Nota II

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. X (1º sem. 1901),
pp. 35-41 (*).

3. - Comportamento stazionario delle soluzioni Σ.

Per maggior comodo, userò d'ora innanzi linguaggio dinamico, interpretando le (C) come equazioni del moto di un sistema, la cui energia totale sia rappresentata dalla funzione H.

Mi propongo di stabilire che *le soluzioni Σ corrispondono a moti stazionari del sistema.*

Per dimostrarlo, prenderò le mosse dalla circostanza che le m funzioni

$$P_r = p_r - f_r \qquad (r = 1, 2, ..., m)$$

sono in involuzione, talchè ne esistono altre $n - m$ indipendenti $P_i = F_i$ $(i = m + 1, ..., n)$, che costituiscono assieme ad esse un'ennupla involutoria (5). Esiste allora eziandio una funzione S dei $2n$ argomenti x e P, tale che le equazioni

$$(8) \qquad p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

definiscono precisamente le n funzioni $P_r = p_r - f_r$, $P_i = F_i$ delle x e delle p (6).

Ponendo poi

$$(9) \qquad X_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \qquad (k = 1, 2, ..., n),$$

(*) Presentata dal Corrispondente G. Ricci nella seduta del 20 gennaio 1901.

(5) Cfr. per es. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, § 61.

(6) Ibidem, § 111; od anche Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. II, pag. 123. La funzione, qui chiamata S, corrisponde alla $\Omega + \sum_1^n{}_k P_k X_k$ dei citati autori.

si ha nelle (8), (9) una trasformazione fra le due coppie di serie di variabili x, p; X, P, che, per una nota proposizione di JACOBI, conserva i sistemi canonici.

Le (C) si cambiano pertanto in

$$(\mathrm{C}') \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial X_i}, \qquad \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i},$$

designandosi per maggior chiarezza con H' la espressione di H nelle nuove variabili X, P.

Le (A_1) assumono la forma più semplice

$$(\mathrm{A}_1') \qquad P_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Riferendoci ormai a queste variabili X, P, poniamo, secondo il procedimento indicato a § 1, $P_r = 0$ in H', e poi, detto $\boldsymbol{H}'$ il risultato di questa sostituzione,

$$(\mathrm{B}') \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial P_i} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = m + 1, \ldots, n).$$

Le (5), applicate al caso presente, ci dicono che $\boldsymbol{H}'$ è indipendente da $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Ne viene che le funzioni X_i, P_i $(i = m + 1, \ldots, n)$, definite dalle (B′) (7), si riducono a pure costanti.

Ciò posto, ricordiamo che, secondo il sig. ROUTH, *un determinato movimento si dice stazionario o permanente, quando è possibile scegliere delle variabili X, P in modo che* (essendo, rispetto a queste variabili,

$$P_i = \varphi_i(t), \qquad X_i = \psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le equazioni che definiscono il movimento) *la espressione della energia H' rimane indipendente da t, in seguito alla trasformazione lineare*

$$(10) \qquad P_i = \varphi_i(t) + \pi_i, \qquad X_i = \psi_i(t) + \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

(7) Le (B′) sono effettivamente atte a definire le X_i, P_i, poichè non è nullo il determinante funzionale dei loro primi membri rapporto a queste variabili. Qualora infatti ciò fosse, lo stesso dovrebbe accadere per il determinante funzionale dei primi membri delle (B) rapporto alle p_i, x_i (come segue immediatamente dal teorema di moltiplicazione dei determinanti, tenendo conto delle (B′) e delle $\partial \boldsymbol{H}'/\partial X_1 \equiv 0, \ldots, \partial \boldsymbol{H}'/\partial X_m \equiv 0$). Ora, in principio del § 2, noi abbiamo precisamente introdotta l'ipotesi che il detto determinante sia diverso da zero, supponendo le (B) risolubili rapporto alle p_i, x_i $(i = m + 1, \ldots, n)$.

