# XIII.

# SULLA ROTAZIONE DI UN CORPO IN CUI ESISTONO SISTEMI CICLICI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, t. IV, 2° sem. 1895, pp. 93-97.

1. In una Memoria pubblicata nel volume 97 del «Giornale di Crelle» [1] HELMHOLTZ introdusse il concetto dei sistemi ciclici, il quale ha una importanza fondamentale nella teoria del calore e nella elettrodinamica, come i lavori di lui e di altri hanno dimostrato. Nell'opera postuma di HERTZ [2], in cui molte idee di HELMHOLTZ assumono forma sistematica, lo studio dei moti ciclici occupa un posto rilevante.

Le coordinate indipendenti di un sistema possono distinguersi in due categorie: quelle che non sono contenute esplicitamente nella espressione della forza viva del sistema, ma vi compariscono solo derivate rapporto al tempo, e quelle che figurano esplicitamente nella detta espressione della forza viva [3]. Le prime si chiamano le *coordinate cicliche* del sistema e le loro derivate le *intensità cicliche*, mentre le altre possono chiamarsi i *parametri* [4]. Le coordinate cicliche esistono in un sistema quando sono possibili dei moti i quali non alterano la distribuzione delle sue masse, e producono solo uno scambio ciclico delle masse fra loro; ma questo, come si riconosce facilmente, non è il solo caso in cui esse si presentano.

Quando può ritenersi con sufficiente approssimazione che la forza viva del sistema dipenda solo dalle sue intensità cicliche, allora HELMHOLTZ chiama il sistema *ciclico*, e a seconda che esiste una sola, o esistono due o più coordinate cicliche lo denomina monociclico, biciclico, policiclico.

È evidente che un sistema rigorosamente ciclico non potrà aversi se non quando i parametri saranno costanti.

2. Immaginiamo ora un sistema i cui legami non impediscano la rotazione attorno ad un punto, e che abbia un dato numero di coordinate cicliche, in modo che, scelto un certo sistema di assi girevole attorno al punto fisso, le variabili corrispondenti che ne individuano la configurazione, siano, oltre

(1) *Principien der Statik monocyklischer Systeme.* «Crelle's Journal», vol. 97, 1884, I. p. 111; II, p. 317. Vedi anche: *Studien zur Statik monocyklischer Systeme.* « Sitzb. d. Ak. d. Wiss. » zu Berlin, 1884. Vedi « Helmholtz's Wissenschaftliche Abhandlungen », III Band.

(2) *Die Prinzipien der Mechanik,* II Buch, Abschnitt 5.

(3) Il caso così detto di *ignoration of coordinates* era già stato esaminato dai sigg. THOMSON e TAIT, *Treatise on natural philosophy.* Vol. I, Part. I. Art. 319. Cambridge 1879.

(4) HERTZ chiama parametri le coordinate non cicliche solo nel caso in cui il sistema è ciclico, ma può evidentemente estendersi questa denominazione nel caso generale.

quelle stesse che determinano la posizione di questi assi, un certo numero di coordinate cicliche e di parametri. Supponiamo che il moto del sistema relativamente agli assi stessi sia individuato dai detti parametri e dalle coordinate cicliche. Noi riguarderemo questo moto relativo come il *moto interno del sistema*. Dalla ipotesi che *questo moto interno sia ciclico* non ne viene come conseguenza che il moto assoluto del sistema sia pure ciclico. Infatti la espressione della forza viva sarà costituita dalla forza viva dei moti interni, da quella di trascinamento dovuta alla rotazione degli assi, e finalmente dalla somma dei prodotti delle tre componenti della velocità angolare del sistema secondo gli assi mobili moltiplicate rispettivamente per le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni nelle medesime direzioni. Ora mentre la prima parte della forza viva conterrà solo i parametri e le intensità cicliche, e la seconda i parametri e le componenti della velocità angolare di rotazione, la terza parte dipenderà anche dalle derivate prime dei parametri, giacché questi elementi compariranno in generale nelle espressioni delle componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni.

