XV.

SULLE ROTAZIONI PERMANENTI STABILI DI UN SISTEMA IN CUI SUSSISTONO MOTI INTERNI STAZIONARI

«Annali di Matematica», ser. 2ª, t. 23, 1895, pp. 269–285.

1. Le equazioni della rotazione di un sistema libero non soggetto a forze esterne e nel cui interno sussistono moti stazionarii hanno la forma:

$$(a)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0 \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p = 0 \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q = 0\,, \end{cases}$$

in cui A , B , C denotano i momenti costanti d'inerzia del sistema relativi ai suoi assi principali centrali d'inerzia ξ, η, ζ; m_1, m_2, m_3 sono le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni nelle direzioni ξ, η, ζ; e finalmente p, q, r sono le componenti della rotazione nelle medesime direzioni (1).

In una Memoria stampata nelle «Astronomische Nachrichten» (2) ho studiato la distribuzione degli assi di rotazione permanenti e delle corrispondenti rotazioni permanenti, rimandando ad altra occasione l'esame della stabilità dei detti assi. Poiché una tale questione è fondamentale nel problema che ci occupa, così ne darò qui la risoluzione.

2. Cominciamo dal trasformare le (a). Pongasi:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}\,[(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2] \\[2ex] f_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}\,[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]: \end{cases}$$

le (a) potranno scriversi (3):

$$(a')\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}\,, \end{cases}$$

(1) Vedi la mia Nota: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. «Atti della R. Accademia di Torino». Adunanza del 3 febbraio 1985 [in questo vol.: VI, pp. 108–112].

(2) N. 3291–2. Bd. 138 [in questo vol.: V, pp. 87–107].

(3) Cfr. la mia Nota: *Sopra un sistema di equazioni differenziali*. «Atti della R. Accademia di Torino». Adunanza 31 marzo 1895 (in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

e si riconosce immediatamente che esse ammettono i due integrali:

$$f_1 = \text{cost.} = h_1 \quad , \quad f_2 = \text{cost.} = h_2 . \tag{2}$$

Supponiamo ora che p, q, r rappresentino le coordinate di un punto mobile P; è evidente che lo studio della rotazione del sistema equivale a quello del moto di P; quindi il problema si riduce ad *esaminare il moto di un punto* P *di coordinate* p, q, r, *tale che le componenti della sua velocità nelle direzioni* ξ, η, ζ *sono espresse dalle equazioni* (a').

Considerando p, q, r come coordinate correnti, e variando h_1 e h_2 in tutti i modi possibili, le (2) rappresentano due sistemi di quadriche, e il sistema doppiamente infinito di quartiche che ne formano le intersezioni ci daranno tutte le traiettorie possibili del punto mobile P [4].

3. Esaminando le cose sotto questo aspetto, il determinare le rotazioni permanenti del sistema equivale a trovare tutte le posizioni in cui il punto P sta in quiete o, come diremo per semplicità, *sta in equilibrio*.

Ora queste posizioni si avranno dove:

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = 0 \quad , \quad \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} = 0 \quad , \quad \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} = 0 , \tag{3}$$

ossia:

$$\frac{(\partial f_1)/(\partial p)}{(\partial f_2)/(\partial p)} = \frac{(\partial f_1)/(\partial q)}{(\partial f_2)/(\partial q)} = \frac{(\partial f_1)/(\partial r)}{(\partial f_2)/(\partial r)} , \tag{3'}$$

cioè dove sono tangenti fra loro le due superficie (2). Teniamo ora presente che questi punti di contatto corrispondono ai punti doppi delle quartiche (2), onde avremo il teorema:

Le posizioni di equilibrio del punto P *saranno i punti doppi delle quartiche* $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ *ed il luogo di questi punti sarà la curva avente per equazioni le* (3').

Le (3) possono scriversi:

$$\left\{ \begin{aligned} &(C - B)\, qr + m_3\, q - m_2\, r = 0 \\ &(A - C)\, rp + m_1\, r - m_3\, p = 0 \\ &(B - A)\, pq + m_2\, p - m_1\, q = 0 , \end{aligned} \right. \tag{3'}$$

quindi *la condizione necessaria e sufficiente affinché il luogo delle posizioni di equilibrio di* P *si spezzi sarà*:

$$(B - C)(C - A)(A - B)\, m_1 m_2 m_3 = 0 . \tag{4}$$

(4) Il punto P potrebbe chiamarsi l'*indice della rotazione* per distinguerlo dal *polo di rotazione*, intendendo di denotare con questo nome la intersezione dell'asse istantaneo di rotazione coll'ellissoide d'inerzia. Fra le coordinate p, q, r di P (indice della rotazione) e quelle ξ, η, ζ del polo di rotazione passano le relazioni semplicissime:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{1}{\sqrt{2h_2}\,\sqrt[4]{ABC}} .$$

Le (3) si mettono anche sotto la forma:

(5) $$A + \frac{m_1}{p} = B + \frac{m_2}{q} = C + \frac{m_3}{r},$$

onde, chiamando λ il valore comune dei tre membri, si avrà:

(5′) $$p = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{\lambda - C}.$$

Consideriamo il caso generale in cui il luogo delle posizioni di equilibrio di P non si spezzi e perciò ammettiamo m_1, m_2, m_3 diversi da zero e $A > B > C$. Tutti i suoi punti si otterranno facendo variare λ fra $-\infty$ e $+\infty$.

