VII.

SUL MASSIMO CIMENTO DINAMICO NEI SISTEMI ELASTICI

« Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. II (settembre 1901).
pp. 188-196.

Il BELTRAMI ha insegnato (¹) che « *vera misura del cimento, a cui è messa in ogni punto di un corpo elastico la coesione molecolare, è il valore, che assume in quel punto la energia potenziale unitaria delle forze elastiche* ». La condizione di coesione, o di stabilità che dir si voglia, è che l'energia elastica suddetta si mantenga in ciascun punto del corpo inferiore ad un certo limite.

In pratica si potrà spesso accontentarsi di un criterio, approssimato, desunto dal valor medio, e ritenere sufficiente che non oltrepassi un certo limite (²) il complessivo ammontare P dell'energia elastica del sistema considerato (³).

Ciò posto, qualora il sistema si trovi in movimento sotto l'azione di date forze, la P sarà in generale variabile, e, per lo scopo accennato, occorrerà aver riguardo al suo limite superiore P_d.

Mi propongo di far vedere che questo limite superiore ammette una espressione assai comoda e affatto generale in funzione di due soli elementi, P_s ed E, essendo P_s il valore di P corrispondente allo stato di equilibrio sotto l'azione delle stesse forze, ed E la energia totale dello stato iniziale. Si ha precisamente

$$P_d = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}\,.$$

(¹) *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici*, « Rend. del R. Istituto Lombardo », serie 2, vol. 18, 1885.

(²) Se si tratta, come avviene per lo più, di corpi omogenei (massicci, od anche di forma prismatoidica allungata), questo limite non sarà altro che il prodotto del limite specifico, considerato da BELTRAMI, per il volume del corpo e per un opportuno coefficiente dipendente dai rapporti delle dimensioni.

(³) È ciò che il CASTIGLIANO (*Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Torino, 1879) chiama lavoro di deformazione, del quale elemento, come appunto osserva BELTRAMI al luogo citato, egli aveva riconosciuta tutta l'importanza, mostrando il vantaggio di usarne sistematicamente anche nelle applicazioni tecniche.

Il calcolo semplicissimo, con cui si perviene a questa relazione, mostra in pari tempo che gli spostamenti e le tensioni, che si destano nei singoli punti del sistema nello stato di massima sollecitazione dinamica ($P=P_d$), stanno agli elementi analoghi della sollecitazione statica nel rapporto di $1+\sqrt{1+E/P_s}$ all'unità. In particolare, per $E=0$, spostamenti e tensioni sono doppi, per $E=3P_s$, tripli, ecc. (4).

Osservazioni di questo genere non sono certo nuove. Basta pensare al noto esempio di un filo, che, sotto l'azione di un dato peso tensore, repentinamente applicato, a partire dalla quiete, subisce, prima che si stabilisca l'equilibrio, un allungamento massimo doppio del definitivo. È pur noto che conclusioni analoghe stanno in generale, come si può per es. ricavare dalla teoria delle soluzioni fondamentali (5).

Qui si vede come tali circostanze effettivamente si collegano allo stato di massima coazione elastica, raggiungibile per date forze e date condizioni iniziali.

1. – Le equazioni indefinite del moto elastico, colle notazioni consuete, sono

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varrho X - \left\{\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right\},\\ \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \varrho Y - \left\{\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right\},\\ \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varrho Z - \left\{\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right\}, \end{aligned}\right.$$

dovendosi in esse ritenere le componenti degli sforzi X_x, X_y, ecc. derivate dal potenziale Π delle forze elastiche rapporto alle corrispondenti componenti di deformazione x_x, x_y, ecc.

Si deve poi avere sul contorno σ dello spazio S occupato dal corpo, che si considera:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma &= L\,,\\ Y_x\alpha + Y_y\beta + Y_z\gamma &= M,\\ Z_x\alpha + Z_y\beta + Z_z\gamma &= N, \end{aligned}\right.$$

il significato delle lettere essendo qui pure manifesto.

(4) Per i sistemi con un sol grado di libertà queste considerazioni sono già state istituite dal Prof. GUIDI nella Nota *Sopra un problema di elasticità*, « Atti della R. Accademia di Torino », vol. 34, 1898.

(5) Cfr. LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge, 1892-93; vol. 1, art. 81.

Rappresenteremo con

$$P = -\int_S \Pi \, dS$$

l'energia elastica totale, posseduta dal corpo in un generico istante t, con

$$T = \frac{1}{2}\int_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} dS$$

la sua forza viva, con

$$U = \int_S \varrho\{Xu + Yv + Zw\}\, dS + \int_\sigma \{Lu + Mv + Nw\}\, d\sigma$$

il lavoro compiuto dalle forze esterne nel passaggio del corpo dalla configurazione naturale ($u = v = w = 0$) a quella relativa all'istante considerato. Con P_0, T_0, U_0 intenderemo i valori delle stesse quantità nell'istante iniziale t_0.

