NOTA IV.

Ibidem, vol. XXXI, 1896, pp. 693–708

1. Mi permetto di presentare la continuazione di alcuni studi sulla inversione degli integrali definiti recentemente comunicati all'Accademia. Nell'ultima Nota [1] ho esaminato il caso in cui, avendosi l'equazione funzionale

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x) \, \mathrm{H}(x, y) \, dx ,$$

la espressione di $\mathrm{H}(x, y)$ sviluppata secondo la formula di MACLAURIN cominciasse dai termini di primo grado nelle variabili; darò ora alcuni teoremi fondamentali relativi al caso in cui la detta espressione cominci dai termini di grado n.

Il primo di essi stabilisce una condizione sufficiente perché il problema dell'inversione sia determinato, la quale si verifica allorché le parti reali delle radici di una equazione algebrica di grado n a coefficienti reali sono tutte positive.

Ora la questione di riconoscere se le parti reali delle radici di una equazione algebrica a coefficienti reali hanno tutte lo stesso segno è stata recentemente trattata e risoluta in maniera completa ed elegante dal prof. HURWITZ [2]. Applicando il criterio di HURWITZ al nostro caso si può giudicare *a priori* che la questione d'inversione è determinata, eseguendo solo operazioni razionali sui coefficienti dei termini di grado n dello sviluppo di $\mathrm{H}(x, y)$.

I teoremi II e III dànno la effettiva risoluzione del problema dell'inversione allorché è soddisfatta la condizione di cui ora si è parlato. Essi stabiliscono che l'equazione funzionale primitiva è equivalente ad un'altra avente la stessa forma, ma tale che la corrispondente funzione $\mathrm{H}(y, y)$ non si annulla più nell'intervallo d'integrazione, e che perciò è suscettibile di risolversi col metodo che ho dato fino dal principio delle attuali ricerche.

Finalmente i teoremi IV e V provano che la questione funzionale non è determinata se le radici della equazione algebrica a cui si riferisce la detta condizione, anziché avere le parti reali positive, sono tali che una o più di esse hanno le parti reali negative, giacché allora se esiste una soluzione ve ne sono infinite.

2. TEOREMA I. – *Abbiasi la equazione funzionale*

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x) \, \mathrm{H}(x, y) \, dx \quad , \quad a > y > 0$$

(1) Seduta dell'8 marzo 1896. [In questo vol.: pp. 233–241].

(2) *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt* von A. HURWITZ, «Math. Annalen», Bd. 46, S. 273.

in cui

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y)$$

$$\mathrm{H}(x, y) = \sum_0^n {}_i\, a_i x^i y^{n-1} + \mathrm{H}'(x, y)$$

$$\mathrm{H}'(x, y) = \sum_0^{n+1} {}_i\, x^i y^{n+1-i} \mathrm{L}_i(x, y)$$

essendo le a_i quantità costanti.

Se $f_1(y)$ e $\mathrm{L}_i(x, y)$ e le loro derivate rapporto ad y sono finite e continue per y compreso fra 0 *ed* a, *mentre in questo intervallo*

$$h(y) = \mathrm{H}(y, y)$$

non si annulla che per $y = 0$, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa la (A) *quando tutte le radici dell'equazione algebrica di grado n*

$$\text{(B)} \qquad \frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$$

essendo finite e differenti fra loro, avranno le parti reali positive.

Divideremo la dimostrazione di questo teorema in due parti.

3. Supponiamo dapprima che la funzione $\varphi(x)$ soddisfi la (A).

Derivando questa equazione rapporto ad y otterremo

$$\text{(A')} \qquad f'(y) = \varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}_2(x, y)\, dx$$

in cui

$$\text{(1)} \qquad h(y) = \sum_0^n {}_i\, a_i y^n + h'(y)$$

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{H}_2(x, y) = \frac{\partial \mathrm{H}(x, y)}{\partial y} = \sum_0^n {}_i\, (n - i)\, a_i x^i y^{n-i-1} + \mathrm{H}'_2(x, y)$$

essendo

$$h'(y) = \mathrm{H}'(y, y) \quad , \quad \mathrm{H}'_2(x, y) = \frac{\partial \mathrm{H}'(x, y)}{\partial y} .$$

Sia ora y_s una radice dell'equazione (B).

