X.

SUI MOTI PERIODICI DEL POLO TERRESTRE

« Atti Acc. Sc. di Torino », Vol. XXX, 1895, pp. 547-561.

1. In una Nota comunicata nella seduta del 3 febbraio scorso, ho esposto per sommi capi i fondamenti di una teoria sull'azione che i moti interni, i quali non alterano la distribuzione di masse sulla terra, hanno sul moto del polo di rotazione terrestre. La stessa teoria venne più ampiamente sviluppata in una Memoria da me presentata alcun tempo prima alle « Astronomische Nachrichten », la quale spero vedrà presto la luce (*). Nell'ultima parte di questa Memoria, come ho accennato nella Nota suddetta, ho integrato le equazioni differenziali del movimento del polo di rotazione nella ipotesi che due degli assi principali d'inerzia del sistema mobile fossero eguali ed i moti interni non fossero stazionarii; ed applicando lo stesso metodo, cioè quello delle approssimazioni successive, ho mostrato come potesse risolversi il problema inverso, di *determinare i moti interni capaci di indurre un dato moto del polo di rotazione.*

Volendo fare un'applicazione della teoria ai moti effettivi terrestri, la questione analitica può venire molto semplicizzata, giacché eliminando alcuni termini di un certo ordine di grandezza trascurabili, sotto certe ipotesi, rispetto ad altri, le equazioni differenziali assumono una forma molto più semplice, e la loro integrazione può effettuarsi senza difficoltà. È ciò che ho fatto nella presente Nota, nella quale sono pure partito dal presupposto che i moti del polo di rotazione siano decomponibili in una serie di moti armonici. Introducendo due funzioni ausiliarie le quali sono sviluppabili in una serie di funzioni armoniche del tempo, ho potuto esprimere, mediante i coefficienti di esse, tanto gli elementi relativi al moto del polo di rotazione, quanto quelli relativi ai moti interni capaci di indurli, ed ho trovato le relazioni fra i loro periodi e le relative costanti, giungendo al teorema: *che i moti interni e quelli del polo hanno eguali periodi, due eccettuati, ciascuno dei quali è proprio ad uno dei due movimenti ed è tale che l'altro non può possederlo.*

Venendo all'applicazione al caso della terra, mi sono fondato sulle belle ricerche del sig. CHANDLER, il quale ha scoperto delle leggi empiriche relative al moto del polo terrestre che sono di somma importanza. Fra le altre cose, il sig. CHANDLER ha trovato nel moto del polo terrestre un periodo di circa 430 giorni, escludendo l'esistenza del periodo Euleriano. I calcoli che

(*) In questo vol.: V, pp. 87-107. [N. d. R.].

ho eseguito mostrano che, se i moti interni terrestri avessero una coppia di quantità di moto la cui componente secondo l'asse terrestre fosse 1/1053 della coppia di quantità di moto che avrebbe la terra ruotando come un corpo rigido attorno al proprio asse, il periodo Euleriano si cambierebbe in quello di CHANDLER.

Non discuto questo risultato; passo piuttosto ad esaminare l'ipotesi che la componente secondo l'asse terrestre della coppia di quantità di moto dei moti interni sia trascurabile rispetto alla coppia di quantità di moto della terra supposta interamente rigida. Se tale ipotesi fosse vera, il moto del polo potrebbe avere il periodo Euleriano senza peraltro che ciò risultasse in maniera necessaria. Nella ipotesi stessa esamino quali sarebbero i moti interni capaci di indurre nel polo il moto armonico avente il periodo annuale i cui elementi vennero determinati dal sig. CHANDLER. I risultati ottenuti sono riassunti in alcuni teoremi posti alla fine della presente Nota. Farò osservare fin da ora che l'*asse della coppia di quantità di moto di questi moti interni deve oscillare in modo che la proiezione sul piano dell'equatore del suo estremo* (*situandone l'origine al centro della terra*) *descrive una ellisse di cui ho assegnato l'ampiezza degli assi, e il cui asse maggiore è inclinato di 45° sul meridiano di Greenwich; ossia giace nel piano meridiano avente, questa longitudine, passante quindi nel mezzo dell'Oceano atlantico.*

Finalmente risolvo come esercizio sulle mie formule il problema seguente: Se esistesse un moto interno terrestre avente un periodo di 430 giorni (il periodo di CHANDLER) quali sarebbero i suoi elementi affinché inducesse sul polo il moto periodico dello stesso periodo? Il calcolo, come si vede subito, non presenta alcuna difficoltà ed è perfettamente simile a quello eseguito pel periodo annuale.