Moltiplichiamo ordinatamente le (1) per $(\partial u/\partial t)\, dt\, dS$, $(\partial v/\partial t)\, dt\, dS$, $(\partial w/\partial t)\, dt\, dS$, sommiamo ed integriamo, estendendo l'integrazione a tutto S e a un intervallo generico t_0, t. Tenendo conto delle (2), si trova con trasformazioni ben note

$$(T + P) - (T_0 + P_0) = \int_{t_0}^{t} dt \int_S \varrho \left\{ X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} + Z \frac{\partial w}{\partial t} \right\} dS$$
$$+ \int_{t_0}^{t} dt \int_\sigma \left\{ L \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial t} + N \frac{\partial w}{\partial t} \right\} d\sigma .$$

Se, come noi vogliamo supporre, le forze di massa e le pressioni superficiali non dipendono dal tempo, il secondo membro vale $U - U_0$, onde, ponendo

$$E = T_0 + P_0 - U_0 ,$$

la precedente equazione diviene

$$T + P - U = E . \tag{3}$$

È la forma, che conviene nel caso attuale al principio di conservazione della energia (energia cinetica + energia elastica + energia potenziale = cost.).

Considerando come date le forze esterne, proponiamoci di trovare il limite superiore dei valori assunti da P, mentre il sistema oscilla, conformemente alle equazioni (1), (2), a partire da un dato stato iniziale o, più generalmente, da uno stato di data energia totale.

Sia P_d questo limite, che supporremo naturalmente finito, intendendo di contemplare soltanto sistemi di spostamenti u, v, w finiti, continui e derivabili quanto occorre (come deve appunto accadere entro i limiti di elasticità).

Sia ancora P' il limite superiore di P, quando, prescindendo dalla circostanza che le funzioni u, v, w debbono in realtà soddisfare al sistema (1), (2), si tien conto soltanto della (3).

Si avrà manifestamente

$$P_d \leqslant P'.$$

Occupiamoci intanto della determinazione di P'. Basterà applicare i principi fondamentali del calcolo delle variazioni, trattandosi di rendere massimo l'integrale definito P, compatibilmente colla (3).

Dovremo cominciare col rendere nulla la variazione di

$$P + \lambda(T + P - U),$$

in cui λ designa una costante a priori indeterminata, da fissarsi in seguito in modo da soddisfare alla (3). Da

$$\delta P + \lambda\delta(T + P - U) = 0$$

discende ovviamente

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \lambda\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \lambda\frac{\partial w}{\partial t} = 0; \tag{4}$$

$$(1 + \lambda)\delta P - \lambda\delta U = 0. \tag{5}$$

Escludendo per un momento che le forze esterne sieno identicamente nulle, possiamo ritenere $1 + \lambda$ diverso da zero (in quanto, per $1 + \lambda = 0$, la (5) implica $\delta U = 0$, ossia appunto l'identico annullarsi di X, Y, Z; L, M, N). Posto quindi

$$\mu = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

la (5) equivale a

$$\int_S \delta\Pi\, dS + \mu\delta U = 0, \tag{5'}$$

che è, in base al principio dei lavori virtuali, la equazione simbolica dell'equilibrio elastico sotto l'azione di forze di massa e pressioni superficiali, che stanno alle date X, Y, Z; L, M, N nel rapporto di μ ad 1. I corrispondenti spostamenti u', v', w' rimangono per conseguenza definiti da

$$(5'') \qquad \begin{cases} u' = \mu u_s\,, \\ v' = \mu v_s\,, \\ w' = \mu w_s\,, \end{cases}$$

essendo chiaramente u_s, v_s, w_s, gli spostamenti, che competono alla configurazione di equilibrio sotto l'azione delle forze date; u_s, v_s, w_s, e quindi u', v', w', non dipendono da t. Le (4) riescono così identicamente soddisfatte e resta da determinare μ in base alla (3).

La sostituzione dei valori (5″) in T, P ed U, porge, con evidente significato dei simboli,

$$T' = 0\,, \qquad P' = \mu^2 P_s\,, \qquad U' = \mu U_s\,.$$

Ma $U_s = 2P_s$ (come tosto risulta dalla equazione simbolica dell'equilibrio, introducendovi u_s, v_s, w_s quale sistema di spostamenti virtuali). La (3) diventa pertanto

$$(\mu^2 - 2\mu)P_s = E\,.$$

P_s non è zero. (Infatti dovrebbero annullarsi in tal caso le singole componenti di deformazione e quindi, a norma delle equazioni di equilibrio, anche X, Y, Z; L, M, N, il che, pel momento, si esclude.)