Moltiplicando ambo i membri della (A′) per $y^{\lambda_s - n - 1}$ avremo

$$f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} = \varphi(y)\, h(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} + y^{\lambda_s - n - 1} \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}_2(x, y)\, dx .$$

Poiché la parte reale di λ_s deve essere positiva, così ambo i membri della precedente equazione saranno finiti o al più, per $y = 0$, diverranno infiniti d'ordine inferiore ad un numero minore dell'unità. Quindi sarà lecito integrare fra 0 e z e si otterrà:

$$\text{(3)} \quad \int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} dy = \int_0^z \left\{ \varphi(y)\, h(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} + y^{\lambda_s - n - 1} \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}_2(x, y)\, dx \right\} dy$$

e applicando il principio di DIRICHLET

$$\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\, dy = \int_0^z \left\{ h(y)\, y^{\lambda_s-n-1} + \int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx \right\} \varphi(y)\, dx\,.$$

Abbiamo ora, in virtù della (2),

$$\int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx = \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1}$$

$$-\sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^{\lambda_s-1} + \int_y^z \mathrm{H}'_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx$$

e, mediante una integrazione per parti applicata all'ultimo integrale,

$$\int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx = \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1}$$

$$-\sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^{\lambda_s-1} + \mathrm{H}'(y\,,z)\, z^{\lambda_s-n-1} - h'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}$$

$$-(\lambda_s-n-1)\int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\,.$$

Ne segue, tenendo conto della (1),

$$h(y)\, y^{\lambda_s-n-1} + \int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx$$

$$= y^{\lambda_s-1} \sum_0^n {}_i\, a_i \left(1 - \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\right) + h'(y)\, y^{\lambda_s-n-1} + \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1}$$

$$+ \mathrm{H}'(y\,,z)\, z^{\lambda_s-n-1} - h'(y)\, y^{\lambda_s-n-1} - (\lambda_s-n-1)\int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\,.$$

Ma siccome λ_s è radice della (B), così

$$\sum_0^n {}_i\, a_i \left(1 - \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\right) = \sum_0^n {}_i\, a_i\, \frac{\lambda_s-n-1}{\lambda_s-i-1} = 0\,,$$

onde il secondo membro della precedente equazione diverrà

$$= \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1} + \mathrm{H}'(y\,,z)\, z^{\lambda_s-n-1}$$

$$-(\lambda_s-n-1)\int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\,.$$

In conseguenza la (3) si scriverà

$$\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = \int_0^z \left\{ \sum_0^n{}_i \frac{n-i}{\lambda_s - i - 1} a_i\, y^i z^{\lambda_s - i - 1} \right.$$

$$\left. + \mathrm{H}'(y, z)\, z^{\lambda_s - n - 1} - (\lambda_s - n - 1) \int_y^z \mathrm{H}'(y, x)\, x^{\lambda_s - n - 2}\, dx \right\} \varphi(y)\, dy$$

e, moltiplicando ambo i membri per $z^{-\lambda_s + 1}$,

$$\text{(4)} \qquad z^{-\lambda_s + 1} \int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = \int_0^z \left\{ \sum_0^n{}_i \frac{n-i}{\lambda_s - i - 1} a_i\, y^i z^{-i} \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{H}'(y, z)}{z^n} - (\lambda_s - n - 1)\, z^{-\lambda_s + 1} \int_y^z \mathrm{H}'(y, x)\, x^{\lambda_s - n - 2}\, dx \right\} \varphi(y)\, dy.$$

Si ponga ora

$$\mathrm{K}_s = \frac{(\lambda_s - n)(\lambda_s - n + 1) \cdots (\lambda_s - 2)}{(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \cdots (\lambda_s - \lambda_n)}, \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

in cui il denominatore contiene tutte le differenze $\lambda_s - \lambda_h$ per $h \gtrless s$.

