

V.

SULLA TEORIA DEI MOVIMENTI DEL POLO TERRESTRE

« Astronomische Nachrichten », vol. 138 (1895), col. 33-52.

I.

1. Immaginiamo un corpo i cui assi principali centrali d'inerzia siano ξ , η , ζ , e supponiamo che, senza che se ne alteri la forma e la distribuzione di densità, abbia luogo nell'interno di esso o alla sua superficie, sotto l'azione di forze interne, un moto stazionario di una parte della materia che lo costituisce. Per esempio, onde fissare le idee e per maggior semplicità, supponiamo

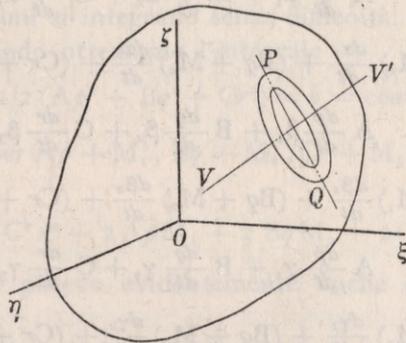


Fig. A.

che il corpo sia omogeneo e, per l'effetto di forze interne, un toro di rivoluzione PQ (fig. A) interno al corpo, abbia relativamente al corpo stesso, un moto uniforme di rotazione attorno al proprio asse VV' , mentre tutto il resto del corpo conservi la propria rigidità. Né il baricentro del corpo, né i suoi assi d'inerzia né i momenti principali d'inerzia A , B , C varieranno.

Le componenti secondo gli assi ξ , η , ζ delle coppie di quantità di moto dovuta ai movimenti stazionarii saranno tre costanti M_1 , M_2 , M_3 .

Se poi il sistema avrà un moto di rotazione attorno al proprio baricentro O e le componenti della velocità angolare nelle direzioni degli assi ξ , η , ζ saranno p , q , r , le componenti della coppia totale di quantità di moto nelle medesime direzioni risulteranno

$$Ap + M_1, \quad Bq + M_2, \quad Cr + M_3.$$

Supponiamo che il sistema sia sottratto all'azione di forze esterne: allora la coppia totale di quantità di moto dovrà esser costante in grandezza e direzione. Prendiamo come asse fisso z l'asse di questa coppia, e gli assi fissi

x, y nel piano invariabile e rappresentiamo con la seguente tabella i coseni di direzione delle due terne di assi ξ, η, ζ e x, y, z

	x, y, z
ξ	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$
η	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$
ζ	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$

Avremo allora i tre integrali delle aree espressi dalle equazioni seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} (Ap + M_1) \alpha_1 + (Bq + M_2) \alpha_2 + (Cr + M_3) \alpha_3 = 0 \\ (Ap + M_1) \beta_1 + (Bq + M_2) \beta_2 + (Cr + M_3) \beta_3 = 0 \\ (Ap + M_1) \gamma_1 + (Bq + M_2) \gamma_2 + (Cr + M_3) \gamma_3 = K \end{cases}$$

denotando con K la grandezza costante della coppia di quantità di moto.

Derivando le precedenti equazioni si otterrà

$$(2) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} \alpha_1 + B \frac{dq}{dt} \alpha_2 + C \frac{dr}{dt} \alpha_3 \\ + (Ap + M_1) \frac{d\alpha_1}{dt} + (Bq + M_2) \frac{d\alpha_2}{dt} + (Cr + M_3) \frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \\ A \frac{dp}{dt} \beta_1 + B \frac{dq}{dt} \beta_2 + C \frac{dr}{dt} \beta_3 \\ + (Ap + M_1) \frac{d\beta_1}{dt} + (Bq + M_2) \frac{d\beta_2}{dt} + (Cr + M_3) \frac{d\beta_3}{dt} = 0 \\ A \frac{dp}{dt} \gamma_1 + B \frac{dq}{dt} \gamma_2 + C \frac{dr}{dt} \gamma_3 \\ + (Ap + M_1) \frac{d\gamma_1}{dt} + (Bq + M_2) \frac{d\gamma_2}{dt} + (Cr + M_3) \frac{d\gamma_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Facciamo uso delle formule del POISSON

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, & \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r, & \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \\ \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q, & \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r, & \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p, \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, & \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, & \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p, \end{cases}$$

e poniamo

$$A \frac{dp}{dt} + (Cr + M_3) q - (Bq + M_2) r = L$$

$$B \frac{dq}{dt} + (Ap + M_1) r - (Cr + M_3) p = M$$

$$C \frac{dr}{dt} + (Bq + M_2) p - (Ap + M_1) q = N;$$

allora le (2) si scriveranno

$$L\alpha_1 + M\alpha_2 + N\alpha_3 = 0$$

$$L\beta_1 + M\beta_2 + N\beta_3 = 0$$

$$L\gamma_1 + M\gamma_2 + N\gamma_3 = 0$$

da cui seguono le equazioni

$$L = M = N = 0$$

ossia

$$(4) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_3q - M_2r = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1r - M_3p = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq + M_2p - M_1q = 0 \end{cases}$$

equazioni analoghe a quelle di EULERO.

2. Queste equazioni si integrano senza difficoltà. Moltiplicandole infatti per p, q, r e sommando otteniamo l'integrale

$$(5) \quad \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{cost.}$$

Moltiplicandole per $Ap + M_1, Bq + M_2, Cr + M_3$, e sommando abbiamo l'altro integrale

$$(6) \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2ApM_1 + 2BqM_2 + 2CrM_3 = K_1 = \text{cost.}$$

Questo integrale poteva evidentemente anche dedursi dagli integrali delle aree.

Ciò premesso risolvendo le equazioni precedenti rispetto a q e r , e sostituendo i valori ottenuti nella prima delle equazioni (4) otterremo

$$(7) \quad dt = I_1(p) dp.$$

In modo analogo possono aversi le equazioni

$$(7') \quad dt = I_2(q) dq$$

$$(7'') \quad dt = I_3(r) dr$$

quindi mediante quadrature si esprimerà il tempo in funzione di p, q, r e per mezzo di inversioni si esprimeranno p, q, r in funzione del tempo.

Mostriamo che può ottenersi la soluzione completa della questione. Infatti dalle (1) segue

$$\gamma_1 = \frac{1}{K}(Ap + M_1) \quad , \quad \gamma_2 = \frac{1}{K}(Bq + M_2) \quad , \quad \gamma_3 = \frac{1}{K}(Cr + M_3).$$

Ottenuti in tal modo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e posto

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad \gamma_3 = \cos \theta,$$

avremo subito i due angoli di EULERO θ e φ relativi alle due terne di assi x, y, z ; ξ, η, ζ . Il terzo angolo di EULERO si otterrà con una quadratura mediante la formula

$$\psi = \int \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{I - \gamma_3^2} dt.$$

Quindi si potranno avere i sei rimanenti coseni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

3. Ci possiamo ora chiedere: la precedente teoria può portare qualche sussidio allo studio della variazione delle latitudini?