La curva possiederà evidentemente tre asintoti consistenti nelle rette L_1, L_2, L_3 parallele agli assi, aventi rispettivamente per equazioni:

$$q = \frac{m_2}{A - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{A - C}$$

$$r = \frac{m_3}{B - C} \quad , \quad p = \frac{m_1}{B - A}$$

$$p = \frac{m_1}{C - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{C - B},$$

sarà quindi costituita da tre rami g_1, g_2, g_3, il primo dei quali andrà dal punto $-\infty$ di L_1 al punto $+\infty$ di L_2 e corrisponderà ad $A > \lambda > B$; il secondo andrà dal punto $-\infty$ di L_2 al punto $+\infty$ di L_3 e corrisponderà a $B > \lambda > C$; l'ultimo ramo andrà dal punto $-\infty$ di L_3 al punto $+\infty$ di L_1, passando per l'origine, e corrisponderà ai valori $\lambda > A$ oppure $\lambda < C$. La curva è quindi una *iperbola cubica*. Nella tabella contenuta nel § 8 sono indicati i vari modi nei quali essa si spezza quando la condizione (4) è soddisfatta.

Finalmente osserviamo che quando le equazioni (3′) possono ricondursi ad una sola, o sono identità, allora non si potrà più dire che esse rappresentano una curva. Questi casi si presenteranno quando saranno soddisfatte uno o più dei seguenti tre sistemi di condizioni:

(6) $$\begin{cases} C - B = m_3 = m_2 = 0 \\ A - C = m_1 = m_3 = 0 \\ B - A = m_2 = m_1 = 0. \end{cases}$$

Se uno solo dei precedenti sistemi di condizioni sarà verificato, allora il luogo delle posizioni di equilibrio di P degenererà in un piano e in una retta. Se due, e quindi tutti e tre i sistemi di condizioni precedenti si verificheranno, ossia se sarà:

$$A = B = C \quad ; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0,$$

allora tutti i punti dello spazio saranno posizioni di equilibrio di P.

4. Passiamo ora allo studio delle *posizioni di equilibrio stabile di* P. Principiamo dal darne la definizione che corrisponderà perfettamente a quella di *rotazione permanente stabile* del sistema. Diremo che una posizione P_0 di

equilibrio di P è stabile, quando preso un numero σ piccolo ad arbitrio, si potrà trovare un numero ε così piccolo, che portando P ad una distanza da P_0 minore di ε e lasciandolo quindi muovere colla legge rappresentata dalle (a'), esso nel suo moto non si allontanerà mai da P_0 più di σ.

Ciò premesso, seguendo un procedimento analogo a quello ben noto di DIRICHLET, possiamo dimostrare il teorema seguente:

Tutti i punti isolati delle quartiche (2) *saranno posizioni di equilibrio stabile di* P.

Sia P_0 uno dei detti punti isolati, e supponiamo che sostituendo in f_1 e f_2 al posto di p, q, r le coordinate p_0, q_0, r_0 di P, queste funzioni assumano i valori f_1^0, f_2^0. Si formi:

$$I = (f_1 - f_1^0)^2 + (f_2 - f_2^0)^2,$$

e consideriamo I come funzione delle coordinate correnti p, q, r. È evidente che essa sarà una funzione continua: dico inoltre che si potrà trovare un numero α tale che costruendo una sfera qualunque col centro in P_0 di raggio β inferiore ad α, il limite inferiore dei valori che assume I sulla superficie di questa sfera sarà sempre maggiore di zero.

Infatti se, per quanto piccolo si scegliesse α, mai potesse verificarsi la condizione precedente, ciò significherebbe che vicino a P_0 tanto quanto si vuole le due quadriche $f_1 = f_1^0, f_2 = f_2^0$ avrebbero dei punti di intersezione reali, e per conseguenza P_0 non sarebbe un punto isolato della quartica su cui esso giace.

Chiamiamo S la sfera di centro P_0 e di raggio α; scelto un numero σ piccolo ad arbitrio, costruiamo internamente ad S una superficie sferica di centro P_0 con un raggio inferiore a σ. Denotiamola con S' e chiamiamo η' il limite inferiore di I sopra S', il qual valore sarà diverso da zero e positivo. Ora in virtù della continuità di I si potrà costruire entro S' una sfera S'' di raggio ε con il centro in P_0, tale che il limite superiore dei valori di I in tutti i punti interni ad essa sia minore di η'. Allora se lasciamo muovere il punto P, a partire da una posizione P' interna ad S'', colla legge espressa dalle (a'), dovendosi conservare I costante durante tutto il moto avrà un valore eguale a quello iniziale e perciò inferiore ad η'. Per conseguenza P non potrà mai raggiungere la superficie S' e quindi si scosterà da P_0 sempre meno di σ. Il teorema resta così dimostrato.