Per noti teoremi algebrici (3) avremo

$$\text{(5)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s = 1 \\ & \sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{\lambda_s} = \frac{n!}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = \frac{n \sum_0^n{}_i a_i}{\sum_0^n{}_i \frac{a_i}{i+1}} \\ & \sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{\lambda_s - 1} = \frac{(n-1)!}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) \cdots (\lambda_n - 1)} = \frac{\sum_0^n{}_i a_i}{n a_0} \\ & \sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{\lambda_s - q} = 0, \qquad (q = 2, 3, \cdots, n). \\ & \sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{n + 1 - \lambda_s} = \frac{(n-1)!}{(n+1-\lambda_1) \cdots (n+1-\lambda_n)} = \frac{\sum_0^n{}_i a_i}{n a_n}. \end{aligned} \right.$$

(3) Vedi JACOBI, *Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*. Dissertatio inauguralis. Berolini 1825 («Ges. Werke», Bd. III).

Moltiplichiamo ambo i membri della (4) per K_s e sommiamo per tutti i valori dell'indice s da 1 ad n. Si avrà

$$\sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s+1}\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\, dy$$

$$=\int_0^z\Big\{\sum_0^{n-1}{}_i (n-1)\, a_i\, y^i z^{-i}\sum_1^n{}_s \frac{K_s}{\lambda_s-i-1}+\frac{H'(y\,,x)}{z^n}\sum_1^n{}_s K_s$$

$$-\sum_1^n{}_s K_s(\lambda_s-n-1)\, z^{-\lambda_s+1}\int_y^z H'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\Big\}\varphi(y)\, dy$$

ossia, in virtù delle (5),

$$\text{(6)}\qquad \sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s+1}\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\, dy$$

$$=\int_0^z\Big\{\sum_0^n{}_i a_i+\frac{H'(y\,,x)}{z^n}-\sum_1^n{}_s K'_s z^{-\lambda_s+1}\int_y^z H'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\Big\}\varphi(y)\, dy$$

in cui si è posto

$$K'_s=\frac{(\lambda_s-n-1)(\lambda_s-n)\cdots(\lambda_s-2)}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_n)}\,.$$

Si scriva per semplicità

$$\text{(7)}\qquad \sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s+1}\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\, dy=\psi(z)$$

$$\text{(8)}\qquad \sum_0^n{}_i a_i+\frac{H'(y\,,z)}{z^n}-\sum_1^n{}_s K'_s z^{-\lambda_s+1}\int_y^z H'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx=G(y\,,z),$$

la (6) allora assumerà la forma

$$\text{(C)}\qquad \psi(z)=\int_0^z G(y\,,z)\,\varphi(y)\, dy\,;$$

ossia potremo concludere che se $\varphi(y)$ soddisfa la (A) dovrà verificare la equazione precedente.

Abbiamo ora:

1° $\psi(z)$ è una funzione finita e continua in tutto l'intervallo $(0\, a)$, e per $z=0$ si annulla.

$\psi'(z)$ è una funzione finita e continua nello stesso intervallo, e

$$\lim_{x=0} \psi'(z) = (n+1) f_1(0) \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{\lambda_s} = \frac{n(n+1)\sum_0^n {}_i a_i}{\sum_1^n {}_i \frac{a_i}{i+1}} f_1(0).$$

2° $G(y, z)$ e $G_2(y, z) = \partial G(y, z)/\partial z$ sono funzioni continue ed i limiti superiori dei loro valori assoluti sono finiti per tutti i valori di x, y che verificano le condizioni

$$a > z > y > 0.$$

3° La funzione

$$G(z, z) = \sum_0^n {}_i a_i + \frac{h'(z)}{z^n}$$

è finita continua e diversa da zero per tutti i valori di z compresi fra 0 ed a.

La questione funzionale (C) rientra dunque in quella classe, che ho esaminata in Note precedenti, la quale non ammette che una sola soluzione $\varphi(x)$.

Dunque non può esservi più di una funzione che soddisfi la (A).

4. Mostriamo ora che ogni funzione finita e continua $\varphi(y)$ che verifica la (C) deve soddisfare la (A′) e per conseguenza la (A).

Supponiamo infatti che $\varphi(y)$ soddisfi la (C); in tal caso, posto

$$\Phi(y) = f'(y) - \varphi(y) h(y) - \int_0^y \varphi(x) H_2(x, y)\, dx,$$

questa funzione risulterà finita e continua per $a > y \geq 0$ e diverrà infinitesima d'ordine n per $y = 0$.