Ammettiamo che nell'istante iniziale il corpo ruoti attorno ad uno dei suoi assi principali d'inerzia; per esempio intorno a ζ ; avremo allora nell'istante iniziale

$$p = q = 0 \quad r \geq 0,$$

onde nell'istante iniziale le (4) assumeranno la forma

$$A \frac{dp}{dt} = M_2 r$$

$$B \frac{dq}{dt} = -M_1 r$$

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

il che prova che le derivate di p e q non sono nulle se M_1 e M_2 sono diverse da zero e in conseguenza l'asse principale d'inerzia ζ non sarà un asse permanente di rotazione; ma l'asse stesso tenderà a variare.

Ora certamente nell'interno ed alla superficie della terra esistono dei moti stazionarii dovuti a forze interne; i quali, anche senza alterare sensibilmente i momenti d'inerzia ed il baricentro della terra, possono dar luogo a valori diversi da zero per M_1 e M_2 e quindi alterano l'asse di rotazione. Per esempio le correnti marine possono in certo modo riguardarsi come moti stazionarii del genere di quelli considerati; e così pure i moti dei fiumi e la susseguente evaporazione dell'acqua del mare; quindi il suo congelarsi in neve sulle montagne ecc.

Per quanto è a mia cognizione, non fu fin qui esaminata l'azione (che nulla esclude sia potente) che questi moti stazionarii esercitano sulle posizioni dei poli terrestri, sui loro movimenti e in conseguenza sulle variazioni delle latitudini⁽¹⁾. Gli autori che hanno trattato la questione del moto della terra hanno tenuto conto principalmente delle cause che alterano la distribuzione di materia; che variano quindi i momenti d'inerzia della terra, dipendentemente dalle azioni geologiche e dalla sua elasticità e plasticità. Ci permettiamo perciò di far qui un breve studio preliminare sul problema di meccanica rappresentato dalle equazioni (4). Le quali rappresentano sempre la legge del moto

(1) Vedi TISSERAND, *Mécanique céleste*, Vol. II, Cap. XXIX, XXX.

d'insieme del sistema, comunque siano numerosi, variamente distribuiti e complessi questi moti interni, purché stazionarii. Senza occuparci della determinazione del terzo integrale che ci porta a funzioni ellittiche, possiamo per via del tutto elementare studiare l'andamento del moto valendoci dei due integrali algebrici trovati precedentemente. Potremo disegnare la forma della traiettoria che descrive il polo di rotazione, e seguire il corpo nel suo movimento nello spazio valendoci di quei metodi coi quali POINSOT delucidò così mirabilmente lo studio dei moti di rotazione. Mostriamo come i moti interni del sistema, qualora alcuni loro elementi oltrepassassero certi limiti, sarebbero capaci, anche senza alterare la distribuzione delle masse, di produrre perfino una inversione di poli. Studieremo la distribuzione degli assi permanenti di rotazione le cui proprietà sono del tutto alterate dalle esistenze dei moti interni.

In un ultimo paragrafo esamineremo infine un nuovo caso. I moti interni terrestri, anche ammesso che conservino inalterata la distribuzione di materia, possono in talune epoche rallentarsi, in altre accelerarsi; e anche, mentre alcuni si rallentano, altri possono accelerarsi. La modificazione che tale variabilità apporta alle formule consiste nel supporre fin da principio M_1, M_2, M_3 variabili anziché costanti, pur restando costanti i momenti e gli assi d'inerzia ed il baricentro del corpo. Nell'ultimo paragrafo viene appunto studiato questo caso. Il problema non può riportarsi con eguale facilità alle quadrature; ma con un processo di approssimazioni successive può ottenersi, mediante serie rapidamente convergenti, la soluzione, sia determinando p, q, r mediante M_1, M_2, M_3 , sia determinando quest'ultime dalle prime. Cioè supponendo nota la legge di variazione del polo possono determinarsi gli elementi caratteristici dei moti interni.

Facciamo per ultimo osservare che in uno studio ulteriore esamineremo le perturbazioni che la plasticità, ossia l'attitudine della terra ad adattarsi al suo asse di rotazione, produce nel moto dei poli indotto da movimenti interni, seguendo in questo studio le ipotesi e le ricerche svolte dal prof. SCHIAPPARELLI nella sua classica Memoria presentata all'osservatorio di Pulkova nel 1889, in occasione della sua festa semisecolare.

II.

1. La integrazione successiva delle equazioni (4) e (3) conduce ad esprimere p, q, r ed i nove coseni come funzioni uniformi del tempo, sotto una forma che è notevolmente diversa da quella trovata da JACOBI nel caso del problema di EULERO. Noi però prescindiamo da questa soluzione analitica e studieremo l'andamento del moto con procedimenti geometrici elementari, i quali possono fornirci una nozione completa e chiara del moto stesso.

Cominceremo perciò dal proporci la risoluzione dei seguenti problemi:

1° Determinare tutte le possibili posizioni che l'asse istantaneo di rotazione può assumere relativamente al sistema mobile.

2° Determinare la velocità angolare di rotazione del sistema corrispondente ad una data posizione dell'asse istantaneo.

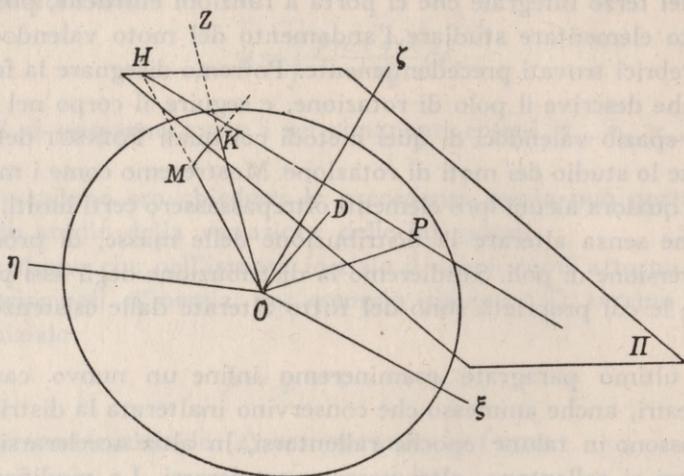


Fig. B.