Supponendo di circoscrivere la classe dei movimenti del dato sistema, col considerare soltanto quelli che soddisfanno alle relazioni invarianti (A_1'), vien naturale di estendere la definizione di *stazionarietà*, al modo stesso che ciò si suol fare per la *stabilità*. *Stazionari in senso relativo sono dunque a dirsi quei movimenti, per cui la condizione, testè dichiarata, rimane soddisfatta, in virtù delle relazioni invarianti.*

Data la forma speciale delle (A_1'), la caratteristica della stazionarietà relativa si può manifestamente enunciare come segue:

La funzione H' deve conservarsi indipendente da t, anche dopo la sostituzione

$$(11) \qquad \begin{cases} P_i = \varphi_i(t) + \pi_i & (i = m + 1, \ldots, n) \\ X_i = \psi_i(t) + \xi_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

È chiaro adesso che le nostre soluzioni Σ corrispondono tutte a moti permanenti.

Infatti, adottando le variabili X e P, le funzioni $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ $(i = m + 1, \ldots, n)$ sono, per ogni Σ, delle costanti α_i, β_i, come abbiam visto. Da t dipenderanno in generale $X_1, X_2, \ldots, X_m$, le quali però non entrano in H'. Eseguire la sostituzione (11) in H' equivale dunque a scambiarvi P_i, X_i $(i = m + 1, \ldots, n)$ in $\alpha_i + \pi_i$, $\beta_i + \xi_i$, operazione che evidentemente non introduce t.

Merita di essere notato che, quando le (A) sono veri e propri integrali, vi ha stazionarietà, anche in senso assoluto.

Infatti, in questo caso, le funzioni F_r + cost. sono in involuzione (mentre in generale si può soltanto asserire che le parentesi (F_r, F_s) si annullano, *tenendo conto delle* (A_1)); e tutte le considerazioni, istituite finora, stanno, anche prendendo inizialmente $P_r = F_r + \pi_r$ (dove le π_r sono costanti indeterminate), anzichè $P_r = p_r - f_r$. L'unica differenza consisterà in questo che si avranno, al posto delle (A_1'), le

$$(A') \qquad P_r = \pi_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

e, al posto di

$$H' = (H')_{P_1 = \ldots = P_m = 0},$$

una

$$\overline{H}' = (H')_{P_1 = \pi_1, \ldots, P_m = \pi_m}.$$

Del resto, potremo, come sopra, asserire che, per una qualunque soluzione Σ, la sostituzione (11) non introduce il tempo in $\overline{H}'$. Ora ciò equivale a dire che la sostituzione (10), corrispondente ad una Σ (e per cui quindi si ha $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_m(t) = 0$) non introduce t in H'.

Di qua si conclude la assoluta stazionarietà di tutti i movimenti, definiti dalle Σ.

4. - Criterio energetico di stabilità.

Consideriamo, come sopra, la categoria dei movimenti del proposto sistema conciliabili colle (A'). Le equazioni, che definiscono P_i, X_i $(i = m + 1, \dots, n)$ in termini del tempo, si otterranno senz'altro dalle (C'), ponendo nei secondi membri $P_1 = P_2 = \dots = P_m = 0$. Avremo così le equazioni

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial X_i}, \qquad \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \qquad (i = m + 1, \dots, n).$$

Per i teoremi ben noti di Dirichlet e di Liapounoff, la soluzione particolare $P_i = \alpha_i$, $X_i = \beta_i$ di queste equazioni è stabile allora e solo allora che la funzione H' possiede, per i detti valori α_i, β_i, un minimo effettivo; ossia allora e solo allora che la forma quadratica d^2H' è definita. Ecco dunque la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità *relativa* di una generica Σ. Tale condizione presenta però l'inconveniente di essere espressa in variabili X, P. È affatto indifferente adottare queste o quelle variabili, per dimostrare delle proprietà; anzi è preferibile riferirsi a quelle, per cui la dimostrazione si fa nel modo più semplice. Ma, se si devono fare dei calcoli, le trasformazioni disturbano; ed è indispensabile di evitarle, quando, come nel caso presente, si tratta di un cambiamento di variabili, la cui effettiva determinazione dipende da una questione eventualmente più elevata di quella che si studia.

Per la costruzione delle soluzioni Σ abbiamo una regola generale, che si applica a qualsiasi sistema di variabili (e che richiede al più una operazione differenziale d'ordine $m - 1$). Anche la questione della stabilità deve potersi decidere senza la trasformazione (8), (9) (che implica in generale $n - m$ operazioni successive degli ordini $2(n - m), 2(n - m - 1), \dots, 2$, rispettivamente).