In questa Nota, sono partito dalla ipotesi dell'assenza di plasticità nella terra, e per conseguenza tutti i risultati precedentemente riassunti valgono secondo questa supposizione. Resta ora da vedere: *quali perturbazioni produce la plasticità di un corpo nei moti del suo polo di rotazione indotti dalla azione di moti interni sussistenti nel corpo medesimo?* Ho iniziato uno studio di questa questione, prendendo a guida le ipotesi e le ricerche che l'illustre prof. SCHIAPARELLI espose nella sua classica Memoria presentata all'Osservatorio di Pulkova nell'occasione della sua festa semisecolare [1].

Le perturbazioni possono esser tali da non escludere in certi casi la possibilità di un lento moto progressivo del polo.

Il periodo di CHANDLER si presenta, secondo i calcoli della presente Nota, in due maniere diverse. Non discuto per ora nessuna delle due; il periodo stesso si presenta pure in un altro modo esaminando le perturbazioni dovute alla plasticità.

(1) *De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques*, Saint-Pétersbourg, 1889. Una traduzione italiana di questa Memoria venne fatta dal dott. TEDONE ed inserita nel t. XXX, serie 3ª, del «Nuovo Cimento», Pisa, 1891. Vedi anche G. V. SCHIAPARELLI, *Variazione dell'asse di rotazione* (Club alpino, 1883).

Spero di ritornare prossimamente sulle presenti ricerche, di esaminarle nuovamente, e di discuterle.

2. Supponendo che l'ellissoide d'inerzia sia di rivoluzione, e ammettendo M_1, M_2, M_3, variabili, le equazioni del moto hanno la forma (2)

$$(a) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - A)qr + M_3 q - M_2 r + \dfrac{dM_1}{dt} = 0 \\ A\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1 r - M_3 p + \dfrac{dM_2}{dt} = 0 \\ C\dfrac{dr}{dt} + M_2 p - M_1 q + \dfrac{dM_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ammettiamo ora che p e q siano piccolissime, e le variazioni di r siano pure piccolissime in modo che possa porsi $r = \omega + \varepsilon$, con ω costante ed ε piccolo di ordine non superiore a p e q.

Allora dall'ultima equazione si ricava

$$M_3 = M_3^0 - \int_0^t (M_2 p - M_1 q)\, dt - C\varepsilon = M_3^0 + u$$

denotando con M_3^0 una quantità costante. Quindi le due prime equazioni divengono

$$\frac{dp}{dt} + \left[\frac{C - A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{M_3^0 + u}{A}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{dt} - M_2(\omega + \varepsilon)\right) = \alpha$$

$$\frac{dq}{dt} - \left[\frac{C - A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{M_3^0 + u}{A}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{dt} + M_1(\omega + \varepsilon)\right) = \beta.$$

Facciamo ora la ipotesi che possano trascurarsi i termini

$$(1) \qquad \frac{uq}{A}, \frac{up}{A}, \frac{M_2\varepsilon}{A}, \frac{M_1\varepsilon}{A}, \frac{C - A}{A}\varepsilon q, \frac{C - A}{A}\varepsilon p;$$

otterremo (vedi la Nota posta alla fine della Memoria)

$$(a') \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} + \left[\dfrac{C - A}{A}\omega + \dfrac{M_3^0}{A}\right] q = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dM_1}{dt} - M_2\omega\right) = \alpha \\ \dfrac{dq}{dt} - \left[\dfrac{C - A}{A}\omega + \dfrac{M_3^0}{A}\right] p = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dM_2}{dt} + M_1\omega\right) = \beta. \end{cases}$$

Poniamo

$$\frac{C - A}{A}\omega + \frac{M_3^0}{A} = \rho,$$

moltiplichiamo la seconda equazione per $i = \sqrt{-1}$ e aggiungiamola alla prima; avremo

$$\frac{d(p + iq)}{dt} - i\rho(p + iq) = -\frac{1}{A}\left[\frac{d(M_1 + iM_2)}{dt} + i\omega(M_1 + iM_2)\right] = \alpha + i\beta$$

(2) Per il significato delle diverse quantità mi riferisco alla mia Nota già citata, nelle « Astronomische Nachrichten ». [In questo vol.: V, pp. 87–107].

dalle quali si ricava

$$(2) \qquad p + iq = e^{i\varrho t}\left[\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\varrho t}\, dt + \mathrm{C}\right]$$

$$(2') \qquad \frac{1}{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 + i\mathrm{M}_2) = e^{-i\omega t}\left[-\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\omega t}\, dt + \mathrm{D}\right]$$

denotando con C e D due costanti arbitrarie complesse.