5. Passiamo ora ad estenderlo, dimostrando la seguente proposizione:

Sia P_0 *un punto isolato di una quartica del sistema* (2) *e si scelga un numero* σ *piccolo ad arbitrio*; *si potranno sempre trovare due numeri* ε *ed* ε' *tali che*:

1° *alterando inizialmente* m_1, m_2, m_3, *di qualità costanti inferiori ad* ε';

2° *lasciando partire il punto* P *da una posizione distante da* P_0 *meno di* ε,

esso si conserverà durante il moto ad una distanza da P_0 *minore di* σ.

Infatti riprendiamo in esame le sfere S , S′ , S″ del paragrafo precedente. Sia η'' il limite superiore dei valori di I entro S″; avremo $\eta'' < \eta'$. Si ponga $\eta' - \eta'' = \rho$.

Per la continuità di I rispetto ad m_1, m_2, m_3, potremo trovare un numero ε' tale che, alterando i valori di m_1, m_2, m_3 meno di ε', ne risulti che i valori di I entro la sfera S variino tutti meno di $\rho/4$. Per conseguenza cangiando m_1, m_2, m_3 di quantità costanti inferiori a ε', ne risulterà che il limite inferiore dei valori di I sopra la superficie S′ sarà superiore a $\eta' - \rho/4$, e il limite superiore dei valori di I entro S″ non supererà $\eta'' + \rho/4$. Dunque, poiché $\eta'' + \rho/4 < \eta' - \rho/4$, così lasciando partire P da un punto interno ad S, durante il moto esso si manterrà internamente ad S″, il che dimostra il teorema.

Abbiamo dunque una *doppia stabilità* delle rotazioni permanenti nei punti isolati delle quartiche; *l'una relativa alle alterazioni nel moto di rotazione del sistema, l'altro alle alterazioni nei moti interni*.

6. Esaminiamo ora la proposizione reciproca a quella del § 4, e perciò escludiamo il caso che si verifichi uno o più dei sistemi di condizioni (6).

In tale ipotesi sopra ogni quadrica dei sistemi (2) non esisteranno che un numero finito di posizioni di equilibrio del punto P.

Sia P_0 una di esse e f_1^0, f_2^0 i valori che assumono f_1 e f_2 sostituendo per p, q, r i valori p^0, q^0, r^0 delle sue coordinate. Potremo costruire una sfera Σ col centro in P_0, tale che nel suo interno e sulle quadriche $f_1 = f_1^0, f_2 = f_2^0$ non si abbia che il solo punto P_0 ove P sta in equilibrio. Se ora P_0 non è un punto isolato della quartica su cui giace, dovrà esistere un ramo reale di essa che passa per il punto stesso.

Sia V P_0 una porzione di questo ramo interna a Σ e 2σ la distanza fra i punti V e P_0.

Preso un numero comunque piccolo $\varepsilon < \sigma$, chiamiamo V V′ la parte connessa di V P_0 che dista da P_0 più di $\varepsilon/2$. Poiché non esistono su V V′ punti di equilibrio, così in nessun punto di questo tratto saranno soddisfatte le (3), onde per un teorema sulle funzioni implicite potremo prendere u così piccolo che ciascun punto di V V′ disti meno di $\varepsilon/2$ da un punto d'un ramo della quartica $f_1 = f_1^0, f_2 = f_2^0 + u$ priva di punti doppii. Su questo ramo esisterà dunque un punto W′ che dista da P_0 meno di ε, e un punto W che dista più di σ. Lasciando partire P da W′ esso dovrà pervenire in W; ossia partendo ad una distanza da P_0 minore di ε giungerà ad una maggiore di σ, il che dimostra che P_0 non è una posizione di equilibrio stabile.

Abbiamo dunque la proposizione reciproca di quella del § 4, cioè *in ogni punto di equilibrio che non sia un punto isolato, l'equilibrio è instabile*. Questa proposizione reciproca è limitata per ora al caso in cui il luogo dei punti di equilibrio sia la curva (3′). Esamineremo in appresso ciò che avviene quando essa degeneri in una retta e in un piano, oppure in tutto lo spazio.

7. La iperbole cubica avente per equazioni le (3′) dà il luogo dei punti di equilibrio di P, ossia dei punti doppii delle quartiche (2). È ora impor-

tante distinguere sopra questa curva le parti su cui giacciono i *punti isolati* delle quartiche dalle parti su cui giacciono invece i *nodi*; i punti di passaggio dagli uni agli altri che corrisponderanno evidentemente a *cuspidi* delle quartiche ci daranno il *passaggio dalle rotazioni permanenti stabili a quelle instabili del sistema e viceversa*. Un tale studio può eseguirsi con grande facilità mediante le considerazioni seguenti.

