II.

SULLA DETERMINAZIONE DI SOLUZIONI PARTICOLARI DI UN SISTEMA CANONICO QUANDO SE NE CONOSCE QUALCHE INTEGRALE O RELAZIONE INVARIANTE

NOTA I

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. X (1° sem. 1901), pp. 3-9 (*).

Nel trattato di dinamica del sig. ROUTH (1) sono esposte alcune conseguenze della così detta *ignorazione di coordinate*.

Si suppone che la forza viva T di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo, e così il potenziale U delle forze attive, non dipendano esplicitamente da alcune coordinate: $x_1, x_2, \dots, x_m$, p. es., essendo genericamente n il grado di libertà del sistema e $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ le sue coordinate lagrangiane. Le equazioni del moto ammettono allora gli m integrali lineari (rispetto alle componenti della velocità)

$$\frac{\partial T}{\partial x'_r} = \text{cost.} \qquad (r = 1, 2, \dots, m),$$

e rimangono soddisfatte, attribuendo alle x'_r $(r = 1, 2, \dots, m)$ valori costanti arbitrari, e alle x_i $(i = m + 1, \dots, n)$ valori pure costanti, definiti dalle equazioni

$$\frac{\partial (T - U)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = m + 1, \dots, n),$$

dove beninteso si sieno posti per le x'_r i valori scelti, e zero per le x'_i.

Si fa così corrispondere al sistema degli integrali $\partial T / \partial x'_r = \text{cost.}$, una classe ∞^{2m} di soluzioni particolari, assai notevoli, perchè rappre-

(*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 6 gennaio 1901.

(1) Advanced Part, §§ 98-100.

sentano moti stazionari del sistema, per i quali la questione della stabilità si decide, come nel caso dell'equilibrio, mediante la semplice ispezione dell'integrale delle forze vive $T - U = \text{cost}$.

Mostra infatti il sig. ROUTH come, eliminando le x'_r dalla espressione della forza viva, a mezzo degli integrali $\partial T/\partial x'_r = u_r$, questa assume la forma $\boldsymbol{T} + F$, dove $\boldsymbol{T}$ è una forma quadratica nelle rimanenti x', e F una funzione delle sole x.

Le equazioni del moto conservano la forma lagrangiana, non direttamente rispetto alla espressione ridotta $\boldsymbol{T} + F$ della forza viva, ma alla

$$\boldsymbol{T} + F - \sum_1^m {}_r\, u_r x'_r$$

(dove pure sono da ritenersi eliminate le x'_r a mezzo degli integrali).

Comunque, per gli accennati moti stazionari, si annullano evidentemente tutte le derivate della funzione $\boldsymbol{T} + F - U$, rapporto alle $2(n - m)$ variabili x_i, x'_i. Ritenuto pertanto che le costanti u_r abbiano valori fissi, le condizioni *quantitative* perchè $\boldsymbol{T} + F - U$ ammetta un minimo risultano soddisfatte, ed è giustificato assumere la esistenza effettiva di questo minimo come criterio di stabilità — di fronte alla classe dei movimenti, per cui le u_r conservano gli stessi valori — appoggiandosi sopra il teorema di DIRICHLET. (Il teorema di LIAPOUNOFF mostrerebbe poi facilmente che in ogni altro caso c'è instabilità.)

L'interesse di queste considerazioni mi ha indotto a ricercare se esse non fossero per avventura estensibili ai casi, in cui un sistema dinamico ammette degli integrali primi di forma qualsiasi.

La generalizzazione si presenta spontanea quando le equazioni del moto si assumono sotto forma canonica. Si dimostra infatti (e ciò per qualsiasi sistema canonico) che, *ad ogni insieme di m relazioni invarianti* (o in particolare integrali) *in involuzione, corrisponde* — purchè sia soddisfatta un'ovvia condizione di indipendenza, di cui a § 2 — *una classe di ∞^m almeno* (nel caso degli integrali ∞^{2m}) *soluzioni, la cui determinazione dipende dalla integrazione di un sistema d'ordine $m - 1$, al più.*

Complemento essenziale del teorema si è che *le soluzioni, cui si perviene in tal guisa, hanno sempre comportamento stazionario, ed è quindi applicabile il criterio energetico di stabilità.*

Data la grande scarsezza di movimenti stabili, nel senso rigoroso della parola [2], giova prendere atto di ogni contributo alla loro determi-

---

[2] Si può anzi considerare questa assoluta stabilità come un carattere affatto eccezionale. La stabilità naturale va presa in un senso molto più lato. Cfr. in proposito la prefazione alla Memoria *Sopra alcuni criteri di instabilità*, presentemente in corso di stampa negli « Annali di matematica » (ser. III, t. V); [in questo vol.: I, pp. 1-85].

nazione effettiva. Rispetto all'attuale, mi si consenta di rilevare che esso abbraccia tutti gli esempi di moti stabili finora conosciuti.

