XVIII.

SULLA INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Nota I.

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXXI, 1896, pp. 311–323.

1. Sebbene spesso accada nelle applicazioni di esser condotti a delle inversioni di integrali definiti nel campo reale, pure, che io sappia, non si ha alcun mezzo sistematico per effettuare tali inversioni (che si sanno eseguire solo in casi particolari) e nemmeno si ha un indizio per riconoscere in generale quando questioni di tale natura sono suscettibili di soluzione, e, allorché questo avviene, se ve ne è una sola o se ve ne sono più. Sotto questo aspetto la questione appare molto meno avanzata di altre di analisi in cui esistono criteri ben definiti per giudicare sulla esistenza e sulla univocità delle soluzioni [1].

In ciò che segue mi propongo di portare un piccolo contributo allo studio suddetto, comunicando alcuni risultati di cui sono in possesso già da qualche tempo, e limitandomi a considerare per ora il caso più semplice in cui può rispondersi in modo completo a tutte le parti sopra ricordate della questione.

Sulla *forma* delle funzioni che compariscono nel problema non pongo alcuna restrizione: alcune condizioni pongo relative all'esser esse finite ed alla loro continuità e derivabilità. Una condizione però si aggiunge relativa al non annullarsi di certi valori, che è essenziale, e sulla discussione della

(1) Il dott. LEVI-CIVITA in una Nota letta in questa Accademia nella seduta del 17 novembre u. s., prendendo occasione dalla risoluzione di alcuni casi interessanti, lamenta egli pure la mancanza di uno studio sistematico sulla questione. I lavori a mia cognizione sull'argomento, oltre questo ora citato, sono i seguenti:

ABEL, *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.* (Œuvres, p. 11);

ABEL, *Résolution d'un problème de mécanique.* (Œuvres, p. 97);

BELTRAMI, *Intorno ad un teorema d'Abel.* («Rend. Ist. Lombardo», ser. II, vol. XIII).

BELTRAMI, *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi.* («Mem. Acc. di Bologna», ser. IV, T. I). — *Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica* (Ibid., ser. IV, T. IV).

DINI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in certi intervalli* (Cap. VII. «Annali delle Università Toscane», T. XVII).

SONINE, *Sur la généralisation d'une formule d'Abel.* («Acta Mathematica», T. IV).

SONINE, *Recherches sur les fonctions cylindriques.* («Math. Ann.,» Bd., XVI).

VOLTERRA, *Sopra un problema di elettrostatica.* («Transunti Acc. Lincei», ser. III, vol. VIII). [In queste «Opere»: vol. primo, XI, pp. 188–195].

Nel campo complesso cito fra gli altri i lavori del prof. PINCHERLE.

quale mi trattengo alquanto mostrandone la ragione d'essere e l'intima sua connessione con notissime teorie elementari.

2. Per maggior chiarezza riassumo i risultati nel seguente:

TEOREMA. – *Se si ha (nel campo reale) la equazione funzionale*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx \tag{1}$$

in cui $f(y)$ e $f'(y)$ si mantengono finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + A$; e $H(x, y)$ e $\partial H/\partial y = H_2(x, y)$, sono pure finite e continue per tutti i valori di x e y compresi entro i limiti α e $\alpha + A$, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $h(y) = H(y, y)$ per y compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa l'equazione funzionale per y compreso fra α e $\alpha + A$, la quale sarà data da

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y f'(x) \sum_0^\infty {}_i\, S_i(x, y)\, dx \tag{2}$$

in cui

$$\left\{ \begin{aligned} S_i(x, y) &= \int_y^x S_0(\xi, y)\, S_{i-1}(x, \xi)\, d\xi \\ S_0(x, y) &= \frac{H_2(x, y)}{h(x)}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

DIMOSTRAZIONE. – 1° Cominciamo dal dimostrare che la serie

$$\sum_0^\infty {}_i\, S_i(x, y) \tag{4}$$

è convergente in egual grado per tutti i valori di x, y compresi fra α e $\alpha + A$.