Ammettiamo da principio che la cubica non si spezzi ossia si abbia $A > B > C$ ed m_1, m_2, m_3 diverse da zero. Differenziamo successivamente due volte le (2). Avremo:

$$(7)\qquad \begin{cases} Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr = 0 \\ A(Ap + m_1)\,dp + B(Bq + m_2)\,dq + C(Cr + m_3)\,dr = 0 \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} A dp^2 + B dq^2 + C dr^2 + (Ap\,d^2p + Bq\,d^2q + Cr\,d^2r) = 0 \\ A^2 dp^2 + B^2 dq^2 + C^2 dr^2 + (A(Ap + m_1)\,d^2p + B(Bq + m_1)\,d^2q \\ \qquad + C(Cr + m_3)\,d^2r) = 0 . \end{cases}$$

In virtù delle (5'), moltiplicando la prima delle (8) per λ e sottraendovi quindi la seconda, risulterà:

$$A(\lambda - A)\,dp^2 + B(\lambda - B)\,dq^2 + C(\lambda - C)\,dr^2 = 0 .$$

Siccome, in causa delle (5), le (7) sono fra loro equivalenti, così basterà esaminare le due equazioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} A(\lambda - A)\,dp^2 + B(\lambda - B)\,dq^2 + C(\lambda - C)\,dr^2 = 0 \\ Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr = 0 . \end{cases}$$

Eliminando dr, otterremo:

$$A[Cr^2(\lambda - A) + Ap^2(\lambda - C)]\,dp^2 + B[Cr^2(\lambda - B) + Bq^2(\lambda - C)]\,dq^2 \\ + 2AB(\lambda - C)\,pq\,dp\,dq = 0 .$$

Sostituiamo in luogo di p, q, r i valori (5'); l'equazione precedente diverrà:

$$A\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - A)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Am_1^2(\lambda - C)}{(\lambda - A)^2}\right]dp^2 + B\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - B)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Bm_2^2(\lambda - C)}{(\lambda - B)^2}\right]dq^2 \\ + 2\,\frac{ABm_1 m_2(\lambda - C)}{(\lambda - A)(\lambda - B)}\,dp\,dq = 0 .$$

Evidentemente i valori di λ per cui il primo membro sarà una *forma definita* corrisponderanno ai *punti isolati*; mentre quelli per cui *la forma* non sarà *definita* corrisponderanno ai *nodi*. Basterà dunque esaminare il segno del discriminante della forma stessa.

Calcolando questo discriminante e dividendolo per $ABC/(\lambda - C)^2$, che è una quantità sempre positiva, otterremo:

$$(10)\qquad \Delta = (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left\{\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right\}.$$

Il fattore esterno $(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)$ cambia segno quando λ passa per A, B, C; ma evidentemente per questi valori di λ, la Δ non muta segno; dunque basterà preoccuparsi dei cambiamenti di segno del fattore:

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}.$$

Facendo crescere λ, ciascuno dei termini è decrescente, dunque avverranno due soli cambiamenti di segno mentre λ varia da C a B in cui il trinomio precedente passa da $+\infty$ a $-\infty$, e mentre λ varia da B ad A in cui pure il trinomio passa da $+\infty$ a $-\infty$; mentre si conserva sempre negativo per $\lambda < C$, e positivo per $\lambda < A$.

Ne segue che Δ è positivo lungo il ramo g_3 e in due tratti dei rami g_1, g_2 adiacenti rispettivamente ai punti all'∞ di L_1 ed L_2; mentre è negativo nei tratti rimanenti di g_1 e g_2, adiacenti al punto all'∞ di L_2. *I punti di passaggio da un tratto all'altro, ossia dalle rotazioni stabili a quelle instabili, corrispondono alle due radici reali dell'equazione*:

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3} = 0, \tag{11}$$

comprese rispettivamente fra A *e* B *e fra* B *e* C. Osserviamo che l'equazione precedente può scriversi, tenendo presenti le (5'):

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr\} = df_2 = \frac{1}{\lambda}\,df_1 = 0\,;$$

ciò dimostra che *nei punti di passaggio suddetto la iperbola cubica è tangente alle due quadriche dei sistemi* (2) *che si toccano fra loro nel punto stesso.*

8. Lo stesso procedimento ora seguito quando la iperbole cubica non si spezza, ossia la (4) non è soddisfatta, può applicarsi ad esaminare i diversi casi particolari che si presentano allorché si annulla qualche fattore del prodotto (4) senza che siano verificate contemporaneamente uno o più dei sistemi di condizioni (6). I calcoli relativi non presentano difficoltà e si ripetono uniformemente, così noi li sopprimiamo, riportando solo la tabella seguente che ne riassume i risultati [5],