3. Supponiamo (*) ora che i moti del polo siano decomponibili in una serie di moti armonici. Avremo

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma\,(\alpha_n \cos \lambda_n t + \alpha'_n \operatorname{sen} \lambda_n t)$$

$$\beta = \beta_0 + \Sigma\,(\beta_n \cos \lambda_n t + \beta'_n \operatorname{sen} \lambda_n t)$$

in cui non si esclude che fra le λ_n, alcune (anche in numero infinito) siano multiple l'una dell'altra (3).

Avremo

$$\alpha + i\beta = \alpha_0 + i\beta_0 + \Sigma\left(\frac{\alpha_n + \beta'_n + i\,(\beta_n - \alpha'_n)}{2}\, e^{i\lambda_n t} + \frac{(\alpha_n - \beta'_n) + i\,(\alpha'_n + \beta_n)}{2}\, e^{-i\lambda_n t}\right)$$

ovvero

$$\alpha + i\beta = \mathrm{A}_0 + \Sigma\,(\mathrm{A}_n e^{i\lambda_n t} + \mathrm{A}'_n e^{-i\lambda_n t})$$

avendo posto

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_0 &= \alpha_0 + i\beta_0 \\ \mathrm{A}_n &= \frac{\alpha_n + \beta'_n + i\,(\beta_n - \alpha'_n)}{2} \\ \mathrm{A}'_n &= \frac{\alpha_n - \beta'_n + i\,(\alpha'_n + \beta_n)}{2}. \end{aligned}\right.$$

Per conseguenza

$$\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\varrho t}\, dt = \int \{\mathrm{A}_0\, e^{-i\varrho t} + \Sigma\,(\mathrm{A}_n\, e^{i(\lambda_n - \varrho)t} + \mathrm{A}'_n\, e^{-i(\lambda_n + \varrho)t})\}\, dt$$

$$= \frac{\mathrm{A}_0}{-i\rho}\, e^{-i\varrho t} + \Sigma\left(\frac{\mathrm{A}_n}{i\,(\lambda_n - \rho)}\, e^{i(\lambda_n - \varrho t)} + \frac{\mathrm{A}'_n}{-i\,(\lambda_n + \rho)}\, e^{-i(\lambda_n + \varrho)t}\right)$$

quindi per la (2)

$$p + iq = \frac{\mathrm{A}_0}{-i\rho} + \mathrm{C}e^{i\varrho t} + \Sigma\left(\frac{\mathrm{A}_n}{i\,(\lambda_n - \rho)}\, e^{i\lambda_n t} + \frac{\mathrm{A}'_n}{-i\,(\lambda_n + \rho)}\, e^{-i\lambda_n t}\right).$$

Sostituendo per $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}'_n$ i valori (3) e separando le parti reali dalle immaginarie, otterremo

(*) Per maggiori chiarimenti su quanto il VOLTERRA espone ai nn. 3 e 4 di questa Nota, cfr. la Nota seguente: *Osservazioni sulla mia Nota sui moti periodici del polo terrestre* in « Atti Acc. di Torino » vol. XXX, pp. 817–820. In questo vol.: XI, pp. 152–154 [N. d. R.].

(3) Ammetteremo implicitamente, senza dirlo volta per volta, che sulle serie che si incontreranno siano eseguibili tutte le operazioni del calcolo che dovremo effettuare.

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
p &= -\frac{\beta_0}{\rho} + (C_1 \cos \rho t - C_2 \operatorname{sen} \rho t) \\
&\quad + \Sigma \frac{(\beta_n \rho - \alpha_n' \lambda_n) \cos \lambda_n t + (\alpha_n \lambda_n + \beta_n' \rho) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \\
q &= \frac{\alpha_0}{\rho} + (C_1 \operatorname{sen} \rho t + C_2 \cos \rho t) \\
&\quad + \Sigma \frac{-(\beta_n' \lambda_n + \alpha_n \rho) \cos \lambda_n t + (\beta_n \lambda_n - \alpha_n' \rho) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}
\end{aligned}
\right.
$$

in cui si è posto $C = C_1 + iC_2$.