Immaginiamo per un momento che gli assi di riferimento siano fissi ed i parametri costanti. Se il sistema sarà abbandonato alla propria inerzia, i *momenti ciclici* e quindi le *intensità cicliche* si manterranno costanti, e perciò in questo caso *il moto sarà ad un tempo adiabatico ed isociclico*.

Ammettiamo invece che gli assi siano girevoli liberamente attorno alla propria origine; supposti i parametri costanti e mantenendo costanti le intensità cicliche dei moti interni, questi si conserveranno stazionarî e perciò, se non esisterà alcuna coppia di rotazione, la questione della rotazione degli assi potrà ricondursi a quella classe di problemi che ho trattati in alcune precedenti Memorie (5) nelle quali venne calcolata l'alterazione che i moti interni stazionarî inducono sul moto di rotazione del sistema.

Riportandoci ai risultati ottenuti nelle dette Memorie può concludersi il teorema seguente: *Allorché un sistema girevole attorno ad un punto fisso non è sollecitato da alcuna coppia di rotazione ed ha nel suo interno dei moti isociclici* (*i parametri restando costanti*), *allora le componenti della rotazione sono funzioni ellittiche del tempo, ed i coseni, che gli assi d'inerzia del sistema formano con gli assi fissi, sono funzioni uniformi del tempo*.

3. Ci si può ora chiedere: *Supposti sempre costanti i parametri*, *sono necessarie delle forze affinché il moto interno si conservi isociclico*?

In altri termini: *se il sistema è abbandonato alla propria inerzia*, *i moti interni si alterano in intensità o si mantengono isociclici?*

Si può rispondere a questa domanda e dimostrare che, *almeno quando i momenti d'inerzia del sistema sono differenti fra loro*, *se il sistema è abban-*

(5) *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*. « Astr. Nachr. », Bd. 138, N. 3291-2; *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari*; *Sopra un sistema di equazioni differenziali*; *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* « Atti della R. Acc. di Torino », Anno 1894-95. *Sulle rotazioni permanenti stabili, ecc.* « Annali di Mat. », T. 23. [In questo vol.: V-IX, pp. 87-140 e XV, pp. 173-186].

*donato interamente alla propria inerzia, e si conservano costanti i parametri, i moti interni non si mantengono isociclici.* Collegando questo risultato con ciò che abbiamo detto precedentemente, si conchiude: *Come i moti interni alterano la rotazione del sistema, così questa influisce sui moti interni*, giacchè se la rotazione non esistesse, il moto sarebbe isociclico.

Vi è dunque un'azione mutua fra la rotazione del corpo ed i moti ciclici interni.

Il moto del sistema, allorché esso è abbandonato interamente alla propria inerzia, può chiamarsi un *moto adiabatico*; però, almeno in generale, *il moto ciclico interno non è adiabatico*, perché si ha che i momenti ciclici dei moti interni dipendono dalle componenti della rotazione del sistema.

Trovata una risposta alle precedenti domande, ci possiamo proporre la questione generale: *Un sistema, nel cui interno esistono moti ciclici qualunque* (ammesso sempre che i parametri siano costanti) *è abbandonato alla propria inerzia, come avviene la rotazione del sistema e con quale legge variano le sue intensità cicliche in virtù della mutua azione che fra loro esercitano questi moti?*

Il problema posto in una forma così generale sembra a primo aspetto molto complicato, giacché i moti ciclici interni possono immaginarsi in una maniera affatto arbitraria; tuttavia esso è suscettibile di una completa risoluzione, giacché può ricondursi al caso precedente per mezzo del seguente teorema:

*Un corpo avente costante la forma e la distribuzione di densità nell'interno del quale esiste un sistema ciclico i cui parametri possono ritenersi invariabili e sulle cui coordinate cicliche non agisce alcuna forza, ruota attorno ad un punto fisso, sotto l'azione di una coppia motrice, come un altro corpo nel quale esistono moti interni stazionarii e che è sollecitato dalla stessa coppia motrice. Le intensità cicliche dipendono in ogni istante dalla rotazione del corpo.*

4. Per eseguire effettivamente la risoluzione del problema non conviene però di ricondurlo al problema precedente, e quindi applicare le formule che furono date in quel caso nelle Memorie sopra citate.