A tal fine consideriamo l'ellissoide centrale d'inerzia del corpo la cui equazione sarà

$$(8) \quad A\xi^2 + B\eta^2 + Cz^2 = 1.$$

Invece di seguire il moto dell'asse istantaneo di rotazione relativamente al corpo mobile, seguiamo sull'ellissoide il moto della sua intersezione col detto asse. Questa intersezione, che denoteremo con P, si dirà il polo; le sue coordinate si indicheranno con ξ, η, ζ ; il luogo dei poli sull'ellissoide si chiamerà polodia. Posto

$$OP = q, \quad e \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

avremo

$$(9) \quad \xi = \rho \frac{p}{\omega}, \quad \eta = \rho \frac{q}{\omega}, \quad \zeta = \rho \frac{r}{\omega}$$

onde per le (5) e (8)

$$\frac{\rho^2}{\omega^2} 2h = 1$$

cioè

$$\omega = \rho \sqrt{2h}.$$

La velocità angolare di rotazione è quindi proporzionale al raggio vettore OP. Questa proposizione fornisce la soluzione della seconda questione propostaci.

Le (9) possono scriversi

$$p = \xi \sqrt{2h}, \quad q = \eta \sqrt{2h}, \quad r = \zeta \sqrt{2h}$$

onde, sostituendo nella (6), otterremo

$$(10) \quad A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}} (AM_1 \xi + BM_2 \eta + CM_3 \zeta) = \frac{K_1}{2h}.$$

Le equazioni (8) e (10) sono per conseguenza quelle della polodia.

L'equazione precedente può scriversi, indicando con K una costante:

$$A^2 \left(\xi + \frac{M_1}{A\sqrt{2h}} \right)^2 + B^2 \left(\eta + \frac{M_2}{B\sqrt{2h}} \right)^2 + C^2 \left(\zeta + \frac{M_3}{C\sqrt{2h}} \right)^2 = \frac{K^2}{2h}.$$

Dunque la polodia è la intersezione dell'ellissoide d'inerzia coll'ellissoide

$$A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2 = \frac{K^2}{2h}$$

trasportato parallelamente a se stesso in modo che il centro venga nel punto di coordinate

$$-\frac{M_1}{A\sqrt{2h}}, \quad -\frac{M_2}{B\sqrt{2h}}, \quad -\frac{M_3}{C\sqrt{2h}}.$$

La prima questione propostaci resta dunque risolta.

2. POISSON ha potuto dare una immagine semplice dei moti di EULERO, poiché in questi moti il piano tangente all'ellissoide d'inerzia lungo la polodia è parallelo a quello invariabile e si conserva fisso. Vediamo quali proprietà analoghe si presentano nel nostro caso.

Il piano polare, cioè il piano π tangente all'ellissoide d'inerzia nel poio, ha per equazione rispetto agli assi ξ, η, ζ

$$(11) \quad Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2h}.$$

Conduciamo (fig. B) l'asse OK della coppia totale di quantità di moto che sarà un segmento fisso nello spazio; ed il segmento OM avente per proiezioni su ξ, η, ζ rispettivamente M_1, M_2, M_3 . Chiameremo questo segmento, che è fisso nell'interno del corpo, asse dei moti interni.

Le coordinate dei punti M e K sono rispettivamente:

$$M_1, M_2, M_3 \\ Ap + M_1, \quad Bq + M_2, \quad Cr + M_3.$$

Quindi il piano polare è sempre perpendicolare alla congiungente i punti estremi dell'asse dei moti interni e dell'asse della coppia di quantità di moto.

La distanza MK è data da

$$\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}$$

mentre la distanza OD dell'origine dal piano polare è

$$\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}};$$

per conseguenza la distanza del baricentro dal piano polare varia in ragione inversa della distanza fra gli estremi dell'asse dei moti interni e di quello della coppia di quantità di moto.

L'equazione del piano polare riferito agli assi fissi x, y, z avrà la forma

$$(Ap \alpha_1 + Bq \alpha_2 + Cr \alpha_3) x + (Ap \beta_1 + Bq \beta_2 + Cr \beta_3) y \\ + (Ap \gamma_1 + Bq \gamma_2 + Cr \gamma_3) z = \sqrt{2h}$$

ovvero per le (1)

$$-(M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3) x - (M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + M_3 \beta_3) y \\ + (K - M_1 \gamma_1 - M_2 \gamma_2 - M_3 \gamma_3) z = \sqrt{2h}.$$

La sua equazione al tempo $t + dt$ sarà

$$\left. \begin{aligned} &-(M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3) x - (M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + M_3 \beta_3) y \\ &\quad + (K - M_1 \gamma_1 - M_2 \gamma_2 - M_3 \gamma_3) z \\ &-(M_1 d\alpha_1 + M_2 d\alpha_2 + M_3 d\alpha_3) x - (M_1 d\beta_1 + M_2 d\beta_2 \\ &\quad + M_3 d\beta_3) y - (M_1 d\gamma_1 + M_2 d\gamma_2 + M_3 d\gamma_3) z \end{aligned} \right\} = \sqrt{2h}$$

ossia la intersezione del piano polare al tempo $t + dt$, col piano polare al tempo t , apparterrà al piano

$$(M_1 d\alpha_1 + M_2 d\alpha_2 + M_3 d\alpha_3) x + (M_1 d\beta_1 + M_2 d\beta_2 + M_3 d\beta_3) y \\ + (M_1 d\gamma_1 + M_2 d\gamma_2 + M_3 d\gamma_3) z = 0.$$

Dividendo per dt e applicando le formule (3) l'equazione di questo piano diverrà

$$\left| \begin{array}{ccc} M_1, M_2, M_3 \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ p, q, r \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{ccc} M_1, M_2, M_3 \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \\ p, q, r \end{array} \right| y + \left| \begin{array}{ccc} M_1, M_2, M_3 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \\ p, q, r \end{array} \right| z = 0$$

ovvero

$$\left| \begin{array}{ccc} \Sigma \alpha_1 x, \Sigma \alpha_2 x, \Sigma \alpha_3 x \\ p, q, r \\ M_1, M_2, M_3 \end{array} \right| = 0$$

in cui il simbolo sommatorio indica la somma del termine scritto con altri due che si ottengono da quello mutando α in β e in γ , e contemporaneamente x in y e in z . Dunque, riferendoci agli assi ξ, η, ζ l'equazione del piano sarà

$$(12) \quad \left| \begin{array}{ccc} \xi, \eta, \zeta \\ p, q, r \\ M_1, M_2, M_3 \end{array} \right| = 0.$$

Esso è dunque il piano POM. Ora la retta PH secondo cui si tagliano i piani polari corrispondenti ai tempi $t + dt$ e t può interpretarsi come l'asse istantaneo intorno a cui ruota nell'istante t il piano polare. Quindi: il piano polare ruota in ogni istante attorno alla sua intersezione col piano che contiene il polo e l'asse dei moti interni.

Per ciascun punto della polodia tiriamo la retta che rappresenta l'asse istantaneo di rotazione del piano polare corrispondente. Il luogo di queste rette sarà una superficie tangente all'ellissoide d'inerzia lungo la polodia e ad essa collegata invariabilmente, che potrà chiamarsi la rigata assiale. Il moto del sistema avviene dunque in modo che l'ellissoide d'inerzia rotola sul piano polare, mentre questo ruota in ciascun istante attorno alla generatrice secondo cui incontra la rigata assiale.

