Nota III.

Ibidem, vol. XXXI, 1896, pp. 557–567.

1 In due Note precedenti [1] ebbi l'onore di comunicare all'Accademia alcune ricerche sulla inversione degli integrali definiti nelle quali supponevo che una funzione denotata con $h(y)$ non si annullasse entro i limiti dell'intervallo di integrazione $(\alpha, \alpha + A)$. La discussione dei casi nei quali la detta condizione non sia verificata costituisce una parte molto delicata della ricerca, giacché quando $h(y)$ si annulla il problema dell'inversione può in taluni casi riescire determinato, in altri no. La discriminazione di essi può in genere farsi dipendere dall'esame di una certa equazione algebrica. Nella presente Nota però mi limito a trattare il caso più semplice nel quale la distinzione dei casi si eseguisce in maniera diretta. In questo studio mi riferirò ad alcuni risultati che ho presentati recentemente all'Accademia dei Lincei [2] che possono prendersi anche a fondamento delle due Note precedentemente citate.

2. La questione da risolversi sia quella di determinare $\varphi(x)$ dalla relazione funzionale

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \qquad \beta > y > \alpha$$

e supponiamo che nell'intervallo (α, β) l'equazione

$$h(y) = \mathrm{H}(y, y) = 0$$

abbia un numero finito di radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

La determinazione di $\varphi(x)$ per $\alpha_1 > x \geq \alpha$ rientra nella classe di problemi che ho precedentemente risoluti. La difficoltà incomincia dal determinare $\varphi(x)$ per valori a partire dalla prima radice α_1. Possiamo quindi procedere ad esaminare la questione seguente:

Invertire l'integrale

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \qquad a > y > 0$$

in cui $h(y) = \mathrm{H}(y, y)$ si annulla per $y = 0$ e non per altri valori di y compresi fra 0 ed a. Noi tratteremo qui il caso semplice in cui $\mathrm{H}(x, y)$ possa svilupparsi secondo la formula del TAYLOR abbreviata, in modo che possa scriversi

$$\mathrm{H}(x, y) = \alpha x + \beta y + \frac{1}{2}(x^2 \mathrm{H}_{11}(x, y) + 2xy\, \mathrm{H}_{12}(x, y) + y^2 \mathrm{H}_{22}(x, y))$$

(1) Sedute del 12 e del 26 gennaio 1896. [In questo vol.: pp. 216–232].

(2) Seduta del 1° marzo 1896. [In questo vol.: XIX, pp 255–262].

in cui le H_{is} sono funzioni finite e continue per x, y compresi fra 0 e a, e α e β non sono ambedue nulli. In tale ipotesi $f(y)$ dovrà essere infinitesima del 2° ordine per $y = 0$.

3. I risultati che in questo caso si hanno possono riassumersi nel seguente teorema:

Abbiasi la equazione funzionale

$$(A) \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\,H(x, y)\,dx, \qquad a > y > 0$$

in cui $f(y) = y^2 f_1(y)$, *e*

$$H(x, y) = \alpha x + \beta y + \frac{1}{2}(x^2 H_{11}(x, y) + 2yx H_{12}(x, y) + y^2 H_{22}(x, y))$$
$$= \alpha x + \beta y + H'(x, y).$$

Se $f_1(y)$, H_{is} *e le loro derivate rapporto ad* y *sono finite e continue per* x, y *comprese fra* 0 *ed* a, *mentre* $h(y) = H(y, y)$ *si annulla solo per* $y = 0$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale* (A) *quando*

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta} > -1 \quad \text{oppure} \quad (2) \qquad \frac{\alpha}{\beta} < -2$$

la quale si otterrà risolvendo la equazione funzionale

$$(B) \qquad \frac{f'(y)}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, dx = \frac{h(y)}{y}\varphi(y)$$

$$+ \int_0^y \varphi(x) \left\{ \frac{1}{y}\frac{\partial H'}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{y^2} H' - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}\, d\xi \right\} dx$$

mentre se $-1 > \alpha/\beta > -2$ *il problema funzionale* (A) *non sarà determinato.*