È più utile invece operare direttamente sulle equazioni differenziali del problema trasformandole in altre aventi la forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(y, z)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(z, x)}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(x, y)},$$

la cui integrazione ha formato il soggetto di una mia precedente Nota (6).

Si giunge così al risultato seguente:

*Se un sistema girevole attorno ad un punto fisso e nel cui interno esistono moti ciclici* (*essendo costanti i parametri*) *è abbandonato alla propria inerzia, le componenti della rotazione e tutte le intensità cicliche sono funzioni ellittiche del tempo ed i coseni degli angoli che gli assi mobili di riferimento formano con assi fissi sono funzioni uniformi del tempo rappresentabili razionalmente mediante funzioni $\sigma$ ed esponenziali nel cui argomento il tempo entra linearmente.*

(6) *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* « Atti della R. Accad. di Torino », 1895. [In questo vol.: VIII, pp. 122–128].

*Le espressioni delle componenti $p$, $q$, $r$ della rotazione del sistema e quelle delle intensità cicliche $\omega_i$ assumono la forma*

$$p = \frac{M_1^{(1)}\sigma_1 + M_1^{(2)}\sigma_2 + M_1^{(3)}\sigma_3 + M_1^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

$$q = \frac{M_2^{(1)}\sigma_1 + M_2^{(2)}\sigma_2 + M_2^{(3)}\sigma_3 + M_2^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

$$r = \frac{M_3^{(1)}\sigma_1 + M_3^{(2)}\sigma_2 + M_3^{(3)}\sigma_3 + M_3^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

$$\omega_i = \frac{P_i^{(1)}\sigma_1 + P_i^{(2)}\sigma_2 + P_i^{(3)}\sigma_3 + P_i^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

*in cui l'argomento $u$ delle funzioni $\sigma$ si esprime mediante il tempo $t$ colla formula*

$$u = n\,(t - t_0)$$

*essendo $n$ e $t_0$ quantità costanti, l'ultima delle quali arbitraria.*

*I coefficienti* $M_i^{(s)}$, $P_i^{(s)}$ *sono quantità costanti, ed al pari di $n$ e delle costanti ellittiche si esprimono mediante le radici di una equazione del quarto grado i cui coefficienti sono funzioni razionali delle costanti meccaniche del problema.*

5. Il problema è suscettibile di una ulteriore estensione in modo da comprendere in sé il caso del moto isociclico e di quello adiabatico ora esaminato. Si può supporre, cioè, che alcune delle intensità cicliche si conservino costanti in virtù di forze agenti in corrispondenza delle coordinate cicliche stesse, e che sul sistema non siano applicate altre forze che queste, mentre i parametri si mantengono costanti.

In tale ipotesi possono determinarsi le componenti della rotazione, le intensità cicliche incognite e le dette forze come altrettante funzioni ellittiche del tempo.

Il problema che in tal modo resta risoluto è assai più complesso di quello EULERO–JACOBI di un sistema rigido, pure le stesse trascendenti, cioè le funzioni ellittiche e le funzioni Jacobiane bastano per ottenerne la soluzione; soltanto queste trascendenti compariscono nelle formule finali in maniera diversa che nella soluzione di JACOBI relativa al sistema rigido.

È evidente che i risultati enunciati nel § 3 posson trovare una applicazione nel problema della rotazione terrestre. L'esame dei moti ciclici esistenti nella terra in rapporto colla sua rotazione, può essere spinto innanzi nel senso da tener conto, oltre che dell'azione che i primi esercitano sull'altra, anche della reazione prodotta dal moto di rotazione, sui movimenti ciclici in quanto essa tende per sé, all'infuori di qualsiasi altra causa, ad alterarne le intensità.

Gli sviluppi relativi alle proposizioni enunciate in questa Nota formano il soggetto di un lavoro che verrà inserito negli « Annali di Matematica ».