Per ottenere le equazioni della rigata assiale, basterà eliminare p, q, r fra le quattro equazioni (5) (6) (11) (12).

3. Poniamo nelle equazioni (4)

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{1}{b}, \quad C = \frac{1}{c};$$

esse diverranno

$$\frac{1}{a} \frac{dp}{dt} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) qr + M_3 q - M_2 r = 0$$

$$\frac{1}{b} \frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) rp + M_1 r - M_3 p = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) pq + M_2 p - M_1 q = 0$$

e gl'integrali (5) e (6) prenderanno la forma

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 2h$$

$$\left(\frac{p}{a} + M_1 \right)^2 + \left(\frac{q}{b} + M_2 \right)^2 + \left(\frac{r}{c} + M_3 \right)^2 = 1,$$

in cui si è supposto di avere scelte le unità in modo da rendere eguale ad 1 la costante K. Componiamo il moto del sistema con una rotazione uniforme ω attorno all'asse OK.

Le componenti della rotazione diverranno

$$p' = p + \omega \left(\frac{p}{a} + M_1 \right) = p \frac{a + \omega}{a} + \omega M_1$$

$$q' = q + \omega \left(\frac{q}{b} + M_2 \right) = q \frac{b + \omega}{b} + \omega M_2$$

$$r' = r + \omega \left(\frac{r}{c} + M_3 \right) = r \frac{c + \omega}{c} + \omega M_3,$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = \frac{\dot{p}' a}{a + \omega} - \frac{M_1 \omega a}{a + \omega} \\ \dot{q} = \frac{\dot{q}' b}{b + \omega} - \frac{M_2 \omega b}{b + \omega} \\ \dot{r} = \frac{\dot{r}' c}{c + \omega} - \frac{M_3 \omega c}{c + \omega} \end{array} \right.$$

Poniamo

$$a + \omega = a' \quad , \quad b + \omega = b' \quad , \quad c + \omega = c';$$

$$M_1 \frac{a}{a + \omega} = M'_1 \quad , \quad M_2 \frac{b}{b + \omega} = M'_2 \quad , \quad M_3 \frac{c}{c + \omega} = M'_3;$$

avremo allora

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{p}'}{a'} + M'_1 = \frac{\dot{p}}{a} + M_1 \\ \frac{\dot{q}'}{b'} + M'_2 = \frac{\dot{q}}{b} + M_2 \\ \frac{\dot{r}'}{c'} + M'_3 = \frac{\dot{r}}{c} + M_3, \end{array} \right.$$

da cui segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a'} \frac{d\dot{p}'}{dt} + \left(\frac{1}{c'} - \frac{1}{b'} \right) \dot{q}' r' + M'_3 \dot{q}' - M'_2 r' = 0 \\ \frac{1}{b'} \frac{d\dot{q}'}{dt} + \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{c'} \right) r' \dot{p}' + M'_1 r' - M'_3 \dot{p}' = 0 \\ \frac{1}{c'} \frac{d\dot{r}'}{dt} + \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'} \right) \dot{p}' \dot{q}' + M'_2 \dot{p}' - M'_1 \dot{q}' = 0 \\ \left(\frac{\dot{p}'}{a'} + M'_1 \right)^2 + \left(\frac{\dot{q}'}{b'} + M'_2 \right)^2 + \left(\frac{\dot{r}'}{c'} + M'_3 \right)^2 = 1 \\ \frac{\dot{p}'^2}{a'} + \frac{\dot{q}'^2}{b'} + \frac{\dot{r}'^2}{c'} = 2 h' \end{array} \right.$$

essendo

$$h' = h + \frac{2}{\omega} \left(1 - \frac{M_1^2 a}{a + \omega} - \frac{M_2^2 b}{b + \omega} - \frac{M_3^2 c}{c + \omega} \right).$$

Dunque, allorché il moto che noi studiamo si compone con una rotazione uniforme attorno all'asse della coppia di quantità di moto, la natura del moto stesso non si altera; solo si alterano le costanti che lo caratterizzano.

Questa proprietà è comune ai moti che noi studiamo ed a quelli alla POINSOT. Per questi ultimi le formule di JACOBI già la esprimevano analiticamente e ne mostravano l'importanza; ma essa venne posta in luce solo in appresso dal SYLVESTER e da questi, dal DARBOUX, dall'HALPHEN e da altri geometri venne largamente applicata.

4. Nei moti che noi studiamo è importante la ricerca di quelle rotazioni che possono essere permanenti. Siccome deve aversi $A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 = \text{cost.}$, così affinché un asse sia un asse permanente di rotazione è necessario che siano costanti $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ ovvero siano

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} = 0$$

e quindi per le (4)

$$(13) \quad \begin{cases} (C - B)qr + M_3\dot{q} - M_2\dot{r} = 0 \\ (A - C)r\dot{p} + M_1\dot{r} - M_3\dot{p} = 0 \\ (B - A)\dot{p}\dot{q} + M_2\dot{p} - M_1\dot{q} = 0 \end{cases}$$

donde

$$M_1(C - B)qr + M_2(A - C)r\dot{p} + M_3(B - A)\dot{p}\dot{q} = 0.$$

Dunque tutti gli assi permanenti di rotazione apparterranno al cono di secondo grado

$$(14) \quad M_1(C - B)\eta\zeta + M_2(A - C)\zeta\xi + M_3(B - A)\xi\eta = 0.$$

Supponiamo A, B, C diversi fra loro e M_1, M_2, M_3 diversi da zero; allora inversamente ogni generatrice di questo cono sarà un asse permanente di rotazione, purché il sistema ruoti con una certa velocità angolare attorno all'asse stesso.

Per avere la velocità angolare ω corrispondente a ciascuno dei detti assi, affinché esso si conservi un asse permanente di rotazione, chiamiamo α, β, γ i coseni di direzione dell'asse stesso.