Seguendo l'analisi che ci ha condotti alla (C), si riconosce facilmente che questa equazione potrà scriversi

$$\text{(C')} \qquad \sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z \Phi(y) y^{\lambda_s - n - 1} dy = 0.$$

Moltiplichiamo ambo i membri della precedente equazione per $z^{q-2} dz$; avremo

$$\sum_1^n {}_s K_s z^{q-\lambda_s-1} dz \cdot \int_0^z \Phi(y) y^{\lambda_s-n-1} dy = 0.$$

Ammettendo di dare a q uno dei valori $2, \cdots, n$, potremo integrare fra 0 ed u $(a > u > 0)$, e applicando il principio di DIRICHLET si otterrà:

$$0 = \sum_1^n {}_s K_s \int_0^u \Phi(y) y^{\lambda_s-n-1} dy \cdot \int_y^u z^{q-\lambda_s-1} dy =$$

$$= \sum_{n}^{n} {}_s \mathrm{K}_s \int_0^u \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy \cdot \left[\frac{u^{q-\lambda_s}}{q-\lambda_s} - \frac{y^{q-\lambda_s}}{q-\lambda_s}\right]$$

$$= \sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s}\, u^{q-\lambda_s} \int_0^u \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy - \int_0^u \Phi(y)\, y^{q-n-1} \sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s}\, dy\,.$$

A cagione della penultima delle (5), l'ultimo termine della espressione precedente si annullerà, onde avremo

$$\sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s}\, u^{q-\lambda_s} \int_0^u \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = 0$$

o anche

$$\sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s}\, z^{-\lambda_s + 1} \int_0^z \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = 0 \qquad (q = 2, 3, \cdots, n)\,.$$

Poniamo

$$\mathrm{K}_s\, z^{-\lambda_s + 1} \int_0^z \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = v_s\,;$$

le equazioni precedenti unitamente alla (C′) potranno scriversi

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

$$\frac{1}{2-\lambda_1}\, v_1 + \frac{1}{2-\lambda_2}\, v_2 + \cdots + \frac{1}{2-\lambda_n}\, v_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n-\lambda_1}\, v_1 + \frac{1}{n-\lambda_2}\, v_2 + \cdots + \frac{1}{n-\lambda_n}\, v_n = 0$$

e poiché il determinante

$$\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & \cdots\,, & 1 \\ \dfrac{1}{2-\lambda_1}\,, & \dfrac{1}{2-\lambda_2}\,, & \cdots\,, & \dfrac{1}{2-\lambda_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{n-\lambda_1}\,, & \dfrac{1}{n-\lambda_2}\,, & \cdots\,, & \dfrac{1}{n-\lambda_n} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

così avremo

$$v_s = 0$$

da cui segue

$$\Phi(y) = 0$$

che non è altro che la (A′). Abbiamo quindi provato che dalla (C) segue la (A′) e perciò la (A).

Osserviamo ora che la questione funzionale (C) ammette sempre una soluzione, quindi se saranno verificate le condizioni poste nell'enunciato del teorema I esisterà sempre una funzione $\varphi(x)$ che verifica l'equazione (A) e perciò il teorema stesso risulterà dimostrato.

5. La identità riscontrata nel corso della precedente dimostrazione fra i due problemi funzionali (A) e (C) conduce al

TEOREMA II. – *Quando sono verificate le condizioni poste nel teorema I, per risolvere la questione funzionale*

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x, y)\,dx \qquad (a > y > 0)$$

basterà trovare la funzione $\varphi(x)$ *che soddisfa l'equazione*

$$\text{(C)} \qquad \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\,dy$$

$$= \int_0^z \left\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{\mathrm{H}'(y\,;z)}{z^n} - \sum_1^n {}_s \mathrm{K}'_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^z \mathrm{H}'(y, x)\, x^{\lambda_s-n-2}\,dx \right\} \varphi(y)\,dy$$

la quale potrà ottenersi coi metodi esposti nella Nota I.

Infatti le proprietà trovate per il primo membro della (C) e per la funzione che moltiplica $\varphi(y)$ nel secondo membro di essa (cfr. le proprietà 1ª, 2ª, 3ª trovate nel § 3) lo provano, quando si tenga conto dei risultati che ho stabiliti nei §§ 3, 4 della mia Nota dell'Accademia dei Lincei, *Sulla inversione degli integrali definiti* (4).