1. - Generalità.

Sia un sistema canonico

$$\text{(C)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

la cui funzione caratteristica H non dipende t.

Siano poi

$$\text{(A)} \qquad F_r(p_1, p_2, ..., p_n; x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., m),$$

m relazioni invarianti di fronte al sistema (C), pure indipendenti da t, risolubili rispetto ad altrettante p, ed in involuzione tra di loro.

In forma risoluta le rappresenterò con

$$(\mathrm{A}_1) \qquad p_r = f_r(p_{m+1}, ..., p_n; x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (r = 1, 2, ..., m).$$

Se $\boldsymbol{H}$ *è ciò che diviene* H, *quando* $p_1, p_2, ..., p_m$ *si sostituiscono coi loro valori* (A_1) *e si pone*

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = m+1, ..., n),$$

anche il sistema complessivo delle (A) *e delle* (B) *è invariante rispetto a* (C).

Per dimostrarlo, cominciamo col tradurre in formule le nostre ipotesi. Esse sono:

1) Le relazioni (A), o, ciò che è lo stesso, le (A_1) costituiscono un sistema invariante. Questo vuol dire che, derivando le (A_1) rispetto a t, e tenendo conto delle (C) e delle stesse (A_1), risultano altrettante identità.

Sarà dunque da ritenersi

$$-\frac{\partial H}{\partial x_r} = \frac{df_r}{dt} = -\sum_{m+1}^{n}{}_j \frac{\partial f_r}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial f_r}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j},$$

in quanto, eseguite le derivazioni, si sostituisca, per ogni p_s $(s = 1, 2, ..., m)$ la corrispondente f_s.

Convenendo, per brevità, di porre, per due generiche funzioni V, W,

$$\{V, W\} = \sum_{m+1}^{n}{}_j \left(\frac{\partial V}{\partial p_j}\frac{\partial W}{\partial x_j} - \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial W}{\partial p_j}\right),$$

potremo scrivere

$$(1) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_r}{\partial x_s} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

2) Le relazioni (A), e per conseguenza le (A_1), sono involutorie. Avuto riguardo alla notazione testè introdotta, queste condizioni si esprimono con

$$(2) \qquad \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} \equiv 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Ho adoperato il simbolo $\equiv$ per mettere in evidenza che l'eguaglianza sta identicamente rispetto a tutte le lettere che compariscono nel primo membro. Non c'è infatti alcuna p_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$ che si debba intendere eliminata a mezzo delle (A_1).

3) $\boldsymbol{H}$ proviene da H, ponendovi $p_s = f_s$. Ne conseguono le eguaglianze

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} - \sum_1^m{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} - \sum_1^m{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_i}, \end{aligned} \right. \qquad (i = m + 1, \ldots, n),$$

$$(4) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_r} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_r} - \sum_1^m{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Dalle (3) risulta subito

$$\{H, f_r\} = \{\boldsymbol{H}, f_r\} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\{f_r, f_s\},$$

che, sommate membro a membro colle (4), danno

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_r} + \{\boldsymbol{H}, f_r\} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\left[-\frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\}\right].$$

Portando nelle (1) questo valore di $\partial H/\partial x_r + \{H, f_r\}$ e avendo riguardo alle (2), si ottiene

$$(5) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_r} + \{\boldsymbol{H}, f_r\} \equiv 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

in cui, come già nelle (2), è lecito adoperare il segno di identità, perchè mancano le p_s.

Ciò posto, si tratta di verificare che $(d/dt)(\partial \boldsymbol{H}/\partial p_i)$, $(d/dt)(\partial \boldsymbol{H}/\partial x_i)$ risultano effettivamente nulle, in virtù delle (A), (B), (1), ..., (5).

Si ha in primo luogo

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} &= \left\{ H, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} \right\} + \sum_1^m{}_r \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial p_i \partial x_r}\frac{\partial H}{\partial p_r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} &= \left\{ H, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} \right\} + \sum_1^m{}_r \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x_i \partial x_r}\frac{\partial H}{\partial p_r}, \end{aligned} \right.$$

$$(i = m + 1, ..., n);$$

mentre la derivazione delle (5), rapporto ad una generica p_i ed x_i, porge

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial p_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i}, f_r \right\} + \left\{ \boldsymbol{H}, \frac{\partial f_r}{\partial p_i} \right\} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i}, f_r \right\} + \left\{ \boldsymbol{H}, \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right\} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(r = 1, 2, ..., m;\ i = m + 1, ..., n).$$