Se M_2 è il limite superiore dei valori assoluti di $H_2(x, y)$ per x, y compresi fra α e $\alpha + A$, e m il limite inferiore dei valori assoluti di $h(y)$, dico che

$$|S_i| \leq \left(\frac{M_2}{m}\right)^{i+1} \frac{1}{i!} (|y - x|)^i \leq \left(\frac{M_2}{m}\right)^{i+1} \frac{1}{i!} |A|^i. \tag{5}$$

Abbiamo infatti

$$S_0 \leq \frac{M_2}{m}$$

e se la (5) è soddisfatta per un valore i, lo sarà anche per $i + 1$. La serie è dunque convergente in egual grado.

2° Proviamo che $\varphi(y)$ data dalla (2) verifica l'equazione funzionale (1).

Infatti dalla (2) segue

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx = \int_\alpha^y \frac{f'(x)}{h(x)} H(x, y)\, dx - \int_\alpha^y \frac{H(\xi, y)}{h(\xi)} d\xi \int_\alpha^\xi f'(x) \sum_0^\infty {}_i\, S_i(x, \xi)\, dx$$

e, applicando il principio di DIRICHLET, avremo

$$(1') \qquad \int_\alpha^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx = \int_\alpha^y f'(x)\left\{\frac{\mathrm{H}(x,y)}{h(x)} - \int_\alpha^x \frac{\mathrm{H}(\xi,y)}{h(\xi)}\sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi\right\}dx.$$

Si consideri ora la funzione

$$\frac{\mathrm{H}(x,y)}{h(x)} - \int_x^y \frac{\mathrm{H}(\xi,y)}{h(\xi)}\sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi = \mathrm{G}(x,y);$$

avremo

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} = \frac{\mathrm{H}_2(x,y)}{h(x)} - \sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,y) - \int_x^y \frac{\mathrm{H}_2(\xi,y)}{h(\xi)}\sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi$$

$$= \mathrm{S}_0(x,y) - \sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,y) + \int_y^x \mathrm{S}_0(\xi,y)\sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi$$

e a cagione della convergenza in egual grado della serie (4)

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} = \mathrm{S}_0(x,y) - \sum_0^\infty {}_i\,\mathrm{S}_i(x,y) + \sum_0^\infty {}_i\int_y^x \mathrm{S}_0(\xi,y)\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi = 0.$$

Ma se in G noi facciamo $y = x$, otteniamo l'unità, quindi possiamo concludere che si avrà sempre

$$\mathrm{G} = 1$$

e perciò, ritornando alla equazione (1'), otterremo

$$(1'') \qquad \int_\alpha^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx = \int_\alpha^y f'(x) = f(y) - f(\alpha).$$

La $\varphi(y)$ ricavata dalla (2) soddisfa dunque la (1).

3° Dimostriamo finalmente che non vi può essere che una sola funzione finita e continua φ che soddisfi l'equazione funzionale.

Ammettiamo che ne esistano due φ_1 e φ_2, ciascuna delle quali sia in valore assoluto inferiore a P.

Posto

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

avremo

$$0 = \int_\alpha^y \psi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx$$

e derivando rapporto a y

$$0 = \psi(y)\,h(y) + \int_\alpha^y \psi(x)\,\mathrm{H}_2(x,y)\,dx,$$

onde

$$\psi(y) = -\frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y \psi(x)\, H_2(x, y)\, dx \tag{6}$$

e per conseguenza

$$\psi(y) = \frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y \frac{H_2(x, y)}{h(x)} dx \cdot \int_\alpha^x \psi(x_1)\, H_2(x_1, x)\, dx_1$$

$$= -\frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y \frac{H_2(x, y)}{h(x)} dx \int_\alpha^x \frac{H_2(x_1, x)}{h(x_1)} dx_1 \int_\alpha^{x_1} \psi(x_2)\, H_2(x_2, x_1)\, dx_2 = \cdots$$