In modo perfettamente analogo si ottengono le formule (*) che dànno M_1 e M_2, e si avrà, ponendo $D = D_1 + iD_2$,

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{M_1}{A} &= -\frac{\beta_0}{\omega} + (D_1 \cos \omega t + D_2 \operatorname{sen} \omega t) \\
&\quad + \Sigma \frac{(\beta_n \omega + \alpha_n' \lambda_n) \cos \lambda_n t - (\alpha_n \lambda_n - \beta_n' \omega) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2} \\
\frac{M_2}{A} &= \frac{\alpha_0}{\omega} + (-D_1 \operatorname{sen} \omega t + D_2 \cos \omega t) \\
&\quad + \Sigma \frac{(\beta_n' \lambda_n - \alpha_n \rho) \cos \lambda_n t - (\beta_n \lambda_n + \alpha_n' \omega) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le formule precedenti perdono ogni significato quando sia $\lambda_n = \omega$, oppure $\lambda_n = \rho$; dovrà dunque di necessità essere

$$\lambda_n \gtrless \omega \quad , \quad \lambda_n \gtrless \rho ,$$

d'onde il teorema:

I periodi delle rotazioni e quelli dei moti interni sono gli stessi; salvo che i moti interni possono avere il periodo $2\pi/\omega$ *che non può possedere il moto del polo di rotazione, e il moto del polo di rotazione può possedere il periodo* $2\pi/\rho$ *che non può possedere il moto interno.*

4. Esaminiamo i valori dei due periodi $2\pi/\omega$ e $2\pi/\rho$ nel caso del moto terrestre.

Siccome ω rappresenta la velocità di rotazione della terra, così $2\pi/\omega$ rappresenta *un giorno siderale*, da cui segue: *I moti interni possono avere un periodo diurno, ma questa parte periodica dei moti interni non ha influenza sul moto del polo, il quale non può possedere il detto periodo.*

(*) Nelle (5) era incorso un errore di segno, corretto dal VOLTERRA nella citata Nota *Osservazioni sulla mia Nota ecc.* (in questo vol: XI, pp. 152–154), e che qui abbiamo rettificato. [N. d. R.].

Passiamo al periodo $2\pi/\rho$. Abbiamo [4]:

$$\rho = \frac{C-A}{A}\,\omega + \frac{M_3^\circ}{A} = \frac{\omega}{305} + \frac{M_3^\circ}{A}$$

d'onde, prendendo per unità il giorno siderale,

$$\frac{2\pi}{\rho} = \frac{305}{1+305\,\dfrac{M_3^\circ}{A\omega}} = \frac{305}{1+306\,\dfrac{M_3^\circ}{C\omega}}\,.$$

Dunque $2\pi/\rho$ è il periodo euleriano variato nel rapporto

$$\frac{1}{1+306\,\dfrac{M_3^\circ}{C\omega}}\,.$$

Se si volesse in tal modo ottenere il periodo di CHANDLER di 430 giorni, dovrebbe aversi

$$\frac{430}{305} = \frac{1}{1+306\,\dfrac{M_3^\circ}{C\omega}}$$

d'onde

$$\frac{M_3^\circ}{C\omega} = \frac{-1}{1053}\,;$$

dovrebbe dunque la componente secondo l'asse terrestre della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni essere $1/1053$ di quella che avrebbe la terra supposta rigida pel suo moto diurno. Senza stare a discutere questo risultato, vediamo invece ciò che si otterrà supponendo trascurabile il rapporto $M_3^\circ/C\omega$. Allora $2\pi/\rho$ sarà approssimativamente eguale al periodo euleriano. Dunque nella precedente ipotesi *i moti interni non potrebbero avere una parte periodica apprezzabile con un periodo eguale a quello euleriano*.