Col tener conto delle (B), le (3) si riducono a

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} = -\sum_1^m{}_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_r}\frac{\partial f_r}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} = -\sum_1^m{}_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_r}\frac{\partial f_r}{\partial x_i},$$

e, usufruendo di queste espressioni, le $(d/dt)(\partial \boldsymbol{H}/\partial p_i)$, $(d/dt)(\partial \boldsymbol{H}/\partial x_i)$ assumono l'aspetto

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} &= \sum_1^m{}_r \frac{\partial H}{\partial p_r}\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial p_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i}, f_r \right\} \right], \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i} &= \sum_1^m{}_r \frac{\partial H}{\partial p_r}\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_i}, f_r \right\} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(i = m + 1, ..., n).$$

Per le stesse (B), le $\{\boldsymbol{H}, \partial f_r/\partial p_i\}$, $\{\boldsymbol{H}, \partial f_r/\partial x_i\}$ si annullano, talchè le precedenti equazioni (7) divengono

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_r} + \left\{\frac{\partial H}{\partial p_i}, f_r\right\} = 0\,, \\ &\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_r} + \left\{\frac{\partial H}{\partial x_i}, f_r\right\} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

Sono dunque nulli i secondi membri delle (6′). *c.d.d.*

Osservazione. – Nel teorema è evidentemente implicita la condizione che le equazioni (B) sieno compatibili, cioè che esistano effettivamente dei valori $x_i^{(0)}$, $p_i^{(0)}$ delle x, p, per cui esse riescono soddisfatte [3]. E per verità il passaggio formale dalle (6) e (7) alle (6′) e (7′) — in che riposa la dimostrazione del teorema — è lecito, solo in quanto, esistendo soluzioni $x_i^{(0)}$, $p_i^{(0)}$, si possa riferirsi a uno di questi sistemi di valori. È poi bene inteso che le funzioni tutte, qui considerate, si suppongono regolari, almeno in un certo intorno degli accennati valori $x_i^{(0)}$, $p_i^{(0)}$.

2. - Soluzioni particolari.

La proposizione, or ora dimostrata, permette di trovare con molta facilità alcune soluzioni particolari del proposto sistema (C).

Supponiamo le (B) tutte indipendenti e risolubili rispetto alle $p_{m+1}, \dots p_n$; $x_{m+1}, \dots, x_n$ (ciò, che implica tra altro che le (A) sieno distinte da $H=$cost., nel qual caso la H si riduce ad una costante e le (B) ad altrettante identità). Dalle (B) ed (A) potremo ricavare le $2n-m$ variabili p, $x_{m+1}, \dots, x_n$, in funzione delle rimanenti m, $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Per il carattere invariante delle (A) e (B), facendo queste sostituzioni nel sistema differenziale (C), devono rimanere in tutto m equazioni indipendenti (quelle, che esprimono dx_1/dt, dx_2/dt, ..., dx_m/dt in funzione delle stesse x), le altre risultando identicamente soddisfatte. Ogni soluzione di questo sistema ridotto (C_1) fornisce senz'altro una soluzione di (C). Basta aggiungervi le rimanenti variabili, definite dalle (A), (B).

Rispetto all'integrazione di (C_1), si osserverà che essa è al più una operazione d'ordine $m-1$, poichè il sistema ammette l'integrale $H=$cost. [o più precisamente quello, che se ne ottiene, esprimendo la H per le sole $x_1, x_2, \dots, x_m$, a mezzo delle (A) e (B)]. Altre semplificazioni inter-

[3] Ciò accadrà in generale, poichè si tratta di $2(n-m)$ equazioni tra $2(n-m)+m$ variabili. Quando poi le (B) ammettono soluzioni comuni, lo stesso può dirsi senz'altro del sistema complessivo (A_1), (B), poichè le (A_1) si presentano risolute rispetto a variabili, che non entrano nelle (B).

vengono quando si conoscono integrali del sistema primitivo (C), indipendenti dalle (A) e (B); per ogni integrale, si abbassa ovviamente di una unità l'ordine del sistema da integrare.

Integrandolo, si hanno, come s'è detto, ∞^m soluzioni Σ del sistema canonico (C). Quando in particolare le (A) sono, tutte o in parte, veri integrali (anzichè essere semplici relazioni invarianti) e quindi le F corrispondenti contengono una costante additiva, la classe delle Σ dipende da un numero maggiore di costanti arbitrarie: se ne hanno dunque $2m$, allorchè ognuna delle (A) è un integrale.

Ma non giova insistere su queste generalità.

Riservo ad una prossima comunicazione lo studio di una importante proprietà [4], comune a tutte le soluzioni che scaturiscono dall'indicato procedimento.

---

[4] Si è appunto in vista di ciò che ho supposto le (B) risolubili rapporto alle p_i, x_i $(i = m+1, \ldots, n)$. Le osservazioni precedenti — con le debite modificazioni — rimangono applicabili anche prescindendo da questa ipotesi.