e così di seguito si potrà procedere indefinitamente sostituendo successivamente per ψ la espressione che risulta dalla (6). Ora

$$|\psi(x)| < 2\,P,$$

quindi dalle equazioni precedenti si deduce

$$|\psi(y)| < 2\,P\left(\frac{M_2}{m}\right)^n \int_\alpha^{x+|A|} dx \int_\alpha^{x} dx_1 \cdots \int_\alpha^{x_{n-2}} dx_{n-1} = 2\,P\left(\frac{M_2}{m}\right)^n \frac{1}{n!}(|A|)^n$$

in cui n può prendersi tanto grande quanto si vuole. Ne segue che $|\psi(y)|$ è inferiore ad ogni valore assegnabile, perciò deve essere

$$\psi(x) = 0$$

e quindi

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

il che dimostra la univocità della soluzione.

Il teorema resta così dimostrato.

3. Il risultato a cui siamo giunti è molto semplice ed ottenuto senza artifici di calcolo. Possiamo facilmente comprenderne la ragione. Se si prescinde infatti dalle condizioni di continuità e derivabilità poste per le funzioni e da quella di esser finite, si trova come condizione essenziale che $H(y, y) = h(y)$ non si annulli per y compreso nell'intervallo α, $\alpha + A$. Ora questa condizione può paragonarsi facilmente a quella che un determinante, i cui elementi a destra della diagonale sono nulli, è diverso da zero, allorché i termini in diagonale sono tutti diversi da zero. Infatti si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_{11} x_1 \\
b_2 &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \\
b_3 &= a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_n &= a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + a_{3n} x_3 + \cdots + a_{nn} x_n ;
\end{aligned}$$

il concetto di integrale ci porta facilmente a riguardare la questione di analisi funzionale rappresentata dalla (1) come un caso limite della risoluzione di un sistema d'equazioni analogo al precedente. In esso le a_{is} e le a_{ii} sarebbero le analoghe delle $H(x, y)$ e delle $H(y, y) = h(y)$.

Ora il determinante dei coefficienti nelle precedenti equazioni ha nulli tutti gli elementi situati alla destra della diagonale ed è quindi diverso da zero quando nessuna delle a_{ii} si annulla, e quando ciò si verifica la soluzione del sistema è possibile ed univoca.

L'analogia però si arresta qui, perché mentre la condizione che le a_{ii} siano tutte diverse da zero non solo è sufficiente, ma è anche necessaria per la risolubilità e la univocità delle soluzioni, lo stesso non può dirsi del non annullarsi di $h(y)$. Si osservi infatti, per esempio, che, ammesso $h(y) = 0$ per tutti i valori di y compresi fra α e $\alpha + A$, la equazione funzionale (1) può scriversi mediante una integrazione per parti

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \Phi(x) H_1(x, y)\, dx$$

in cui

$$\Phi(x) = -\int_\alpha^x \varphi(x)\, dx \quad , \quad H_1 = \frac{\partial H}{\partial x} \, .$$

Quindi se $H_1(x, y)$ avrà le stesse proprietà che prima avevamo posto per $H(x, y)$, e sarà $f'(\alpha) = 0$, si potrà determinare univocamente la $\Phi(x)$ e quindi con una derivazione successiva $\varphi(x)$ quando questa derivazione può effettuarsi.

4. I termini della serie (4) godono di una notevole proprietà che può esprimersi col teorema seguente:

Comunque si scelga j compreso fra 1 *e* i, *avremo:*

$$S_i = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi \, . \tag{7}$$

Questa proprietà è evidente per $i = 1$. Mostriamo che se è vera per i vale anche per $i + 1$. Infatti

$$S_{i+1} = \int_y^x S_0(\xi, y) S_i(x, \xi)\, d\xi = \int_y^x S_0(\xi, y)\, d\xi \int_\xi^x S_{i-j}(x, \xi_1) S_{j-1}(\xi_1, \xi)\, d\xi_1$$

$$= \int_y^x S_{i-j}(x, \xi_1)\, d\xi_1 \int_y^{\xi_1} S_0(\xi, y) S_{j-1}(\xi_1, \xi)\, d\xi = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi_1) S_j(\xi_1, y)\, d\xi_1 ;$$

il teorema è quindi dimostrato.