1° Cominciamo dal provare che allorquando è soddisfatta la (1) o la (2) la questione funzionale (A) rientra nella classe di questioni esaminate nella mia Nota dell'Accademia dei Lincei precedentemente citata. A tal fine basterà osservare che, per y compreso fra 0 ed a, il primo membro della (B) è finito e continuo, mentre $h(y)/y$ si conserva finita, continua e diversa da zero e finalmente

$$(3) \qquad G(x, y) = \frac{1}{y}\frac{\partial H'}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{H'(x, y)}{y^2}$$
$$- \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}\, d\xi$$

è una funzione continua avente il limite superiore dei suoi valori assoluti finito per tutti i valori di x, y che verificano le condizioni

$$a > y > x > 0.$$

Se ne conclude che vi è una ed una sola funzione finita e continua $\varphi(x)$ che verifica la (B) per $a > x \geq 0$.

2° Dimostriamo che se la funzione finita e continua $\varphi(z)$ soddisfa la (A), essa verifica la (B).

Infatti derivando la (A) e scrivendo $H_2(x, y) = \dfrac{\partial H(x, y)}{\partial y}$, otterremo

$$(A') \qquad f'(y) = \varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx$$

e perciò

$$(4) \qquad \frac{h(y)}{y}\varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, G(x, y)\, dx = \frac{f'(y)}{y} + \int_0^y \varphi(x) \left\{ G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y} \right\} dx.$$

Ora, ponendo

$$H'_2 = \frac{\partial H'}{\partial y}$$

si ha

$$(5) \qquad H_2(x, y) = \beta + H'_2(x, y)$$

quindi

$$(6) \qquad G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y} = -\frac{\beta}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{H'(x, y)}{y^2}$$

$$-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}\, d\xi = -\frac{\beta}{y}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta} H'(x, x)\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi$$

$$= -\beta x^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} H'(x, x)\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y (\beta + H'_2(x, \xi))\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, h(x) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi.$$

Per conseguenza tenendo presente la (A′)

$$\varphi(x) \left\{ G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y} \right\} = -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} f'(x)$$

$$+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \left[x^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \int_0^x \varphi(\xi)\, H_2(\xi, x)\, d\xi - \varphi(x) \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi \right].$$

Ma pel principio di DIRICHLET, osservando che $\alpha/(\alpha+\beta)<2$,

$$(7) \qquad \int_0^y \left\{ x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \int_0^x \varphi(\xi)\, \mathrm{H}_2(\xi, x)\, d\xi - \varphi(x) \int_x^y \mathrm{H}_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} d\xi \right\} dx = 0,$$

onde

$$\int_0^y \varphi(x) \left\{ \mathrm{G}(x, y) - \frac{\mathrm{H}_2(x, y)}{y} \right\} dx = -\frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx,$$

da cui finalmente segue, in virtù della (4),

$$\frac{h(y)}{y}\varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{G}(x, y)\, dx = \frac{f'(y)}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx$$

come volevasi dimostrare.

3° Proviamo ora inversamente che, se la funzione finita e continua $\varphi(x)$ soddisfa la (B), essa verifica la (A), o ciò che è lo stesso la (A').

Infatti dalla (B) segue, a cagione della (3),

$$\varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}_2(x, y)\, dx = f'(y)$$

$$-\int_0^y \left\{ \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} f'(x) + \varphi(x) \left[y\mathrm{G}(x, y) - \mathrm{H}_2(x, y) \right] \right\} dx.$$

Perciò valendosi delle identità (6)

$$\Phi(y) = \varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}_2(x, y)\, dx - f'(y)$$

$$= \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \left\{ x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} h(x)\, \varphi(x) \right.$$

$$\left. + \varphi(x) \int_x^y \mathrm{H}_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} d\xi - x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} f'(x) \right\} dx$$

e applicando la (7)

$$\Phi(y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left\{ h(x)\, \varphi(x) \right.$$

$$\left. + \int_0^x \varphi(\xi)\, \mathrm{H}_2(\xi, x)\, d\xi - f'(x) \right\} dx = \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \Phi(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx,$$

vale a dire

$$\Phi(y)\, y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y \Phi(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, dx = 0\,;$$

e derivando rapporto ad y

$$\Phi'(y) = 0.$$

Ma per $y = 0$ Φ si annulla, dunque si avrà sempre $\Phi(y) = 0$ e per conseguenza

$$\varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx = f'(y)$$

come volevasi dimostrare.