6. Il teorema del paragrafo precedente mostra che la (A) si potrà risolvere determinando le radici dell'equazione algebrica (B), quindi ricorrendo ai procedimenti della suddetta Nota.

Ma possiamo trasformare la (C) in modo che non vi compariscano più esplicitamente le radici λ_s. Essa potrà scriversi infatti

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \int_0^z f'(y)\, \frac{z}{y^{n+1}} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s \left(\frac{y}{z}\right)^{\lambda_s} dy$$

$$= \int_0^z \left\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{\mathrm{H}'(y\,,z)}{z^n} - \int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, \frac{z}{x^{n+2}} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}'_s \left(\frac{x}{z}\right)^{\lambda_s} dx \right\} \varphi(y)\,dy.$$

Avremo ora se $1 \geq u > 0$

$$\sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s u^{\lambda_s} = \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s (1+u-1)^{\lambda_s} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(u-1)^m}{m!} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s \lambda_s(\lambda_s-1)\cdots(\lambda_s-m+1)$$

$$\sum_1^n {}_s \mathrm{K}'_s u^{\lambda_s} = \sum_1^n \mathrm{K}'_s (1+u-1)^{\lambda_s} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(u-1)^m}{m!} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}' \lambda_s(\lambda_s-1)\cdots(\lambda_s-m+1).$$

(4) Seduta del 15 marzo 1896. [In questo vol.: XIX, pp. 255-262].

Tenendo conto che

$$\sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s \lambda_s (\lambda_s - 1)\cdots(\lambda_s - m + 1)\,,\ \sum_1^n{}_s \mathrm{K}'_s \lambda_s (\lambda_s - 1)\cdots(\lambda_s - m + 1)$$

sono funzioni razionali simmetriche delle radici della (B), esse potranno esprimersi razionalmente mediante $a_0, a_1, \cdots, a_m$, e quindi

$$\sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s u^{\lambda_s} = \sum_0^\infty{}_m \frac{(u-1)^m}{m!} \mathrm{A}_m(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \Psi(a_0, a_1, \cdots, a_n \mid u)$$

$$\sum_1^n{}_s \mathrm{K}'_s u^{\lambda_s} = \sum_0^\infty{}_m \frac{(u-1)^m}{m!} \mathrm{A}'_m(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \Psi'(a_0, a_1, \cdots, a_n \mid u)$$

in cui A_m e A'_m denotano funzioni razionali di $a_0, a_1 \cdots a_n$.

Mediante queste formule la (C_1) si trasformerà in modo che le λ_s risulteranno eliminate, ed avremo:

Teorema III. – *Quando sono soddisfatte le condizioni poste nel teorema I la equazione funzionale*

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \qquad (a > y > 0)$$

è equivalente all'altra

$$(\mathrm{C}'_1) \qquad \int_0^z f'(y) \frac{z}{y^{n+1}} \Psi\left(a_0, a_1, \cdots, a_n \middle| \frac{y}{z}\right) dy$$

$$= \int_0^z \left\{ \sum_1^n{}_i a_i + \frac{\mathrm{H}'(y, z)}{z^n} - \int_y^z \mathrm{H}'(y, x) \frac{z}{x^{n+2}} \Psi'\left(a_0, a_1, \cdots, a_n \middle| \frac{x}{z}\right) dx \right\} \varphi(y)\, dy.$$

7. Esaminiamo ora il caso in cui alcune radici dell'equazione (B) abbiano la parte reale negativa. Sia λ quella o una di quelle per cui la detta parte reale è minima e poniamo $\lambda = -\mu$; quindi si consideri l'equazione funzionale

$$\text{(D)} \qquad 1 = \frac{h(y)}{y^n} \theta(y) + \int_0^y \theta(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x, y)}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu dx \qquad (a > y > 0)$$

in cui $\mathrm{G}(x, y)$ è data dalla espressione (8).