Ne possiamo concludere:

La formula di inversione della

$$f(y)-f(\alpha)=\int_\alpha^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x\,,y)\,dx$$

è

$$\varphi(y)=\frac{f'(y)}{h(y)}-\frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y f'(x)\,\mathrm{K}(x\,,y)\,dx$$

in cui

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned} &h(y)=\mathrm{H}(y\,,y)\\ &\mathrm{K}(x\,,y)=\sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x\,,y)\\ &\mathrm{S}_0(x\,,y)=\frac{1}{h(x)}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}\\ &\mathrm{S}_i(x\,,y)=\int_y^x \mathrm{S}_{i-j}(x\,,\xi)\,\mathrm{S}_{j-1}(\xi\,,y)\,d\xi\,.\end{aligned}\right.$$

5. Come esempio consideriamo il caso in cui si abbia

$$\mathrm{H}(x\,,y)=\mathrm{F}(\lambda(x)-\lambda(y))$$

e supponiamo $\mathrm{F}(0)=1$, al qual caso si ridurrà sempre quello in cui $\mathrm{F}(0)$ ha un valore finito diverso da zero.

Poniamo

$$\left\{\begin{aligned} &s_0(z)=\mathrm{F}'(z)\\ &s_i(z)=\int_0^z s_{i-j}(z-u)\,s_{j-i}(u)\,du\,;\end{aligned}\right.$$

avremo

$$\mathrm{S}_i(x\,,y)=(-1)^{i-1}\,s_i(\lambda(x)-\lambda(y))\cdot\lambda'(y).$$

Infatti questa relazione è vera per $i=0$; se è vera per i, sarà

$$\mathrm{S}_{i+1}(x\,,y)=(-1)^i\int_y^x s_0(\lambda(\xi)-\lambda(y))\,\lambda'(y)\,s_i(\lambda(x)-\lambda(\xi))\,\lambda'(\xi)\,d\xi.$$

Pongasi

$$\lambda(x)-\lambda(\xi)=u,$$

avremo

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{i+1}(x\,,y)&=(-1)^i\lambda'(y)\int_0^{\lambda(x)-\lambda(y)} s_0(\lambda(x)-\lambda(y)-u)\,s_i(u)\,du\\ &=(-1)^i\,s_{i+1}(\lambda(x)-\lambda(y))\,\lambda'(y).\end{aligned}$$

Perciò se

$$\Theta(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_i (-1)^i s_i(z)$$

otterremo

$$K(x, y) = -\Theta(\lambda(x) - \lambda(y)) \lambda'(y)$$

da cui segue:

La formula di inversione della

$$f(y) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} \varphi(x) F(\lambda(x) - \lambda(y)) dx, \quad (F(0) = 1) \tag{9}$$

è

$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda'(y) \int_{\alpha}^{y} f'(x) \Theta(\lambda(x) - \lambda(y)) dx \tag{10}$$

in cui

$$\begin{cases} \Theta(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_i (-1)^i s_i(z) \\ s_0(z) = F'(z) \\ s_i(z) = \int_0^z s_{i-j}(z - u) s_{j-1}(u) du. \end{cases}$$