In virtù delle (13) avremo

$$\omega = \frac{M_2\gamma - M_3\beta}{(C - B)\beta\gamma} = \frac{M_3\alpha - M_1\gamma}{(A - C)\gamma\alpha} = \frac{M_1\beta - M_2\alpha}{(B - A)\alpha\beta}.$$

L'asse dei moti interni appartiene al cono (14) e alla sua direzione corrisponde una velocità angolare $\omega = 0$. Sommando membro a membro le (13) abbiamo

$$\begin{aligned} & (C - B)qr + (A - C)r\dot{p} + (B - A)\dot{p}\dot{q} \\ & + (M_2 - M_3)\dot{p} + (M_3 - M_1)\dot{q} + (M_1 - M_2)\dot{r} = 0. \end{aligned}$$

Dunque gli estremi dei segmenti che rappresentano le rotazioni permanenti sono le intersezioni del cono (14) colla quadrica

$$(15) \quad \begin{aligned} & (C - B)\eta\zeta + (A - C)\zeta\xi + (B - A)\xi\eta \\ & + (M_2 - M_3)\xi + (M_3 - M_1)\eta + (M_1 - M_2)\zeta = 0. \end{aligned}$$

Consideriamo ora dei casi particolari:

Supponiamo A, B, C diversi fra loro e,

1° $M_3 = 0$. Le rotazioni saranno permanenti quando

$$r = 0, \quad \frac{M_1}{p} + A = \frac{M_2}{q} + B,$$

oppure

$$r \text{ qualunque}, \quad p = -\frac{M_1}{A-C}, \quad q = \frac{M_2}{C-B};$$

2° $M_1 = M_2 = 0$. Le rotazioni saranno permanenti quando

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r \text{ qualunque},$$

oppure

$$p = 0, \quad q \text{ qualunque}, \quad r = \frac{M_3}{C-B},$$

oppure

$$p \text{ qualunque}, \quad q = 0, \quad r = \frac{M_3}{A-C}.$$

3° $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Le rotazioni saranno permanenti quando l'asse di rotazione coinciderà con uno degli assi d'inerzia. (Caso di EULERO).

Supponiamo $A = B \geq C$, e

1° M_1 o M_2 o ambedue diversi da zero; allora le rotazioni saranno permanenti quando

$$p = \alpha M_1, \quad q = \alpha M_2, \quad r = \frac{\alpha M_3}{1 - \alpha(C-A)},$$

escluso il caso in cui sia $\alpha = \frac{1}{C-A}$. Gli assi permanenti di rotazione appartengono dunque tutti al piano che contiene l'asse ζ e l'asse dei moti interni. (Questo caso verrà studiato più particolarmente in seguito).

2° $M_1 = M_2 = 0$; allora le rotazioni saranno permanenti quando

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r \text{ qualunque},$$

oppure

$$p \text{ qualunque}, \quad q \text{ qualunque}, \quad r = \frac{M_3}{A-C}.$$

3° $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. (Caso di EULERO).

Supponiamo $A = B = C$; allora la rotazione sarà permanente quando

$$\frac{p}{M_1} = \frac{q}{M_2} = \frac{r}{M_3}.$$

Sarebbe interessante lo studio delle stabilità o meno dei detti assi permanenti di rotazione; ma noi lo tralasciamo in queste considerazioni preliminari sul problema.

È facile ora riconoscere una notevole relazione che passa fra gli assi permanenti di rotazione e i punti multipli della polodia. Questi si avranno solo ove le due quadriche (8) e (10) saranno tangenti fra loro; ora i piani tangenti alle due quadriche nel polo, le cui coordinate sono

$$\frac{p}{\sqrt{2h}}, \frac{q}{\sqrt{2h}}, \frac{r}{\sqrt{2h}},$$

avranno per equazioni

$$\frac{Ap}{\sqrt{2h}} \xi + \frac{Bq}{\sqrt{2h}} \eta + \frac{Cr}{\sqrt{2h}} \zeta = 1$$

$$A(Ap + M_1) \left(\xi - \frac{p}{\sqrt{2h}} \right) + B(Bq + M_2) \left(\eta - \frac{q}{\sqrt{2h}} \right)$$

$$+ C(Cr + M_3) \left(\zeta - \frac{r}{\sqrt{2h}} \right) = \frac{K_1}{2h};$$

quindi questi due piani coincideranno quando sarà

$$\frac{p}{Ap + M_1} = \frac{q}{Bq + M_2} = \frac{r}{Cr + M_3}$$

cioè quando l'asse di rotazione coinciderà con l'asse della coppia totale di quantità di moto. Dalle equazioni precedenti seguono immediatamente le (13), per conseguenza avremo il teorema: gli assi permanenti di rotazione sono le congiungenti i punti multipli della polodia col baricentro; e se una polodia ha un punto multiplo, ivi la velocità angolare di rotazione ha la grandezza della rotazione permanente.

Riprendiamo le equazioni (4). Esse saranno soddisfatte sostituendo a $p(t), q(t), r(t)$, le funzioni $-p(T-t), -q(T-t), -r(T-t)$ in cui T è una costante arbitraria, e contemporaneamente sostituendo a M_1, M_2, M_3 le quantità $-M_1, -M_2, -M_3$. Questa proprietà potrà enunciarsi dicendo: i moti del sistema sono invertibili, purché si inverta l'asse dei moti interni.

Ciò premesso supponiamo che la polodia abbia un punto multiplo P_0 . Se il polo giungesse a questo punto, dopo un tempo T da che è incominciato il moto, invertendo il moto stesso il polo tornerebbe al punto di partenza dopo il tempo T . Ma l'asse e la velocità di rotazione corrispondenti a P_0 sono permanenti, dunque il polo non potrebbe più muoversi da P_0 . Abbiamo dunque il teorema: Se la polodia ha un punto multiplo, il polo si avvicinerà indefinitamente al punto stesso senza raggiungerlo mai.

Ciò costituisce una differenza essenziale fra i moti che hanno luogo quando la polodia non ha punti multipli e quando ne possiede. Nel primo caso la polodia sarà chiusa ed il polo tornerà al punto di partenza; nel secondo, il polo non tornerà al punto di partenza, ma tenderà indefinitamente verso il punto multiplo.

III.

1. Il caso più interessante ad esaminarsi, per le applicazioni ai moti della terra, è quello in cui l'ellissoide d'inerzia abbia due semiassi eguali ed il terzo differente e minore dei due. Supponiamo $A = B$, e scegliamo gli assi ξ, η nel piano dell'equatore in modo che l'asse dei moti interni giaccia nel piano $\xi\zeta$; sarà $M_2 = 0$, e le equazioni della polodia diverranno

$$\begin{cases} A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1 \\ A^2(\xi^2 + \eta^2) + C^2\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2}h}(AM_1\xi + CM_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1 \\ C(C-A)\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2}h}(AM_1\xi + CM_3\zeta) = \left(\frac{K_1}{2h} - A\right). \end{cases}$$

Posto

$$\begin{cases} -\frac{CM_3}{C(C-A)\sqrt{2}h} = \xi_0 \\ \frac{C^2M_3^2 + (K - 2Ah)C(C-A)}{2\sqrt{2}hAC(C-A)M_1} = \xi_0 \\ \frac{AM_1}{C(C-A)\sqrt{2}h} = P \end{cases}$$

le due equazioni diverranno

$$\begin{cases} A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1 \\ (\zeta - \xi_0)^2 = 2P(\xi_0 - \xi). \end{cases}$$

Dunque se l'ellissoide d'inerzia è simmetrico, la polodia si proietta sul meridiano che contiene l'asse dei moti interni secondo una parabola il cui asse è normale a quello di simmetria.