I. *Caso* $\left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$

la cubica si spezza in:

iperbola $p = 0\,,\ q = \dfrac{m_2}{\lambda - B}\,,\ r = \dfrac{m_3}{\lambda - C}$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ compresa fra A e } \dfrac{C\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Cm_3^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Cm_3^2}} \quad \textit{rotazioni instabili.} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti } \textbf{\textit{rot. stabili}} \end{array}\right.$

(5) Cfr. la Memoria delle «Astr. Nachr.» [in questo vol.: V, pp. 87–107], Art. II, § 4 e Art. III, § 3.

retta $q = \dfrac{m_2}{A-B}$, $r = \dfrac{m_3}{A-C}$ . . . . *rot. stabili.*

$$\text{II. } \textit{Caso} \quad \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$$

la cubica si spezza in:

iperbola $p = \dfrac{m_1}{\lambda - A}$, $q = 0$, $r = \dfrac{m_3}{\lambda - C}$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ compresa fra B e } \dfrac{A\sqrt[3]{Cm_3^2}+C\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Cm_3^2}+\sqrt[3]{Am_1^2}} \quad \textit{rotazioni instabili} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti } \textit{rot. stabili} \end{array}\right.$

retta $p = \dfrac{m_1}{B-A}$, $r = \dfrac{m_3}{B-C}$ . . . . *rot. instabili*

$$\text{III. } \textit{Caso} \quad \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $q = 0$ $\left\{\begin{array}{l} r \text{ compresa fra } \dfrac{m_3}{A-C} \text{ e } \dfrac{m_3}{B-C} \text{ . . . . } \textit{rot. instabili} \\ r \text{ non compresa fra i limiti precedenti . . . . } \textit{rotaz. stabili} \end{array}\right.$

retta $q = 0$, $r = \dfrac{m_3}{A-C}$ . . . . *rotaz. stabili*

retta $p = 0$, $r = \dfrac{m_3}{B-C}$ . . . . *rot. instabili.*

$$\text{IV. } \textit{Caso} \quad \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 = 0 \end{array}\right.$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $r = 0$ $\left\{\begin{array}{l} q \text{ compresa fra } \dfrac{m_2}{A-B} \text{ e } \dfrac{m_2}{C-B} \text{ . . . . . . } \textit{rotaz. stabili} \\ q \text{ non compresa fra i limiti precedenti . . . . } \textit{rot. instabili} \end{array}\right.$

retta $q = \dfrac{m_2}{A-B}$, $r = 0$ . . . . *rotaz. stabili*

retta $p = 0$, $q = \dfrac{m_2}{C-B}$ . . . . *rotaz. stabili.*

$$\text{V. } \textit{Caso} \quad \left\{\begin{array}{l} A > B > C \\ m_1 = m_2 = m_3 = 0 \end{array}\right. \quad \text{(Caso di EULERO)}$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $q = 0$ . . . . *rotaz. stabili* retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotaz. stabili*

retta $r = 0$, $p = 0$ . . . . *rot. instabili*

$$\text{VI. } \textit{Caso}^{(6)}\ A \gtrless B = C \quad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

la cubica si spezza in:

iperbola $p = \dfrac{m_1}{\lambda - A}$, $q = \dfrac{m_2}{\lambda - B}$, $r = 0$ $\begin{cases} \lambda \text{ compresa fra B e } \dfrac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \ \textit{rotazioni instabili} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti } \textit{rot. stab.} \end{cases}$

retta $p = \dfrac{m_1}{B - A}$, $q = \infty$.

$$\text{VII. } \textit{Caso}\ A \gtrless B = C \quad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0^{(7)} \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $r = 0$ $\begin{cases} q > \dfrac{m_2}{A - B} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \textit{rotazioni instabili} \\ q < \dfrac{m_2}{A - B} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \textit{rotazioni stabili} \end{cases}$

retta $q = \dfrac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotazioni stabili*

retta $p = 0$, $q = \infty$.

9. Esaminiamo ora i casi in cui il luogo dei punti di equilibrio di P degeneri in un piano ed in una retta.

$$\text{I. } \textit{Caso}\ A \gtrless B = C \quad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \quad \text{oppure} \quad m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

il luogo dei punti di equilibrio di P degenera in:

retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotazioni stabili*

piano $p = \dfrac{m_1}{A - B}$ (q ed r qualunque) . . . . *rotazioni instabili.*

(6) Quando sia $A \gtrless B = C$, possiamo scegliere sempre gli assi d'inerzia in modo che risulti $m_3 = 0$.

(7) In questo caso si è supposto (il che è sempre possibile) di scegliere le direzioni degli assi in modo che m_2 e $A - B$ siano dello stesso segno.

$$\text{II. } \textit{Caso } A = B = C \quad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

il luogo dei punti di equilibrio di P degenera in:

retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotazioni stabili*
piano $p = \infty$.