È facile riconoscere che, applicando il procedimento esposto nella mia Nota dell'Accademia dei Lincei, *Sulla inversione degli integrali definiti*, precedentemente citata, si può trovare la funzione finita e continua θ che soddisfa la precedente equazione. Perciò basta verificare che $h(y)/y^n$ è finita e non si annulla nell'intervallo $(0, a)$, e il limite superiore del modulo di

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathrm{G}(x, y)}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu$$

è finito per

$$a > y > x > 0 .$$

Si osservi che se μ è un numero complesso, la (9) risulta una funzione complessa degli argomenti reali x , y; ma il procedimento a cui ci siamo riferiti è evidentemente estensibile senz'altro al caso in cui si tratti di funzioni complesse di variabili reali, purché le condizioni relative ai valori assoluti si trasportino ai moduli.

Ciò premesso si ponga

$$\varphi(x) = \theta(x)\, x^{\mu}, \tag{E}$$

avremo

$$y^{\mu} = \frac{h(y)}{y^n}\varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\frac{\partial G(x , y)}{\partial y}dx$$

e osservando che

$$G(y , y) = \frac{h(y)}{y^n},$$

sarà

$$y^{\mu} = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \varphi(x)\, G(x , y)\, dx ;$$

onde integrando

$$\frac{1}{\mu + 1}y^{\mu+1} = \frac{1}{-\lambda + 1}y^{-\lambda+1} = \int_0^y \varphi(x)\, G(x , y)\, dx ,$$

da cui segue

$$z^n \sum_0^n{}_i\, a_i \frac{z^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} - \sum_0^n{}_i\, i a_i z^{n-i}\int_0^z \frac{y^{i-\lambda}}{-\lambda+1}dy$$

$$= z^n \sum_0^n{}_i\, a_i \int_0^z \varphi(x)\, G(x , z)\, dx - \sum_0^n{}_i\, i a_i z^{n-i}\int_0^z y^{i-1}dy \int_0^y \varphi(x)\, G(x , y)\, dx .$$

Ora, eseguendo le integrazioni, il primo membro diviene

$$\frac{1}{-\lambda+1}\sum_0^n{}_i\left(a_i z^{n-\lambda+1} - \frac{i a_i}{i-\lambda+1}z^{n-\lambda+1}\right) = z^{n-\lambda+1}\sum_0^n{}_i \frac{a_i}{-\lambda+i+1} = 0 \tag{10}$$

e, applicando al secondo membro il principio di DIRICHLET, esso si trasforma in

$$\int_0^z \varphi(x)\left\{z^n \sum_0^n{}_i\, a_i\, G(x , z) - \sum_0^n{}_i\, i a_i z^{n-i}\int_x^z G(x , y)\, y^{i-1}dy\right\}dx$$

quindi, ponendo

$$L(x , z) = z^n \sum_0^n{}_i\, a_i\, G(x , z) - \sum_0^n{}_i\, i a_i z^{n-i}\int_x^z G(x , y)\, y^{i-1}dy ,$$

otterremo l'equazione

$$\int_0^z \varphi(x)\,\mathrm{L}(x\,,z)\,dx = 0\,. \tag{11}$$

Con facili calcoli si ha dalla (8)

$$\mathrm{G}(x\,,y) = \sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s\, y^{-\lambda_s+1}\left\{\int_x^y \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\,\xi^{\lambda_s-n-1}\,d\xi + \mathrm{H}(x\,,x)\,x^{\lambda_s-n-1}\right\};$$

quindi $\mathrm{L}(x\,,z)$ si potrà decomporre in due parti, e scrivere

$$\mathrm{L}(x\,,z) = \mathrm{M} + \mathrm{N}$$

ove

$$\mathrm{M} = \mathrm{H}(x\,,x)\sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s\,x^{\lambda_s-n-1}\sum_0^n{}_i\left(a_i\,z^{n-\lambda_s+1} - ia_i\,z^{n-i}\int_x^z y^{i-\lambda_s}\right)$$

$$\mathrm{N} = \sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s \sum_0^n{}_i \left(a_i\,z^{n-\lambda_s+1}\int_x^z \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\,\xi^{\lambda_s-n-1}\,d\xi\right.$$

$$\left. - ia_i\,z^{n-i}\int_x^z y^{-\lambda_s+i}\,dy\int_x^y \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\,\xi^{\lambda_s-n-1}\,d\xi\right).$$