5. Confrontando le formule (4) e (5) si riconosce che *ad ogni moto armonico del polo col periodo* $2\pi/\lambda_n \gtrless \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\rho} \\ \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$ *corrisponde un moto interno periodico con eguale periodo e reciprocamente*; *inoltre le costanti* α_n, α'_n, β_n, β'_n *individuano l'un moto e l'altro indipendentemente dagli altri moti aventi periodo diverso*. Decomponiamo perciò l'asse OM dei moti interni in tanti segmenti, ciascuno dei quali sia variabile con un periodo diverso e chiamiamo $OM^{(\lambda_n)}$ il segmento variabile col periodo λ_n; in modo che le sue componenti secondo

(4) Assumiamo in tutto il corso della presente Nota $(C-A)/A = 1/305$, senza discutere, per ora, se la esistenza di moti interni possa avere alcuna sensibile influenza sul valore di questo rapporto calcolato dai fenomeni di precessione e nutazione.

le direzioni ξ e η si otterranno dalle parti periodiche col detto periodo che figurano nelle espressioni di M_1 e M_2 ricavate dalle (5). L'asse dei moti interni sarà risultante dei segmenti $OM^{(\lambda_1)}, OM^{(\lambda_2)} \cdots$ di un segmento che potrà avere il periodo diurno e di un segmento costante.

Proponiamoci la questione: *noto il moto armonico del polo col periodo* $\lambda_n = \lambda$ *determinare il moto dell'estremo* $M^{(\lambda)}$ *dell'asse dei moti interni avente eguale periodo.*

Evidentemente dalle formule precedenti potremo ricavare il moto della proiezione dell'estremo $M^{(\lambda)}$ sul piano dell'equatore.

Le (4) ci dicono che in ogni istante la posizione del polo di rotazione si otterrà da quella del polo d'inerzia (estremo dell'asse ζ) componendo uno spostamento costante con quelli dovuti ai moti armonici del polo stesso, attorno al polo d'inerzia. In ciascuno di questi moti *il polo di rotazione descriverà una ellisse piccolissima, col centro nell'estremo dell'asse d'inerzia* ζ, *in modo che il raggio vettore che dall'estremo di* ζ *va al polo seguirà la legge delle aree.* Prendiamo i piani $\xi\zeta$ e $\eta\zeta$ in modo che contengano gli assi dell'ellisse e contiamo i tempi dall'istante in cui il polo passa attraverso il piano $\xi\zeta$. Avremo

$$\frac{p^{(\lambda)}}{\omega} = a \cos \lambda t \, , \quad \frac{q^{(\lambda)}}{\omega} = b \operatorname{sen} \lambda t$$

in cui $p^{(\lambda)}$ e $q^{(\lambda)}$ sono i termini delle (4) di periodo λ, e

$$a = \operatorname{tg} \varphi \quad , \quad b = \operatorname{tg} \psi$$

denotando con φ e ψ i semiassi dell'ellisse misurati in secondi d'arco.

Quindi, chiamando $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ le costanti corrispondenti al moto di periodo λ, avremo

$$\frac{\beta\rho - \alpha'\lambda}{\lambda^2 - \rho^2} = a\omega \quad \alpha\lambda + \beta'\rho = 0$$

$$\beta'\lambda + \alpha\rho = 0 \quad \frac{\beta\lambda - \alpha'\rho}{\lambda^2 - \rho^2} = b\omega$$

d'onde

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta' = 0 \quad , \quad \beta = (b\lambda - a\rho)\,\omega \quad , \quad \alpha' = (b\rho - a\lambda)\,\omega$$

da cui segue che le parti periodiche col periodo $2\pi/\lambda$ in $M_1/A\omega$, $M_2/A\omega$ saranno

$$\frac{M_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \lambda t$$

$$\frac{M_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \lambda t \, .$$

I massimi valori assoluti di $M_1^{(\lambda)}/A\omega$ si avranno nei tempi $t = n\pi/\lambda$, con n intero, e saranno

$$\frac{\mu_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right|$$

mentre i massimi valori assoluti di $M_2^{(\lambda)}/A\omega$ si avranno nei tempi $t = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\lambda}$ e saranno

$$\frac{\mu_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{-(b\lambda - a\rho)\lambda - (b\rho - a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right|$$

da cui si ricava

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mu_1^{(\lambda)} &= \left| \frac{A}{C} \frac{(2b\lambda - 2a\rho)\omega + (2b\rho - 2a\lambda)\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega \\ 2\mu_2^{(\lambda)} &= \left| \frac{A}{C} \frac{-(2b\lambda - 2a\rho)\lambda - (2b\rho - 2a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega . \end{aligned} \right.$$