Per dimostrare nel primo caso che le rotazioni corrispondenti a $p = m_1/(B - A)$ e q ed r qualunque sono *instabili* non si può più applicare il teorema del § 6. Si osservi che in questo caso le intersezioni delle quadriche $f_2 = h_2$, $f_1 = h_1$ divengono una coppia di cerchi. I punti doppi corrispondono al caso in cui questi due cerchi coincidono, ed allora le due quadriche sono tangenti fra loro lungo il cerchio doppio. Tutti i cerchi di intersezione e di contatto delle quadriche $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ hanno il centro sull'asse comune di simmetria delle due quadriche e giacciono in piani ad esso perpendicolari. Il punto P sta in equilibrio in tutti i punti di uno qualunque dei cerchi doppi, i quali appartengono tutti al piano $p = m_1/(B - A)$; ma vicino quanto si vuole ad uno qualunque di essi esistono delle coppie di cerchi semplici, ciascuno dei quali viene percorso dal punto P con velocità costante: basta questa osservazione per rendere manifesta la instabilità dell'equilibrio di P nei punti del piano $p = m_1/(B - A)$, e quindi la instabilità delle corrispondenti rotazioni permanenti. *Il teorema del* § 6 *è dunque estensibile anche a questo caso precedentemente escluso.*

10. Resta da considerare il caso in cui siano soddisfatti tutti e tre i sistemi di condizioni (6), cioè sia $A = B = C$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. In questo caso P sta in equilibrio in ogni punto dello spazio, e quindi possiamo concludere immediatamente che tali posizioni di equilibrio sono stabili.

Però è facile riconoscere che in questo caso non si ha la stabilità riguardo ad alterazioni dei moti interni. Infatti, supposto di scegliere gli assi tali che sia $p \gtrless 0$, $q = 0$, $r = 0$, basterà prendere $m_1 = 0$, $m_2 \gtrless 0$, $m_3 = 0$, e per quanto piccolo sia m_2 in valore assoluto, la traiettoria di P risulterà sempre un cerchio situato nel piano $q = 0$ con il centro nell'origine e di raggio p. Quindi in questo caso le rotazioni sono *stabili* riguardo ad alterazioni nelle rotazioni stesse, ed *instabili* riguardo ai moti interni.

Così resta completata la trattazione di tutti i diversi casi che possono presentarsi e distinte in ciascuno di essi le rotazioni stabili da quelle instabili.

11. Diamo una semplice applicazione del teorema del § 5. Suppongasi $A > B > C$, $m_1 = m_2 = m_3$; siamo allora nel caso V del § 8. Possiamo quindi concludere immediatamente che quando la grandezza delle coppia di quantità di moto dei movimenti interni sarà sufficientemente piccola, prendendo la posizione iniziale del polo di rotazione abbastanza prossima all'estremità

dell'asse d'inerzia di momento massimo (o a quella dell'asse di momento minimo) la corrispondente polodia si conserverà prossima tanto quanto si vuole al polo d'inerzia.

12. La teoria svolta in questa Memoria sulla stabilità delle rotazioni permanenti ci conduce ad una osservazione, che credo non priva di interesse. *Noi possiamo vedere eseguire delle piccole oscillazioni al polo di rotazione di un sistema attorno ad una certa posizione, senza che il sistema cambi di forma, né si alteri in esso la distribuzione delle masse; ma non per questo sarà lecito concluderne che il punto intorno a cui oscilla il polo di rotazione sia un polo d'inerzia.* Basterà infatti che non possa escludersi la esistenza di moti interni stazionarii nel sistema, perché il punto intorno a cui oscilla il polo di rotazione anziché un polo d'inerzia sia la intersezione dell'ellissoide di inerzia col raggio vettore che va ad un punto isolato delle quartiche che abbiamo precedentemente esaminate. (Vedi 2ª Nota del § 2).

Procediamo ora allo studio delle piccole vibrazioni di P intorno alle sue posizioni di equilibrio stabile. A tal fine supponiamo dapprima che la cubica (3) non si spezzi, ed in questa ipotesi chiamando λ_1 e λ_2 le due radici reali dell'equazione (11) prendiamo λ non compreso in questo intervallo. Allora (vedi (5')):

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r_0 = \frac{m_3}{\lambda - C} , \tag{12}$$

corrisponderanno ad una posizione di equilibrio stabile di P, ossia ad una rotazione permanente stabile del sistema.

