni intere e quindi potranno sostituirsi in tutte le formule dei paragrafi precedenti alle D, $D+\Gamma_1$, $\Gamma_2+i\Gamma_3$; in particolare potremo sostituire alla (4) l'altra

$$(4')\quad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right) - \frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} = \psi(t)$$

in cui si è posto

$$R-iQ = (R'-iQ')\,\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\,\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega''\right)}.$$

Abbiamo $t = n(u-u_0) = 2n(v-u_0/2)$ (form. (27) della 2ª Nota citata) con n ed u_0 costanti, quindi

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} = \frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right) - \frac{1}{2n}\frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} = \psi_1(v)$$

(8) Scriveremo $a \equiv b$ quando i due numeri a e b differiranno per multipli interi dei periodi 2ω e $2\omega'$.

ed è evidente che $\psi_1(v)$ considerata come funzione di v avrà nei punti corrispondenti gli stessi residui di $\psi(t)$ considerata come funzione di t.

Ciò premesso supponiamo dapprima che nessuna delle u_i sia congruente ad una delle v_i; allora anche nessuna delle w_i sarà congruente ad una delle u_i, perché ove si annulla $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ ivi deve annullarsi o $D' + \Gamma'$ o $D' - \Gamma'$ e se si annullasse contemporaneamente anche D', risulterebbe che D' e $D' + \Gamma'$ si annullerebbero insieme, il che è contro la ipotesi fatta. Si ha dunque che nei punti w_i non si annullano né D' né Γ', quindi potrà concludersi che:

1° nei punti $v \equiv v_i/2$, la funzione

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right)$$

diviene infinita del primo ordine col residuo eguale a $+1$;

2° nei punti $v \equiv u_i/2$ la funzione

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right)$$

diviene infinita del primo ordine col residuo eguale a -1;

3° nei punti $v \equiv w_i/2$ la funzione

$$-\frac{1}{2n}\frac{R' - iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} \tag{18}$$

diviene infinita col residuo eguale a ± 1.

Prendiamo i punti $w_1/2$, $w_2/2$, $w_3/2$, $w_4/2$ entro il parallelogrammo dei periodi; per un noto teorema la somma dei residui della funzione (18) entro il parallelogrammo dei periodi dovrà essere nulla; quindi in due fra i quattro punti $w_i/2$ il residuo dovrà essere eguale ad 1, negli altri due sarà eguale a -1. Ricordando ora (vedi § 2) che la funzione (18) ha il residuo eguale a $+1$ ove si annulla $D' - \Gamma'$, ed il residuo eguale a -1 ove si annulla $D' + \Gamma'$, dovremo avere che in due punti, per es.: $w_3/2$, $w_4/2$, dovrà annullarsi $D' + \Gamma'$ e nei due rimanenti, $w_1/2$ e $w_2/2$, dovrà annullarsi $D' - \Gamma'$. Potremo dunque scegliere v_3 e v_4 in modo che sia $v_3 = w_3$, $v_4 = w_4$ ed allora avremo:

1° nei punti

$$v \equiv \frac{v_1}{2},\ v \equiv \frac{v_2}{2},\ v \equiv \frac{w_1}{2},\ v \equiv \frac{w_2}{2}$$

la funzione

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} \tag{19}$$

diverrà infinita del primo ordine col residuo $+1$;

2° nei punti $v \equiv u_i/2$ la funzione stessa diverrà infinita del primo ordine col residuo -1;

3° la funzione (19) non avrà altri punti singolari che i precedenti. Per conseguenza (9) potremo scrivere

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv}=\zeta\left(v-\frac{v_1}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{v_2}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{w_1}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{w_2}{2}\right)$$
$$-\zeta\left(v-\frac{u_1}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_2}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_3}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_4}{2}\right)+2m$$

denotando con m una quantità costante.

Integrando otterremo, essendo L_3 costante,

$$A_1=L_3\frac{\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)}{\sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right)}e^{2mv}$$

$$=L_3\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}e^{mu}.$$

Riprendendo le formule (16) e tenendo conto che $w_3=v_3$, $w_4=v_4$, avremo dunque

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
1+\gamma_1&=L_1\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\\
\gamma_2+i\gamma_3&=L_2\frac{\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\\
\alpha_1+i\beta_1&=L_3\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}e^{mu}
\end{aligned}\right.$$

nelle quali deve supporsi

$$(21)\qquad w_1+w_2=v_1+v_2\,,\quad\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2}=\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{2}\equiv 0.$$

Le (20) ci dànno la espressione generale delle tre quantità da cui dipendono razionalmente i nove coseni. Un esame facile ci prova che la forma stessa non si altera supponendo congruenti fra loro alcuni dei punti u_i e v_i.