6. Le (7) ci forniscono una espressione notevole del resto della serie $K(x, y)$. Abbiamo infatti

$$K(x, y) = \sum_{0}^{n}{}_i S_i(x, y) + \sum_{0}^{\infty}{}_i \int_y^x S_n(x, \xi) S_i(\xi, y) d\xi$$

$$= \sum_{0}^{n}{}_i S_i(x, y) + \sum_{0}^{\infty}{}_i \int_y^x S_n(\xi, y) S_i(x, \xi) \, d\xi,$$

onde a cagione della convergenza in egual grado

$$K(x, y) = \sum_{0}^{n}{}_i S_i(x, y) + \int_y^x S_n(x, \xi) K(\xi, y) d\xi \tag{11}$$

$$= \sum_{0}^{n}{}_i S_i(x, y) + \int_y^x S_n(\xi, y) K(x, \xi) d\xi.$$

Perciò il resto della serie sarà

$$R_n = \int_y^x S_n(x, \xi) K(\xi, y) d\xi = \int_y^x S_n(\xi, y) K(x, \xi) d\xi. \tag{12}$$

7. La formula di inversione della (1) può mettersi anche sotto un'altra forma diversa dalla (2), e precisamente può scriversi

$$\varphi(y) = \frac{d\Phi(y)}{dy}$$

in cui

$$\Phi(y) = \frac{f(y) - f(\alpha)}{h(y)} + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx \tag{14}$$

$$S'_i = \int_x^y S'_0(\xi, y)\, S'_{i-1}(x, \xi)\, d\xi$$

$$S'_0 = \frac{H_1(x, y)}{h(x)}$$

essendo $H_1 = \partial H / \partial x$.

Si dimostra facilmente che se $H_1(x, y)$ si conserva finita e continua per x, y comprese fra α e $\alpha + A$, la serie

$$\sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y) \tag{15}$$

è al pari della serie (4) convergente in egual grado per tutti i valori di x, y compresi fra gli stessi limiti, e perciò $\Phi(y)$ ha un significato. Se ammettiamo poi che anche $H_{12} = \partial^2 H / \partial x\, \partial y$ sia finita e continua per x, y compresi fra gli stessi limiti, anche la serie delle derivate

$$\sum_0^\infty {}_i \frac{\partial S'_i}{\partial y}$$

sarà pure convergente in egual grado, e perciò, supposto $f'(x)$ finita e continua per x compresa fra α e $\alpha + A$, tale risulterà $\varphi(y)$ data dalla (13). Dimostriamo ora che questa funzione verifica la (1). Infatti dalle (13) e (14) segue, mediante una integrazione per parti

$$\int_\alpha^y \varphi(x) H(x, y)\, dx = f(y) - f(\alpha) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx$$

$$- \int_\alpha^y \frac{f(x) - f(\alpha)}{h(x)} H_1(x, y)\, dx - \int_\alpha^y \frac{H_1(\xi, y)}{h(\xi)}\, d\xi \int_\alpha^\xi \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, \xi)\, dx$$

e, applicando il principio di DIRICHLET, avremo

$$\int_\alpha^y \varphi(x) H(x, y)\, dx = f(y) - f(\alpha) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx$$

$$- \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \left[\frac{H_1(x, y)}{h(x)} + \int_x^y \sum_0^\infty {}_i \frac{H_1(\xi, y)\, S'_i(x, \xi)}{h(\xi)}\, d\xi \right] dx.$$

Ora per la convergenza in egual grado della serie (15) abbiamo

$$\int_x^y \sum_0^\infty{}_i \frac{H_1(\xi, y) S'_i(x, \xi)}{h(\xi)} d\xi = \sum_0^\infty{}_i \int_x^y \frac{H_1(\xi, y) S'_i(x, \xi)}{h(\xi)} d\xi = \sum_1^\infty{}_i S'_i(x, y)$$

quindi

$$\int_\alpha^y \varphi(x) H(x, y) dx = f(y) - f(\alpha) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty{}_i S'_i(x, y) dx$$

$$- \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \left[\frac{H_1(x, y)}{h(x)} + \sum_1^\infty{}_i S'_i(x, y)\right] dx = f(y) - f(\alpha).$$

Come dovevasi dimostrare.