Si ponga:

$$p = p_0 + \tilde{\omega} \quad , \quad q = q_0 + \chi \quad , \quad r = r_0 + \rho ,$$

e consideriamo $\tilde{\omega}$, χ, ρ come piccolissime, in modo da poter trascurare le loro potenze superiori alla prima come si suol fare nella teoria dei piccoli movimenti; allora poiché i valori costanti p_0, q_0, r_0 soddisfano le (3') otterremo che le (*a*) si trasformeranno nelle:

$$\left\{\begin{aligned} & A\frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \frac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C}\chi - \frac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B}\rho = 0 \\ & B\frac{d\chi}{dt} + \frac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A}\rho - \frac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C}\tilde{\omega} = 0 \\ & C\frac{d\rho}{dt} + \frac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B}\tilde{\omega} - \frac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A}\chi = 0 . \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Per integrare queste equazioni lineari, si ponga:

$$\tilde{\omega} = ae^{zt} \quad , \quad \chi = be^{zt} \quad , \quad \rho = ce^{zt} ,$$

con a, b, c, z costanti; avremo allora dalla nota teoria delle equazioni differenziali lineari che z sarà radice della equazione:

$$\begin{vmatrix} Az & , & \frac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C} & , & -\frac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B} \\ -\frac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C} & , & Bz & , & \frac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A} \\ \frac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B} & , & -\frac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A} & , & Cz \end{vmatrix} = 0,$$

che sviluppata diviene:

$$ABCz^3 + (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right] z = 0,$$

da cui si ricava:

$$z = 0 \quad , \quad z = \pm i \sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}.$$

Le due radici di z diverse da zero sono immaginarie, per l'ipotesi fatta riguardo a λ; quindi il periodo di vibrazione di P intorno alla posizione di equilibrio stabile, sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{mB_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}}.$$

Variando λ entro i limiti stabiliti, *la formula precedente ci darà i periodi con i quali il polo di rotazione può vibrare attorno alle sue posizioni di equilibrio stabile*.

Moltiplicando rispettivamente le (13) per $\frac{m_1}{\lambda - A}, \frac{m_2}{\lambda - B}, \frac{m_3}{\lambda - C}$ sommando e integrando si ottiene:

$$(14) \qquad \frac{Am_1}{\lambda - A}\tilde{\omega} + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\chi + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\rho = \text{cost.},$$

e moltiplicandole per $(\lambda - A)\,\tilde{\omega}$, $(\lambda - B)\,\chi$, $(\lambda - C)\,\rho$, sommando e integrando abbiamo:

$$(15) \qquad A(\lambda - A)\tilde{\omega}^2 + B(\lambda - B)\chi^2 + C(\lambda - C)\rho^2 = \text{cost.}$$

Questi due integrali esprimono (cfr. form. (12) e § 7) che il moto di P ha luogo secondo una ellisse situata nel piano (14), cioè nel piano parallelo a quello comune tangente alle quadriche (2) nel punto (p_0, q_0, r_0) di equilibrio stabile.

Non staremo ad esaminare i varii casi particolari che possono presentarsi, la cui trattazione non presenta nessuna difficoltà fondandosi sopra i risultati precedentemente stabiliti.

Considereremo soltanto il caso in cui due momenti d'inerzia sono eguali, il terzo essendo differente, cioè:

$$A \gtrless B = C.$$

Allora possiamo scegliere gli assi d'inerzia in modo da rendere $m_3 = 0$, onde applicando ciò che abbiamo ottenuto nel caso VI del § 8, le rotazioni stabili risulteranno date da:

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A}\ , \quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B}\ , \quad r_0 = 0\,,$$

in cui λ non è compreso fra:

$$B \quad e \quad \frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}}.$$

Quindi i periodi di vibrazione del polo di rotazione attorno alle sue posizioni stabili saranno dati da:

$$T = \frac{2\pi B}{(\lambda - B)\sqrt{\frac{\lambda - A}{A}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3}\right]}} = \frac{2\pi}{\frac{m_2}{Bq_0}\sqrt{\frac{m_1}{Ap_0}\left[\frac{Ap_0^3}{m_1} + \frac{Bq_0^3}{m_2}\right]}}.$$

Quando non esistono moti interni vi è una sola posizione stabile del polo di rotazione (Caso I, § 9) corrispondente a $p = p_0$, $q = r = 0$, ed il periodo di vibrazione del polo attorno ad esso è il periodo euleriano $\frac{2\pi B}{(B - A)p_0}$. I moti interni dunque, oltre a dar luogo ad infinite posizioni stabili del polo, alterano anche il periodo euleriano rendendolo suscettibile di assumere i valori dati dalla formula precedente.

Torino, 2 luglio 1895.