Restano soltanto da determinare le relazioni fra le costanti u_i, v_i, w_i; L_1, L_2, L_3, m e le costanti meccaniche del problema.

6. Se si tiene presente l'analisi mediante la quale JACOBI, e quelli che hanno trattato i problemi della rotazione dei corpi, sono giunti alla loro risoluzione, si riconosce che essa consta di due parti, la prima delle quali è rivolta alla determinazione delle componenti della rotazione e di tre coseni,

(9) Vedi WEIERSTRASS, *Op. cit.*, p. 20.

l'altra a quella dei rimanenti coseni. La seconda è di gran lunga più difficile e complicata della prima ed alla sua semplificazione furono rivolti quasi tutti gli sforzi dei continuatori dell'opera di JACOBI.

Il teorema del § 2 ci ha fatto superare nel nostro caso questa parte più delicata della questione, almeno per ciò che riguarda la forma che debbono assumere i coseni, senza esigere quasi nessun calcolo. La via diretta ci avrebbe reso necessario il calcolo e l'esame della espressione (3) che sarebbe risultata eguale al rapporto di due polinomii razionali e interi di terzo grado nelle σ; mentre è bastato l'assicurarsi della impossibilità che si annullino contemporaneamente i numeratori ed il denominatore delle espressioni di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ per poter riconoscere che i rimanenti coseni sono funzioni uniformi del tempo con sole singolarità polari, e quindi poter giungere alla forma che debbono avere i coseni stessi.

Lo stesso teorema applicato al problema di EULERO ed a quello di LAGRANGE avrebbe condotto con eguale facilità alla medesima conclusione.

In uno di quei mirabili scritti di JACOBI sulla rotazione dei corpi, che alla sua morte sono restati allo stato di frammenti inediti, e che vennero pubblicati nel secondo volume delle sue opere [10], si trova posta in chiara luce l'intima ragione del successo del suo procedimento d'integrazione nel caso del problema di EULERO. Essa consiste in ciò: che l'angolo ψ di EULERO che la intersezione dei piani $\xi\eta$ e xy forma con l'asse x si esprime mediante una somma di integrali ellittici di terza specie *a cui è legato il divisore* $2i$; onde presentandosi la stessa circostanza favorevole nel problema di LAGRANGE, JACOBI poté stabilire *a priori* che il suo procedimento era suscettibile di estendersi anche a questo caso.

Esaminiamo ora quale relazione passa fra l'esistenza del divisore $2i$ di JACOBI ed il teorema del § 2.

L'espressione della derivata dell'angolo ψ di EULERO è

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1-\gamma_3^2} = \frac{(p+iq)(\gamma_1 - i\gamma_2) + i(\gamma_2 p - \gamma_1 q)}{1-\gamma_3^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{1-\gamma_3}{1+\gamma_3} - 2\frac{q-ip}{\gamma_1 + i\gamma_2}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{D-\Gamma_3}{D+\Gamma_3} - 2\frac{Q-iP}{\Gamma_1 + i\Gamma_2}\right].$$

Nella ipotesi che $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ non si annullino contemporaneamente, ripetendo un ragionamento analogo a quello fatto nel § 2, si può concludere che $d\psi/dt$ è una funzione uniforme le cui singolarità sono dei poli del primo ordine aventi i residui eguali a $n/2i$ con n intero. L'esistenza del divisore di JACOBI dipende quindi dal teorema del § 2; ossia è il non annullarsi contemporaneamente di $D, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, che ne porta per conseguenza l'esistenza.

Noi abbiamo così il vero significato e la portata del teorema del § 2. Esso ci fa fare un passo nel senso che sostituisce al calcolo di $d\psi/dt$ ed alla ricerca del divisore di JACOBI in questa espressione, l'esame diretto di $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

(10) JACOBI'S *Werke*, vol. II, p. 477.