Osserviamo a tale scopo che, sostituendo in H' le P_i, X_i $(i = m + 1, \dots, n)$ coi loro valori (8), (9), e ritenendo in questi le $p_1, p_2, \dots, p_m$ definite dalle (A_1), si deve ritrovare la funzione H. Si avrà dunque

$$d^2H = d^2H',$$

e le derivate seconde di $\boldsymbol{H}$ si esprimeranno in funzione delle derivate seconde di $\boldsymbol{H}'$ mediante formule che (per essere nulle tutte le derivate prime di $\boldsymbol{H}'$, per i valori considerati $P_i = \alpha_i$, $X_i = \beta_i$) hanno carattere covariante. Ne viene che la forma quadratica $d^2\boldsymbol{H}$ (nelle $2(n-m)+m$ variabili $dp_{m+1}, \ldots, dp_m$; $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$) è riducibile, poichè appunto con una opportuna trasformazione lineare (i cui coefficienti saranno in generale funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_m$) si cambia in $d^2\boldsymbol{H}'$.

Constatata così la riducibilità della forma $d^2\boldsymbol{H}$ [8], supponiamo (il che non implica integrazioni, ma solo un'opportuna sostituzione lineare) di trasformarla effettivamente in una forma quadratica Q a $2(n-m)$ argomenti. Questa Q sarà equivalente a $d^2\boldsymbol{H}'$ e quindi il criterio di stabilità si potrà direttamente desumere dalla forma Q. Concludiamo pertanto: *Le Σ sono stabili allora e solo allora che Q* (forma ridotta di $d^2\boldsymbol{H}$) *è una quadrica definita.*

5. - Esempi.

a) Consideriamo il moto di un corpo rigido pesante, fissato per un punto Ω. Nel caso generale, quando cioè i tre momenti principali di inerzia, relativi ad Ω, sono distinti e il baricentro O comunque situato nel corpo, si ha il solo integrale delle aree per i piani orizzontali

$$G_3 = \text{cost}\,.$$

Da questo integrale si traggono, nel modo suesposto, ∞^2 moti stazionari. Un calcolo semplicissimo mostra che corrispondono alle rotazioni uniformi del corpo attorno alla verticale di Ω, che coincide nel corpo con una [9] delle sei direzioni definite, per ogni valore della velocità angolare ω, dalle equazioni $-(B-C)\omega^2\gamma_2\gamma_3 = P(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2)$, $-(C-A)\omega^2\gamma_3\gamma_1 =$

(8) Ciò si poteva del resto desumere direttamente dalle (5). Derivandole e tenendo conto delle (B), si hanno le (7′) e le

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x_r\,\partial x_s} + \left\{\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_s}, f_r\right\} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Date queste relazioni lineari ed omogenee fra i coefficienti della forma $d^2\boldsymbol{H}$, la caratteristica del suo discriminante non può superare $2(n-m)$.

(9) Queste sei direzioni sono tutte reali, per valori abbastanza grandi di ω. In ogni caso due almeno sono reali. Esse appartengono tutte al cono quadrico $(B-C)x_0\gamma_2\gamma_3 + (C-A)y_0\gamma_3\gamma_1 + (A-B)z_0\gamma_1\gamma_2 = 0$. Cfr. in proposito: STAUDE, *Ueber permanente Rotationsaxen*, « Crelle's Journal », B. 113, 1894.

$= P(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)$, $-(A-B)\omega^2\gamma_1\gamma_2 = P(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1)$, in cui è manifesto il significato delle lettere.

Per il caso di LAGRANGE e POISSON (ellissoide di inerzia di rivoluzione attorno alla ΩO), c'è un secondo integrale ($r =$ cost., colle notazioni abituali) in involuzione col primo. Dobbiamo dunque aspettarci ∞^4 moti permanenti. Ed infatti siamo condotti alle così dette *precessioni regolari*, troppo bene studiate [10], perchè valga la pena di soffermarvisi un solo istante.