Le coordinate del vertice della parabola saranno ξ_0 e ζ_0 e P ne sarà il semiparametro.

Dal precedente teorema può dedursi molto facilmente la costruzione della polodia, applicando notissime operazioni di geometria descrittiva. A tal fine scegliamo come piani di proiezione un piano parallelo all'equatore ed uno parallelo all'asse di simmetria ed a quello dei moti interni. Sul primo l'ellissoide d'inerzia si proietterà secondo un cerchio; sull'altro secondo una ellisse, ed in questo piano la polodia si proietterà secondo una parabola di cui l'asse sarà parallelo all'equatore. La polodia sarà dunque la intersezione dell'ellissoide col cilindro normale al 2° piano di proiezione e avente per base la detta parabola. È dunque facilissimo costruire la prima proiezione della polodia.

Impiegando questo procedimento abbiamo potuto disegnare diverse forme che può assumere la polodia, ed a tal fine abbiamo cambiato convenientemente la posizione del vertice ed il parametro della parabola. Le curve furono disegnate sia ammettendo che il polo parta dall'estremo dell'asse minore, sia supponendo che parta da posizioni prossime al detto estremo (vedi tavola).

2. La fig. 4 bis (cfr. tavola) corrisponde al caso in cui può avvenire il fatto della inversione dei poli; vale a dire che il polo può passare da un estremo all'altro dell'asse minore dell'ellissoide.

Perché ciò succeda, sono necessarie due condizioni:

- 1° che la parabola passi per le proiezioni delle estremità dell'asse minore;
2° che il suo vertice giaccia nell'interno della proiezione dell'ellissoide.

Queste condizioni si verificheranno quando sia

$$(16) \quad \zeta_0 = 0$$

$$(17) \quad \xi_0 < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

La prima dà $M_3 = 0$; onde

$$\xi_0 = \frac{K_1 - 2Ah}{2\sqrt{2h}AM_1}.$$

Nell'istante iniziale, in cui il polo si trova ad una estremità dell'asse minore, avremo

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0;$$

quindi

$$Cr_0^2 = 2h, \quad C^2r_0^2 = K_1$$

da cui segue

$$\xi_0 = \frac{C_0r_0^2(C-A)}{2\sqrt{Cr_0^2}AM_1};$$

dunque per la (17)

$$\frac{Cr_0^2(C-A)}{2\sqrt{Cr_0^2}AM_1} < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Ne segue che le condizioni necessarie e sufficienti affinché avvenga la inversione dei poli sono espresse da

$$M_1 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{A}}(C-A)r_1, \quad M_3 = 0.$$

3. Passiamo allo studio degli assi permanenti di rotazione nel caso dell'ellissoide di rivoluzione.

Supponendo $A = B$, $M_2 = 0$, le (13) diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} ((C - A)r + M_3)q = 0 \\ ((C - A)r + M_3)p - M_2r = 0 \\ M_1q = 0; \end{array} \right.$$

dunque supponendo $M_1 \geq 0$, avremo

$$q = 0$$

$$(C - A)r\dot{p} + M_3\dot{p} - M_1r = 0,$$

da cui segue che gli assi permanenti apparterranno al piano $\xi\zeta$ e il luogo dei loro estremi avrà per equazione

$$(C - A)\xi\zeta + M_3\xi - M_1\zeta = 0.$$

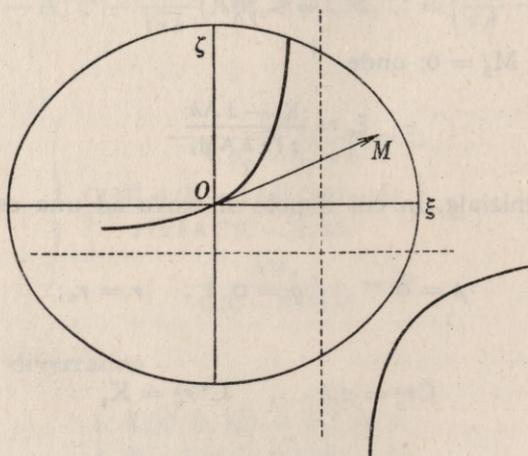


Fig. C.

Poniamo

$$\xi = \xi' - \frac{M_3}{C - A}, \quad \eta = \eta' + \frac{M_1}{C - A};$$

la equazione precedente diverrà

$$\xi'\zeta' = -\frac{M_1 M_3}{(C - A)^2}.$$

Dunque il luogo degli estremi delle rotazioni permanenti è una iperbole equilatera giacente nel piano meridiano che contiene l'asse dei moti interni, i cui asintoti sono paralleli agli assi e il cui asse trasverso è $\frac{\sqrt{|M_1 M_3|}}{C - A}$. Essa passa per l'origine ed ivi è tangente (fig. C) all'asse dei moti interni.

4. Il caso più semplice che possa trattarsi è quello in cui l'ellissoide d'inerzia si riduce ad una sfera. Se $A = B = C$, le equazioni della polodia divengono

$$\begin{cases} A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \\ A^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{2A}{\sqrt{2h}}(M_1\xi + M_2\eta + M_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}, \end{cases}$$

ossia sarà l'intersezione della sfera d'inerzia col piano

$$\frac{2A}{\sqrt{2h}}(M_1\xi + M_2\eta + M_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A.$$

Dunque la polodia sarà un circolo della sfera, il cui asse sarà quello dei moti interni.

In questo caso, le (4) divengono equazioni lineari che si integrano subito. Preso infatti come asse ξ l'asse dei moti interni, esse diverranno

$$A \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} + \frac{M}{A}r = 0, \quad \frac{dr}{dt} - \frac{M}{A}q = 0,$$

da cui segue

$$p = a_1, \quad q = a_2 \cos\left(\frac{M}{A}t + a_3\right), \quad r = a_2 \sin\left(\frac{M}{A}t + a_3\right),$$

in cui a_1, a_2, a_3 denotano tre costanti arbitrarie. Il polo descriverà dunque la polodia con velocità costante e il periodo di una sua rivoluzione sarà

$$\frac{2\pi A}{M}.$$

In questo caso, l'ampiezza della polodia non dipenderà dalla grandezza dell'asse dei moti interni, ma solo dalla sua direzione rispetto all'asse istantaneo iniziale di rotazione.

IV.