Semplicizzando come nella formula (10) si trova, tenendo conto delle (5),

$$\mathrm{M} = \mathrm{H}(x\,,x)\sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s \sum_0^n{}_i \frac{ia_i\,z^{n-i}\,x^{-n+i}}{i-\lambda_s+1} = \mathrm{H}(x\,,x)\sum_0^n{}_i\, ia_i\,z^{n-i}\,x^{-n+i}\sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{i-\lambda_s+1}$$

$$= \mathrm{H}(x\,,x)\,na_n\sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{n-\lambda_s+1} = \sum_0^n{}_i\, a_i\,\mathrm{H}(x\,,x)$$

e mediante il principio di DIRICHLET

$$\mathrm{N} = \sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s \int_x^z \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\,\xi^{\lambda_s-n-1}\,d\xi\sum_0^n{}_i\left(a_i\,z^{n-\lambda_s+1} - ia_i\,z^{n-i}\int_\xi^z y^{-\lambda_s+i}\,dy\right)$$

$$= \sum_1^n{}_s \mathrm{K}_s \int_x^z \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\sum_0^n{}_i \frac{ia_i\,z^{n-i}\,\xi^{-n-i}}{i-\lambda_s+1}$$

$$= \int_x^z \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\sum_0^n{}_i\, ia_i\,z^{n-i}\,\xi^{-n+i}\sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{i-\lambda_s+1}\,d\xi$$

$$= na_n\sum_1^n{}_s \frac{\mathrm{K}_s}{n-\lambda_s+1}\int_x^z \mathrm{H}_2(x\,,\xi)\,d\xi = \sum_0^n{}_i\, a_i\,(\mathrm{H}(x\,,z) - \mathrm{H}(x\,,x))$$

onde

$$\mathrm{L}(x, z) = \mathrm{M} + \mathrm{N} = \sum_{0}^{n}{}_i\, a_i\, \mathrm{H}(x, z) .$$

Perciò l'equazione (11) diverrà

$$\int_0^z \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, z)\, dx = 0 \tag{12}$$

quando si ammetta che tutte le radici della equazione (B) di grado n siano finite, e per conseguenza sia $\sum_0^n a_i \gtreqless 0$.

8. Se μ fosse un numero complesso e $\varphi(x)$ ottenuto dalla (E) risultasse complesso ed eguale a $\varphi_1 + i\varphi_2$, allora separando la parte reale φ_1 dalla immaginaria si otterrebbero *due funzioni reali diverse da zero* φ_1 e φ_2 che ambedue verificherebbero la (12).

Si avrà dunque:

TEOREMA IV. – *Se l'equazione*

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0 \tag{B}$$

di grado n ha le radici finite e diverse fra loro, e una o più di esse hanno la parte reale negativa, allora l'equazione funzionale

$$\int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx = 0$$

sarà soddisfatta da funzioni reali e diverse da zero.

Se le condizioni di questo teorema sono soddisfatte, si avrà dunque che l'equazione (A), allorché ammette una soluzione ne ammetterà infinite che si otterranno dalla prima aggiungendovi una soluzione della (12) moltiplicata per una costante arbitraria. Quindi

TEOREMA V. – *Il problema di dedurre* $\varphi(x)$ *dalla equazione funzionale*

$$f(x) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \tag{A}$$

non è determinato quando la equazione

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0 \tag{B}$$

di grado n ha le radici finite diverse fra loro e una o più di esse hanno la parte reale negativa.

9. Se supponiamo $n = 1$, e chiamiamo

$$a_0 = \beta \quad , \quad a_1 = \alpha$$

allora l'equazione (B) diverrà

$$\frac{\beta}{\lambda - 1} + \frac{\alpha}{\lambda - 2} = 0,$$

d'onde

$$\lambda = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta}$$

quindi λ sarà finito e positivo se

$$\frac{\alpha}{\beta} > -1 \quad \text{oppure} \quad \frac{\alpha}{\beta} < -2$$

e sarà finito e negativo se

$$-1 > \frac{\alpha}{\beta} > -2 ;$$

quindi i teoremi della Nota precedente si potranno ottenere subito come casi particolari di quelli ora stabiliti.