Se si suppone che non agiscano forze (o più generalmente che sia nullo il loro momento risultante rispetto ad Ω), si hanno i tre integrali delle aree

$$G_1 = \text{cost.}\,, \quad G_2 = \text{cost.}\,, \quad G_3 = \text{cost.}\,.$$

Essi non sono in involuzione, come è ben noto, ma ognuna delle tre coppie

$$G_1 = \text{cost.}\,, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \text{cost.}\,;$$

$$G_2 = \text{cost.}\,, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \text{cost.}\,;$$

$$G_3 = \text{cost.}\,, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \text{cost.}$$

è involutoria, e le devono far riscontro ∞^4 moti stazionari. Queste tre classi di movimenti non sono altro che le rotazioni attorno ai tre assi di inerzia. La verifica diretta non presenterebbe alcuna difficoltà. Limitiamoci ad osservare che le accennate rotazioni dipendono bene da 4 costanti; due per fissare la posizione nello spazio dell'asse di inerzia, attorno a cui la rotazione si compie, e le altre due per fissare la posizione e la velocità iniziale del corpo rispetto allo stesso asse.

b) Nel problema piano dei tre corpi, supposto fisso il baricentro, le equazioni, che definiscono il moto relativo di due di essi, P_1 e P_2, rispetto al terzo, P_3, si possono presentare in forma canonica con quattro gradi di libertà, le due serie di variabili coniugate essendo costituite dalle coordinate relative x_i, y_i $(i = 1, 2)$ di P_1 e P_2 (rispetto a P_3) e dalle componenti p_i, q_i $(i = 1, 2)$ delle loro quantità di moto assolute [11].

---

(10) Cfr. in particolare la *Theorie des Kreisels* dei sigg. KLEIN e SOMMERFELD; cap. I, § 6; III, § 6.

(11) Cfr. POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*, « Acta Mathematica », t. 21, 1897.

Si ha l'integrale delle aree

$$\sum_1^2 {}_i (x_i q_i - y_i p_i) = \text{cost} .$$

Quali sono i movimenti stazionari che corrispondono a questo integrale? Si trova un risultato ben noto, talchè stimo superfluo riportare il calcolo per disteso. I tre corpi costituiscono un triangolo equilatero di grandezza costante e ruotano uniformemente attorno al comune centro di gravità. È il caso più semplice delle soluzioni particolari scoperte da LAPLACE ([12]).

c) Il moto di un solido non soggetto a forze, in un fluido incompressibile, indefinito, comporta, qualunque sia la forma del corpo e la distribuzione delle masse, i sei integrali fondamentali, che esprimono la conservazione del moto del baricentro e del momento risultante delle quantità di moto:

$$F_1 = \text{cost.}, \quad F_2 = \text{cost.}, \quad F_3 = \text{cost.};$$
$$G_1 = \text{cost.}, \quad G_2 = \text{cost.}, \quad G_3 = \text{cost.}$$

Le sei funzioni F_i, G_i $(i = 1, 2, 3)$ costituiscono un gruppo, il quale comprende un sottogruppo involutorio di quattro elementi al più, per es. $F_1, F_2, F_3, F_4 = \sum_1^3 {}_i F_i G_i$.

Agli integrali

$$F_1 = \text{cost.}, \quad F_2 = \text{cost.}, \quad F_3 = \text{cost.}, \quad F_4 = \text{cost.},$$

dovrà pertanto far riscontro una classe ∞^8 di moti permanenti del corpo. Sono questi i moti elicoidali, studiati dal sig. CRAIG ([13]), partendo dalle equazioni di KIRCHHOFF e proponendosi di assegnare la più generale soluzione, compatibile colla ipotesi che le caratteristiche u, v, w; p, q, r del moto rigido sieno tutte costanti. Lascio anche qui di trascrivere il calcolo, limitandomi ad avvertire che esso si fa in modo semplice e non privo di eleganza, se fin da principio si scelgono gli assi in modo opportuno. E precisamente, dacchè sono costanti la risultante e il momento risultante delle quantità di moto, giova far coincidere uno degli assi coordinati coll'asse centrale di questo sistema di vettori.

([12]) *Mécanique céleste*, libro X, cap. VI.

([13]) *The motion of a solid in a fluid*, « American Journal », vol. II, 1879.