Anche i termini S'_i della serie (15) godono di una proprietà analoga alla (7) per le S_i, cioè, qualunque sia j, compreso fra 1 e i, si ha

$$S'_i = \int_x^y S'_{i-j}(x, \xi) S'_{j-1}(\xi, y) d\xi$$

e perciò: *La formula di inversione della*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_x^y \varphi(x) H(x, y) dx$$

può scriversi

$$\varphi(x) = \frac{d}{dy}\left[\frac{f(y) - f(\alpha)}{h(y)} + \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} K'(x, y) dx\right] \tag{14'}$$

in cui

$$\left\{\begin{aligned} & h(y) = H(y, y) \\ & K'(x, y) = \sum_0^\infty{}_i S'_i(x, y) \\ & S'_0(x, y) = \frac{1}{h(x)} \frac{\partial H}{\partial x} \\ & S'_i(x, y) = \int_x^y S'_{i-j}(x, \xi) S'_{j-1}(\xi, y) d\xi . \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Anche il resto della serie $K'(x, y)$ può mettersi sotto una forma analoga a quello della (4) e cioè

$$R'_n = \int_x^y S'_n(x, \xi) K'(\xi, y) = \int_x^y S'_n(\xi, y) K'(x, \xi) d\xi .$$

8. Applicando le formule (14') e (16) alla inversione della (9) si ottiene

$$\varphi(y) = \frac{d}{dy}\left[f(y) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\}\,\Theta(\lambda(x) - \lambda(y))\,\lambda'(x)\,dx\right]$$

ed è facile riconoscere che essa coincide colla (10).

9. Per la esistenza della funzione Φ da cui poi dipende la φ, basta che f sia finita e continua e sia finita e continua la $H_1(x, y)$, mentre il limite inferiore dei valori assoluti di $h(y)$ sia maggiore di zero.

Proviamo che queste condizioni sono pure sufficienti per riconoscere la univocità di φ. Infatti se esistono due funzioni finite e continue φ_1 e φ_2 che verificano la (1), posto

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad , \quad \theta(x) = \int_\alpha^x \psi(x)\,dx$$

con una integrazione per parti si ha

$$0 = \int_\alpha^y \psi(x)\,H(x, y)\,dx = \int_\alpha^y \frac{d\theta}{dx} H(x, y)\,dx = \theta(y)\,h(y) - \int_\alpha^y \theta(x)\,H_1(x, x)\,dy$$

onde

$$\theta(y) = \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y \theta(x)\,H_1(x, y)\,dx\,.$$

Con un ragionamento analogo a quello contenuto nella 3ª parte del § 2 si ricava da questa formula che $\theta(y)$ è inferiore a qualsiasi quantità assegnabile, quindi è nulla e per conseguenza $\varphi_1 = \varphi_2$.

10. Passando dal campo reale a quello complesso facciamo per ultimo osservare che *se* $f(x)$ *è una funzione olomorfa per tutti i valori della variabile complessa* x *tali che* $|x - \alpha| < A$, *e* $H(x, y)$ *è pure olomorfa per tutti i valori delle variabili complesse* x, y *per cui* $|x - \alpha| < A$, $|y - \alpha| < A$, *mentre* $h(y) = H(y, y)$ *non ha nessuno zero per valori di* y *tali che* $|y - \alpha| < A$, *le formule di inversione trovate* (2) *e* (14') *continuano a sussistere e definiscono una funzione olomorfa* $\varphi(y)$ *per tutti i valori di* y *per cui* $|y - \alpha| < A$. I diversi integrali che vengono a comparire nelle formule non dipendono che dagli estremi, sono cioè indipendenti dai cammini d'integrazione, purché li supponiamo tali che lungo essi le variabili di integrazione differiscano da α di valori il cui modulo è inferiore ad A.

In una prossima Nota svolgerò il caso in cui $H(x, y)$ possa divenire infinita.