4° Per provare finalmente che se $-1 > \alpha/\beta > -2$ il problema funzionale è indeterminato, osserviamo dapprima che in questo caso si ha $-(\alpha + 2\beta)/(\alpha + \beta) > 0$, onde la equazione funzionale

$$(8) \qquad 1 = \frac{h(y)}{y}\theta(y) + \int_0^y \theta(x) \left\{ \frac{H'_2(x, y)}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{H'(x, x)}{x^2} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\int_x^y H'_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} d\xi \right\} dx,$$

in cui $\theta(x)$ è la funzione incognita, si risolve applicando i metodi dati nella mia citata Nota dell'Accademia dei Lincei.

Si verifica poi che, presa

$$(9) \qquad \varphi_1(y) = \theta(y)\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}},$$

questa soddisfa la relazione funzionale

$$0 = \int_0^y \varphi_1(x)\, H(x, y)\, dx$$

ovvero l'altra equivalente

$$(10) \qquad 0 = \varphi_1(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi_1(x)\, H_2(x, y)\, dx.$$

Infatti posto

$$(11) \qquad L(x, y) = \frac{H'_2(x, y)}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\int_x^y H'_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

dalle (8) e (9) si ricava

$$(\alpha+\beta)\,\varphi_1(y) = y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{H'(y\,,y)}{y}\,\varphi_1(y)$$

$$- y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \left\{ -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(x\,,x)}{x^2} + L(x\,,y) \right\} \theta(x)\,dx$$

e quindi

$$(\alpha+\beta)\,y\varphi_1(y) + \int_0^y \beta\varphi_1(x)\,dx = -H'(y\,,y)\,\varphi_1(y)$$

$$- y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \left\{ -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(x\,,x)}{x^2} + L(x\,,y) \right\} \theta(x)\,dx$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_0^y \left[\frac{H'(x\,,x)}{x}\,\varphi_1(x) + x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^x \left\{ -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(\xi\,,\xi)}{\xi^2} + L(\xi\,,x) \right\} \theta(\xi)\,d\xi \right] dx\,.$$

Ma, applicando il principio di DIRICHLET, abbiamo

$$0 = -y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(x\,,x)}{x^2}\,\theta(x)\,dx - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_0^y \frac{H'(x\,,x)}{x}\,\varphi_1(x)\,dx$$

$$+ \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\,dx \int_0^x \frac{H'(\xi\,,\xi)}{\xi^2}\,d\xi,$$

perciò il secondo membro della formula precedente si semplicizza e diventa

$$= -H'(y\,,y)\,\varphi_1(y) - y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y L(x\,,y)\,\theta(x)\,dx$$

$$- \frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\,dx \int_0^x L(\xi\,,x)\,\theta(\xi)\,d\xi,$$

ovvero, sostituendo per $L(x\,,y)$ la espressione (11),

$$= -H'(y\,,y)\,\varphi_1(y) - \int_0^y \varphi_1(x)\,H'_2(x\,,y)\,dx$$

$$+ \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left[y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \varphi_1(x)\,dx \int_x^y H'_2(x\,,\xi)\,\xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,d\xi - \int_0^y dx \int_0^x \frac{H'_2(\xi\,,x)}{x}\,\varphi_1(\xi)\,d\xi \right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\,dx \int_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi \int_\xi^x H'_2(\xi\,,\eta)\,\eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,d\eta \right].$$

Ma pel principio di DIRICHLET

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}dx\int_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi\int_\xi^x H_2'(\xi,\eta)\,\eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\eta$$

$$=\int_0^y \eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\eta\int_0^\eta \varphi_1(\xi)\,H_2'(\xi,\eta)\,d\xi\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_\eta^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}dx$$

$$=-y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\int_0^y \eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\eta\int_0^\eta \varphi_1(\xi)\,H_2'(\xi,\eta)\,d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^\eta \frac{\varphi_1(\xi)\,H_2'(\xi,\eta)}{\eta}\,d\xi\,.$$

Perciò nella formula precedente tutti i termini che seguono i primi due si annullano e quindi avremo

$$(\alpha+\beta)\,y\varphi_1(y)+\int_0^y \beta\varphi_1(x)\,dx=-H'(y,y)\,\varphi_1(x)-\int_0^y \varphi_1(x)\,H_2'(x,y)\,dx\,,$$

cioè

$$h(y)\,\varphi_1(y)+\int_0^y \varphi_1(x)\,H_2(x,y)\,dx=0$$

che è appunto la (10) che si trattava di dimostrare.