Possiamo quindi enunciare i teoremi seguenti:

1° *La proiezione m_λ sull'equatore dell'estremo dell'asse* $M^{(\lambda)}$ *dei moti interni parziali, il cui periodo è λ, descrive con moto armonico una ellisse i cui semi–assi sono paralleli a quelli che descrive il polo nel moto armonico avente il corrispondente periodo.*

2° *Ogni passaggio di m_λ per un vertice della sua traiettoria, avviene contemporaneamente al passaggio del polo per un vertice della sua traiettoria nel moto armonico corrispondente di eguale periodo.*

3° *Le formule* (6) *esprimono le grandezze dei semi–assi dell'ellisse descritta dal punto m_λ.*

Il moto armonico del polo col periodo λ può ottenersi sovrapponendo due moti armonici paralleli agli assi ξ e η; ed analogamente quello di m_λ risulterà sovrapponendo due moti armonici paralleli alle stesse direzioni. *I due moti armonici del polo e di m_λ nella direzione ξ avranno la stessa fase oppure fase opposta secondoché*

$$(7) \quad 2\frac{(b\lambda - a\rho)\omega + (b\rho - a\lambda)\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} + (a-b)\frac{\rho + \lambda}{\omega + \lambda}$$

sarà positivo o negativo; e similmente *i due moti armonici secondo η avranno la stessa fase o fase opposta secondoché sarà positivo o negativo*

$$(8) \quad 2\frac{-(b\lambda - a\rho)\lambda - (b\rho - a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} - (a-b)\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda} .$$

6. Nel N. 329 dell'Astronomical Journal dell'anno scorso il sig. CHANDLER ha dato gli elementi relativi al moto armonico del polo avente il periodo annuale. Si può, partendo da quei dati, calcolare gli elementi corrispondenti del moto interno che, secondo le ipotesi fatte, sarebbe capace di indurlo.

A tal fine, prendendo per unità il giorno siderale, e supponendo di poter trascurare il rapporto $M_3^0/C\omega$, bisognerà porre nelle formule

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= 2\pi \\ \rho &= \frac{2\pi}{305} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{366} \\ 2\varphi &= 0''.3 \\ 2\psi &= 0''.08 ; \end{aligned} \right.$$

quindi approssimativamente avremo

$$2a = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi = 2\pi \frac{3}{10 \times 360 \times 60 \times 60}$$

$$2b = 2\,\mathrm{tg}\,\psi = 2\pi \frac{8}{100 \times 360 \times 60 \times 60}.$$

Inoltre dovremo immaginare l'asse ξ inclinato di 45° sul meridiano di Greenwich.

Prendendo come abbiamo fatto precedentemente (vedi § 4)

$$\frac{A}{C} = \frac{305}{306}$$

si otterrà, applicando le (6),

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\mu_1^{(\lambda)} &= \frac{37}{10^{10}} C\omega \\ 2\,\mu_2^{(\lambda)} &= \frac{27}{10^{10}} C\omega. \end{aligned}\right.$$

L'asse a dell'ellisse descritto dal polo è inclinato di 45° su quello di Greenwich, quindi l'asse maggiore dell'ellisse descritto da m_λ giacerà pure nel piano meridiano avente la stessa longitudine di 45°.

Oltre a ciò mentre la (7) è positiva, la (8) risulta negativa.

Possiamo dunque riassumere i risultati nel modo seguente:

Se si esaminano le variazioni che dovrebbe subire l'asse $OM^{(\lambda)}$ *dei moti interni terrestri i quali, nella ipotesi che la terra non fosse plastica, sarebbero capaci di indurre nel polo terrestre il moto armonico studiato da* CHANDLER *ed avente il periodo annuale, si ha:*

1° *Proiettando* $M^{(\lambda)}$ *sull'equatore nel punto* m_λ, *questo descriverebbe una ellisse il cui asse maggiore giacerebbe nel piano meridiano avente la longitudine di* 45°.