NOTA ALLA PRECEDENTE MEMORIA

Avendo comunicato al mio amico prof. SEGRE i risultati contenuti nella precedente Memoria, questi fece a proposito delle proposizioni contenute nel § 7, alcune eleganti considerazioni geometriche, che, dietro suo permesso, sono lieto di potere render note testualmente in ciò che segue:

« I sistemi di quadriche:

$$(2) \qquad f_1 = \text{cost.}, \quad f_2 = \text{cost.},$$

sono fasci appartenenti ad una stessa *rete* di quadriche, la quale è caratterizzata dal contenere come quadrica degenere un *piano doppio*, il piano all'infinito; cosicché le ∞^2 quadriche della rete si posson raggruppare in ∞^1 fasci (schiere) di quadriche concentriche e omotetiche, tra cui sono appunto i due fasci (2). Ne segue che il luogo dei punti di contatto delle quadriche di questi fasci, cioè il luogo dei vertici dei coni quadrici della rete, ossia la *curva Jacobiana* della rete, è pure il luogo dei poli di quel piano rispetto alle quadriche della rete, cioè dei centri di queste quadriche. Quel luogo è dunque una cubica.

« La proposizione con cui finisce il § 7 rientra in una più generale relativa alla curva Jacobiana di una rete qualunque di superficie: la tangente a questa curva in un suo punto P è polare del piano che ivi è toccato dalle superficie generiche della rete passanti per P, rispetto al cono quadrico tangente in P a quella particolare fra le dette superficie che ha ivi un punto doppio. Non so se questa proposizione sia nota: in ogni modo la si dimostra facilmente con procedimenti già adoperati per proposizioni analoghe. Da essa segue che se P è un punto di contatto *stazionario* per superficie della rete, cioè tale che la curva comune a queste abbia ivi una cuspide, la tangente in P a questa curva è anche la tangente in P alla curva Jacobiana. E come caso particolare per la rete attuale si ritrova (è si completa) la proposizione finale del § 7: la quale poi, mediante le equazioni (2) e (5'), ricondurrebbe subito all'equazione in λ che determina le cuspidi di quartiche della rete.

« La rete di quadriche ha 4 punti base, situati nel piano all'infinito, ed in essi rispettivamente 4 tangenti fisse (esterne a quel piano). Per ipotesi nella rete vi sono degli ellissoidi (2). Ne segue che quei 4 punti base sono due coppie di punti imaginari coniugati aa', bb'. Fra gli ∞^1 fasci di quadriche concentriche che compongono la rete, ognun dei quali dà sul piano all'infinito una determinata conica del fascio $aa'\ bb'$, ve ne sono tre, *reali*, che dànno sul piano all'infinito rispettivamente: la coppia di rette reali aa', bb'; la coppia di rette immaginarie coniugate ab, $a'b'$; la coppia di rette imaginarie coniugate ab', $a'b$. Il 1° fascio sarà di paraboloidi iperbolici, il 2° ed il 3° di paraboloidi ellittici. I punti doppi, tutti tre reali, di quelle tre coppie di rette saranno i punti all'infinito della nostra cubica. Il ramo infinito di questa che va dal 2° al 3° punto sarà tutto composto di centri di ellissoidi della rete, mentre sugli altri due rami infiniti della cubica si avranno centri d'iperboloidi. Se un punto P è centro di ellissoidi della rete, esso è isolato sulla quartica base del fascio di quadriche passanti per P, giacché le tangenti in esso alla quartica devono stare nel cono della rete che ha il centro in P e che sarà imaginario (ellissoide ridotto ad un sol punto reale). Per conseguenza sul primo ramo della cubica non vi sarà alcun punto reale che sia cuspide di quartiche della rete. – Volendo risolvere *geometricamente*, in modo completo, la questione di vedere quante fra le 6 cuspidi di quartiche della rete siano reali, si potranno forse adoperare gli ultimi ragionamenti, ulteriormente proseguiti. Ma un'altra via, assai naturale, consiste nel rappresentare (al modo di HESSE) le ∞^2 quadriche della rete coi punti di un piano, e quindi gli ∞^1 coni coi punti di una quartica γ^4. Si vede allora che questa curva avrà nel caso attuale un punto triplo, corrispondente al piano doppio che fa parte della rete. Le tangenti in quel punto triplo sono 3 rette reali e distinte, perché corrispondono ai 3 fasci reali testé considerati di paraboloidi della rete. Inoltre le 4 tangenti doppie di γ^4 sono tutte imaginarie, perché corrispondono ai fasci di quadriche della rete passanti rispettivamente per le 4 tangenti fisse (imaginarie) in a, a', b, b'. Si può allora verificare che delle 6 tangenti stazionarie (flessi) di γ^4 solo 2 saranno reali: o ricorrendo ai lavori speciali relativi alle forme reali delle quartiche piane; oppure ricorrendo alla nota formola generale del KLEIN (« Math. Annalen », vol. 10, 1876, p. 199), la quale, applicata ad una curva del 4° ordine (deformata di γ^4) con tre nodi, e nessuna tangente doppia reale isolata, dà $w' = 2$ come numero dei flessi reali. Ora le tangenti stazionarie di γ^4 corrispondono a quei fasci della rete di quadriche i quali hanno contatti stazionarii: ossia a punti della cubica che sono cuspidi per quartiche della rete. Dunque si ritrova che fra quei 6 punti solo 2 sono reali ».