1. Nello stabilire le equazioni (4) analoghe a quelle di Eulero abbiamo supposto che M_1, M_2, M_3 fossero costanti; ossia che i moti interni fossero stazionarii. Nulla impedisce però di supporre che queste quantità siano variabili col tempo; allora le equazioni analoghe a quelle di EULERO (4) assumono invece la forma

$$(18) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_3q - M_2r + \frac{dM_1}{dt} = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1r - M_3p + \frac{dM_2}{dt} = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq + M_2p - M_1q + \frac{dM_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Di queste equazioni può trovarsi l'integrale

$$(Ap + M_1)^2 + (Bq + M_2)^2 + (Cr + M_3)^2 = K^2.$$

L'altro integrale che esisteva nel caso di M_1, M_2, M_3 costanti non esiste più in questo caso; quindi il problema non può ricondursi con eguale facilità alle quadrature come nel caso in cui M_1, M_2, M_3 sono costanti.

Esaminiamo però un caso particolare che presenta interesse per l'applicazione al moto della terra. Supponiamo $A = B$; allora le (18) diventano

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + \left[\frac{C-A}{A} r + \frac{M_3}{A} \right] q = \left(M_2 r - \frac{dM_1}{dt} \right) \frac{1}{A} \\ \frac{dq}{dt} - \left[\frac{C-A}{A} r + \frac{M_3}{A} \right] p = \left(-M_1 r - \frac{dM_2}{dt} \right) \frac{1}{A} \\ \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{C} \frac{dM_3}{dt} + \frac{(M_1 q - M_2 p)}{C} \end{cases}$$

2. Per integrare queste equazioni differenziali, possiamo impiegare il metodo delle approssimazioni successive. Perciò osserviamo che, se p e q fossero conosciute, in virtù della terza equazione (19) si potrebbe ottenere la r con una quadratura. Infatti si avrebbe

$$(20) \quad r = a_1 - \frac{1}{C} M_3 + \frac{1}{C} \int (M_1 q - M_2 p) dt.$$

Mostriamo ora che se fosse nota la r si potrebbero senz'altro integrare le prime due equazioni (19). A tal fine si ponga

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{C-A}{A} r + \frac{M_3}{A} = \rho \\ \frac{1}{A} \left(M_2 r - \frac{dM_1}{dt} \right) = \alpha \\ \frac{1}{A} \left(-M_1 r - \frac{dM_2}{dt} \right) = \beta; \end{cases}$$

le (19) diverranno

$$\frac{dp}{dt} + \rho q = \alpha$$

$$\frac{dq}{dt} - \rho p = \beta.$$

Sia

$$u = \int \rho dt,$$

allora

$$\frac{dp}{du} + q = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \frac{dq}{du} - p = \frac{\beta}{\rho};$$

quindi

$$\begin{aligned} p &= C_2 \cos u - C_3 \sin u \\ q &= C_2 \sin u + C_3 \cos u \\ \frac{dC_2}{dt} \cos u - \frac{dC_3}{dt} \sin u &= \alpha \\ \frac{dC_2}{dt} \sin u + \frac{dC_3}{dt} \cos u &= \beta, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_2 &= \int (\alpha \cos u + \beta \sin u) dt + a_2 \\ C_3 &= -\int (\alpha \sin u - \beta \cos u) dt + a_3, \end{aligned}$$

a_2 e a_3 denotando due costanti. Per conseguenza

$$(22) \quad \begin{cases} p = \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u) dt + a_2 \right] \cos u + \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u) dt + a_3 \right] \sin u \\ q = \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u) dt + a_2 \right] \sin u - \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u) dt + a_3 \right] \cos u. \end{cases}$$

Prendiamo ora dapprima per r il valore

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} M_3$$

e sostituiamo questo valore nelle (21); otterremo dalle (22) per p e q dei valori che sostituiti nella (20) ci daranno per r un nuovo valore; il quale alla sua volta sostituito nelle (21) ci darà per p e q mediante le (22) dei nuovi valori. Così di seguito procedendo potremo ottenere la soluzione con successive approssimazioni.

È facile costruire le serie che danno la soluzione con questo mezzo. Poniamo perciò

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1 - \frac{1}{C} M_3, \quad u_1 = \int_0^t \left(r_1 \frac{C-A}{A} + \frac{M_3}{A} \right) dt, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{A} \left(M_2 r_1 - \frac{dM_1}{dt} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{A} \left(-M_1 r_1 - \frac{dM_2}{dt} \right) \\ p_1 &= \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1) dt + a_2 \right] \cos u_1 \\ &\quad + \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1) dt + a_3 \right] \sin u_1 \\ q_1 &= \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1) dt + a_2 \right] \sin u_1 \\ &\quad - \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1) dt + a_3 \right] \cos u_1. \end{aligned}$$

Poniamo quindi per $n > 1$ le formule ricorrenti seguenti

$$r_n = \frac{1}{C} \int_0^t (M_1 q_{n-1} - M_2 p_{n-1}) dt$$

$$u_n = \frac{C-A}{A} \int_0^t r_n dt \quad , \quad \alpha_n = \left(\frac{1}{A} M_2 - \frac{C-A}{A} \sum_1^{n-1} q_{i-1} \right) r_n ,$$

$$\beta_n = \left(-\frac{1}{A} M_1 + \frac{C-A}{A} \sum_1^{n-1} p_{i-1} \right) r_n ,$$

$$p_n = \left\{ \int_0^t \left[\alpha_n \cos \left(\sum_1^n u_i \right) + \beta_n \operatorname{sen} \left(\sum_1^n u_i \right) \right] dt \right\} \cos \left(\sum_1^n u_i \right)$$

$$+ \left\{ \int_0^t \left[\alpha_n \operatorname{sen} \left(\sum_1^n u_i \right) - \beta_n \cos \left(\sum_1^n u_i \right) \right] dt \right\} \operatorname{sen} \left(\sum_1^n u_i \right)$$

$$q_n = \left\{ \int_0^t \left[\alpha_n \cos \left(\sum_1^n u_i \right) + \beta_n \operatorname{sen} \left(\sum_1^n u_i \right) \right] dt \right\} \operatorname{sen} \left(\sum_1^n u_i \right)$$

$$- \left\{ \int_0^t \left[\alpha_n \operatorname{sen} \left(\sum_1^n u_i \right) - \beta_n \cos \left(\sum_1^n u_i \right) \right] dt \right\} \cos \left(\sum_1^n u_i \right) ;$$

avremo che gli integrali richiesti saranno

$$p = \sum_1^{\infty} p_n \quad , \quad q = \sum_1^{\infty} q_n \quad , \quad r = \sum_1^{\infty} r_n .$$

È facile riconoscere che queste serie sono convergenti, almeno limitando il tempo entro un conveniente intervallo.

Se ora vogliamo limitarci all'applicazione al caso del moto della terra per un intervallo non lungo di tempo, avremo che p e q saranno piccolissimi, tanto che le serie precedenti saranno molto rapidamente convergenti, e basteranno i soli primi termini per una prima approssimazione.