2° *Gli assi di questa ellisse sarebbero eguali a*

$$\frac{37}{10^{10}} C\omega \quad , \quad \frac{27}{10^{10}} C\omega.$$

3° *Decomponendo il moto del polo e di* m_λ *nelle direzioni degli assi delle ellissi, i due moti secondo gli assi maggiori avverrebbero colla stessa fase, quelli secondo gli assi minori con fase opposta.*

7. Come esercizio sulle nostre formule si può ripetere un calcolo perfettamente analogo per risolvere il problema seguente:

Supponiamo per un momento che esistano dei moti interni aventi un periodo di 430 giorni e cerchiamone gli elementi affinché essi siano capaci di indurre nel polo il moto studiato da CHANDLER *ed avente il detto periodo.*

Supponendo sempre di trascurare il rapporto $M_3^0/C\omega$, dovremo prendere

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= 2\pi \\ \rho &= \frac{2\pi}{305} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{430} \end{aligned}\right.$$

ed ammettendo che il moto corrispondente del polo sia circolare ed abbia una semi–amplitudine di 0'', 1, avremo

$$\varphi = \psi = 0'',1\,,$$

quindi approssimativamente

$$a = b = \operatorname{tg}\varphi = 2\pi\frac{1}{10 \times 360 \times 60 \times 60}$$

da cui risulta, applicando le (6),

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{4}{10^{10}} C\omega\,.$$

NOTA

Nel § 2 abbiamo ridotto le equazioni (a) alla forma (a') trascurando i termini (1). Riprendiamo ora le (a): dividendo le prime due per Ar, otterremo

$$\frac{dp}{rdt} + \left[\frac{C-A}{A} + \frac{M_3}{Ar}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{rdt} - M_2\right)$$

$$\frac{dq}{rdt} - \left[\frac{C-A}{A} + \frac{M_3}{Ar}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_3}{rdt} + M_1\right).$$

Pongasi

$$\tau = \int_0^t \frac{rdt}{\omega}$$

denotando con ω il valore di r per $t = 0$. Prendiamo come variabile indipendente τ invece di t. Avremo

$$\frac{dp}{d\tau} + \left[\frac{C-A}{A}\omega + \frac{M_3}{A}\frac{\omega}{r}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{d\tau} - M_2\,\omega\right)$$

$$\frac{dq}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\omega + \frac{A_3}{M}\frac{\omega}{r}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{d\tau} + M_1\,\omega\right).$$

Chiamando poi M_3^0 il valore di M_3 per $\tau = 0$, e ponendo $r - \omega = \varepsilon$, sarà

$$M_3 = M_3^0 - \int_0^\tau (M_2 p - M_1 q)\frac{\omega}{r} d\tau - C\varepsilon\,.$$

Ne segue

$$\frac{dp}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\omega + \frac{M_3^0}{A}\right] q + vq = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{d\tau} - M_2\,\omega\right)$$

$$\frac{dq}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\omega + \frac{M_3^0}{A}\right] p - vp = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{d\tau} + M_1\,\omega\right)$$

essendo

$$v = -\frac{\omega}{r}\left\{\int_0^\tau \left(\frac{M_2}{A}p - \frac{M_1}{A}q\right)\frac{\omega}{r}d\tau + \left(\frac{C}{A} + \frac{M_3^0}{A\omega}\right)\varepsilon\right\}.$$

Supponiamo ora di sapere che p, q, ε sono piccolissime, tantoché rispetto a tutte le altre quantità che compariscono nelle formule *possano riguardarsi come infinitesimi del primo ordine*. Avremo allora che *v potrà considerarsi infinitesimo dello stesso ordine* e per conseguenza *i termini qv, pv saranno infinitesimi del secondo ordine.*

Trascurandoli otterremo le equazioni differenziali

$$(a'')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{d\tau}+\left[\frac{C-A}{A}\,\omega+\frac{M_3^0}{A}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{d\tau}-M_2\,\omega\right)\\ &\frac{dq}{d\tau}-\left[\frac{C-A}{A}\,\omega+\frac{M_3^0}{A}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{d\tau}+M_1\,\omega\right),\end{aligned}\right.$$

le quali hanno la stessa forma delle (a'); ad esse è quindi applicabile tutta l'analisi svolta nello scritto precedente. Dunque si perviene alle stesse formule, anche senza ammettere trascurabili le (1), ma soltanto supponendo che p, q, ε possano trattarsi come quantità infinitesime, e trascurare quindi quelle di ordine superiore. Dalle (a') alle (a'') vi è solo diversità nella variabile indipendente che è t nelle prime e τ nelle seconde; ma si osservi che, nell'applicazione ai moti terrestri, ponendo $\omega = 2\pi$, la variabile che effettivamente si prende come misura del tempo è τ.