Si avrà dunque, quando $1 -> \alpha/\beta > -2$, che se la funzione $\varphi(x)$ soddisfa la (A), anche la funzione

$$\varphi(x)+C\varphi_1(x)$$

in cui C è una costante arbitraria, la verificherà pure, il che prova che la questione è indeterminata.

4. Per dimostrare la equivalenza delle due equazioni funzionali (A) e (B), allorché è soddisfatta la (1) oppure la (2), si può procedere nel seguente modo, anziché ricorrere alla verifica diretta come abbiamo fatto nel paragrafo precedente.

Moltiplichiamo ambo i membri della (A′) per $y^{-\alpha/(\alpha+\beta)}dy$. Osservando che così la (1) come la (2) provano che

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}<2\,,$$

potremo integrare fra o e z, e avremo, applicando il principio di DIRICHLET,

$$\int_0^z f'(y)\,y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}dy=\int_0^z \varphi(y)\left\{h(y)\,y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}+\int_y^z H_2(y,\xi)\,\xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\xi\right\}dy\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $z^{-\beta/(\alpha+\beta)}$ si trova

$$\int_0^z f'(y)\, y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dy = \int_0^z \varphi(y) \left\{ h(y)\, y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right.$$

$$\left. + \int_y^z \mathrm{H}_2(y, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi \right\} dy,$$

ovvero, ponendo

$$\mathrm{M}(x, y) = h(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \int_x^y \mathrm{H}_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

si ha

$$(12) \qquad \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dx = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{M}(x, y)\, dx.$$

Questa equazione risulta così equivalente alla (A).

Abbiamo ora

$$(13) \qquad \mathrm{M}(y, y) = \frac{h(y)}{y},$$

e poiché

$$h(x) = (\alpha + \beta)\, x + \mathrm{H}'(x, x) \quad , \quad \mathrm{H}_2(x, \xi) = \beta + \mathrm{H}'_2(x, \xi),$$

sarà

$$\mathrm{M}(x, y) = \alpha + \beta + \mathrm{H}'(x, x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \int_x^y \mathrm{H}'_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

onde, con una integrazione per parti,

$$\mathrm{M}(x, y) = \alpha + \beta + \frac{\mathrm{H}'(x, y)}{y} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y \mathrm{H}'(x, y)\, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

da cui segue

$$(14) \qquad \mathrm{M}_2(x, y = \frac{\partial \mathrm{M}(x, y)}{\partial y} = \mathrm{G}(x, y).$$

Si derivi la (12) rispetto ad y tenendo presenti le (13) e (14); si troverà

$$\frac{f'(y)}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx = \frac{h(y)}{y}\, \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{G}(x, y)\, dx,$$

cioè si otterrà la (B). Resta così dimostrata la equivalenza delle equazioni (A) e (B).

Potremo anche enunciare, in virtù delle precedenti considerazioni, il teorema seguente:

Se $\alpha/\beta < -1$, *oppure* $\alpha/\beta < -1$, *la equazione funzionale*

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \tag{A}$$

è equivalente all'altra

$$\int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dx = \int_0^y \varphi(x) \Big\{ h(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \tag{C}$$

$$+ \int_x^y \mathrm{H}_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi \Big\} dx ,$$

la quale può risolversi con i metodi esposti nella Nota I.

L'analisi svolta vale, come abbiamo veduto, quando sia soddisfatta una delle condizioni

$$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \quad , \quad -1 > \frac{\alpha}{\beta} > -2 \quad , \quad -2 > \frac{\alpha}{\beta} ,$$

ma se si ha

$$\frac{\alpha}{\beta} = -1 \; , \qquad \text{oppure} \quad \frac{\alpha}{\beta} = -2 ,$$

allora essa non è più applicabile, e si riconosce facilmente che non bastano più le condizioni che abbiamo supposto conosciute per esaminare la questione in questi casi.