3. Facciamo per ultimo osservare che, nota la legge con cui variano p, q, r (ottenuta per esempio per via empirica), le (18) ci forniscono i valori corrispondenti di M_1, M_2, M_3 in funzione del tempo. A tal fine basterà integrare le (18) supponendo p, q, r conosciute e prendendo come funzioni incognite M_1, M_2, M_3 .

Le serie che ci forniscono la soluzione sono ancora più semplici di quelle precedentemente ottenute.

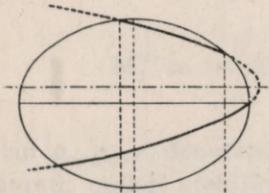


Fig. 1.

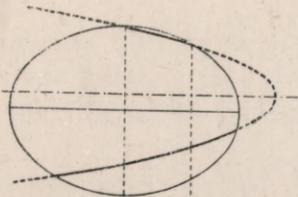


Fig. 1 bis.

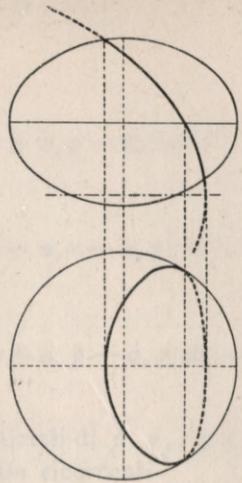
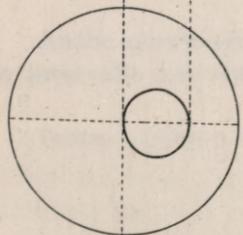


Fig. 2.

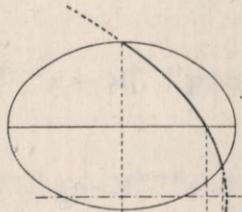


Fig. 2 bis.

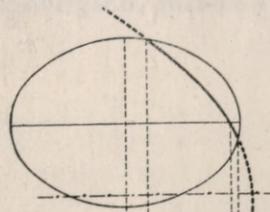
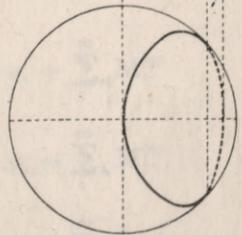


Fig. 2 ter.

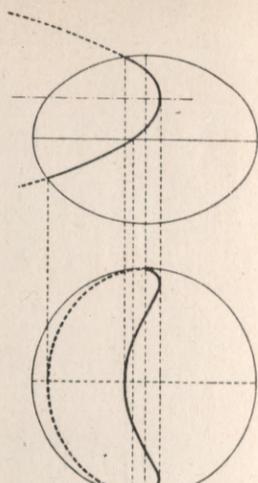


Fig. 3.

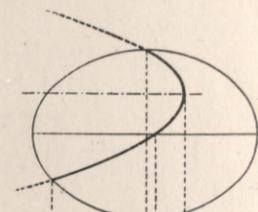


Fig. 3 bis.

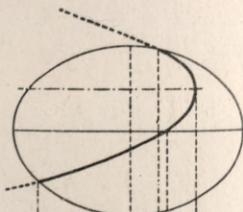
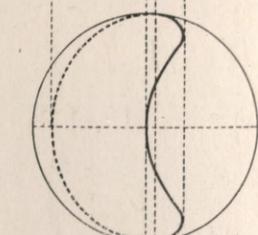


Fig. 3 ter.

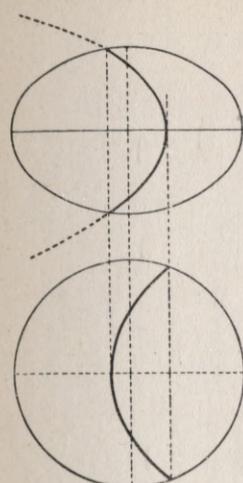


Fig. 4.

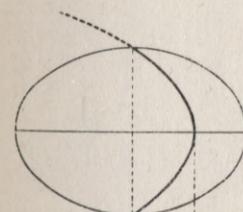


Fig. 4 bis.

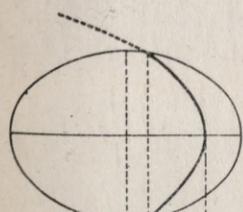
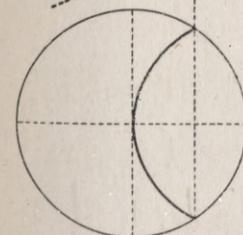


Fig. 4 ter.

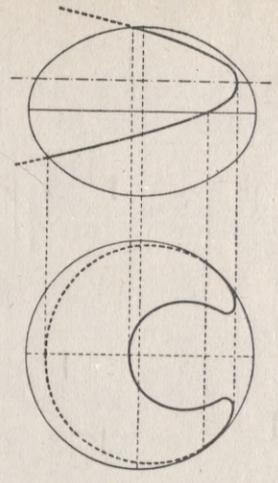


Fig. 5.

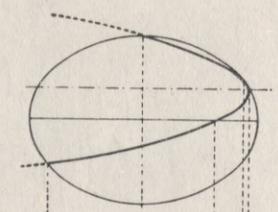


Fig. 5 bis.

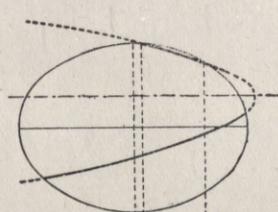
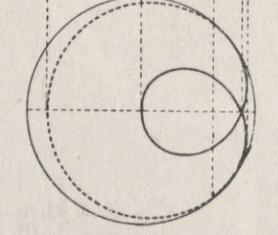


Fig. 5 ter.

Basterà infatti prendere

$$M_1^{(1)} = - \int_0^t ((C - B)qr + a_3q - a_2r) dt - A(p - p_0)$$

$$M_2^{(1)} = - \int_0^t ((A - C)rp + a_1r - a_3p) dt - B(q - q_0)$$

$$M_3^{(1)} = - \int_0^t ((B - A)pq + a_2p - a_1q) dt - C(r - r_0),$$

in cui p_0, q_0, r_0 denotano i valori iniziali di p, q, r e a_1, a_2, a_3 sono quantità costanti: quindi stabilire le formole ricorrenti

$$M_1^{(n)} = \int_0^t (M_3^{(n-1)}q - M_2^{(n-1)}r) dt$$

$$M_2^{(n)} = \int_0^t (M_1^{(n-1)}r - M_3^{(n-1)}p) dt$$

$$M_3^{(n)} = \int_0^t (M_2^{(n-1)}p - M_1^{(n-1)}q) dt$$

e prendere

$$M_1 = a_1 + \sum_1^{\infty} M_1^{(n)}$$

$$M_2 = a_2 + \sum_1^{\infty} M_2^{(n)}$$

$$M_3 = a_3 + \sum_1^{\infty} M_3^{(n)}.$$

Anche queste serie saranno convergenti, quando si limiti il tempo entro un intervallo conveniente.

Torino, 1 febbraio 1895.