La equazione, che definisce μ, può dunque essere scritta

$$\mu^2 - 2\mu - \frac{E}{P_s} = 0\,.$$

Le radici

$$\mu = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}}$$

sono sempre reali, poichè, il valore minimo dell'energia totale spettando allo stato di equilibrio, si ha necessariamente

$$E \geqslant P_s - U_s = -P_s\,.$$

Per $E = -P_s$, il sistema non può che rimanere in equilibrio nella configurazione iniziale; in questo caso estremo $\mu = 1$; P', e così pure P_d, coincidono con P_s.

Ritenuto $E > -P_s$, la radice $1 + \sqrt{1 + E/P_s}$ è maggiore dell'unità. Per questo valore di μ si ha effettivamente il massimo cercato. Per constatarlo, ricorriamo secondo la regola, alla variazione seconda di

$$P + \lambda(T + P - U).$$

Essa può essere scritta (esprimendo λ per μ e notando che $\delta^2 U = 0$)

$$\frac{1}{1-\mu}\{\delta^2 P + \mu\delta^2 T\},$$

quantità essenzialmente negativa, il che assicura l'esistenza del massimo.

Siccome all'altra radice $1 - \sqrt{1 + E/P_s}$ corrisponde un minimo, oppure nè massimo, nè minimo (secondochè E è $\leqslant$, oppure > 0), rimane provato che il massimo valore P, raggiungibile da P conciliabilmente colla (3), è dovuto agli spostamenti (5''), la costante μ avendo il valore $1 + \sqrt{1 + E/P_s}$.

Ne viene

$$P' = \mu^2 P_s = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}.$$

Nello stabilire questa equazione abbiamo lasciato da parte il caso che tutte le forze esterne sieno nulle, e l'altro che E sia eguale a $-P_s$. Abbiamo già notato che, per $E = -P_s$, $\mu = 1$, $P' = P_s$. È ciò che risulta dalla formola generale facendovi $\mu = 1$. Quanto al caso, in cui non agiscono forze, e in cui quindi $U = P_s = 0$, si ha dalla (3)

$$T + P = E,$$

donde apparisce che il massimo valore P', che possa assumere P, è E. In ogni caso dunque

$$P' = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}.$$

È facile riconoscere che la funzione P raggiunge effettivamente il suo limite superiore P', anche tenendo conto del sistema differenziale (1), (2) [e non, come finora, della sola (3)]. Basta fissare le condizioni iniziali in modo opportuno. E precisamente, se le forze esterne non sono nulle, supporre per es. che il sistema si trovi, per $t = t_0$, nella configurazione (5'') senza velocità iniziale.

Se poi le forze si annullano, scelto ad arbitrio un sistema di spostamenti (non rigidi) $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ e detto P il corrispondente valore dell'energia elastica (valore necessariamente >0, per l'ipotesi che deformazione vi sia), si prenda inizialmente

$$u=\sqrt{\frac{E}{P}}\,\bar{u}\,,\qquad v=\sqrt{\frac{E}{P}}\,\bar{v}\,,\qquad w=\sqrt{\frac{E}{P}}\,\bar{w}\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=0\,,\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=0\,.$$

Il valore dell'energia elastica è precisamente il suo massimo E.

Di qua, ricordando il significato di P_d, discende

$$P_d=P'.$$

In definitiva possiamo concludere:

Il massimo valore P_d, che può essere assunto dall'energia elastica di un corpo, nel suo movimento sotto l'azione di forze date e per un valore pur dato dell'energia totale E (invariabile di fronte al movimento e quindi riferibile per es. allo stato iniziale), *è*

$$\text{(I)}\qquad P_d=2P_s+E+2\sqrt{P_s(P_s+E)}\,.$$

Gli spostamenti u', v', w', per cui risulta $P=P_d$ (stato di massima sollecitazione dinamica), *sono in generale univocamente determinati e proporzionali agli spostamenti u_s, v_s, w_s della sollecitazione statica, avendosi a tenore delle* (5″),

$$\text{(II)}\qquad \left|\begin{aligned} u'&=\left\{1+\sqrt{1+\frac{E}{P_s}}\right\}u_s\,,\\ v'&=\left\{1+\sqrt{1+\frac{E}{P_s}}\right\}v_s\,,\\ w'&=\left\{1+\sqrt{1+\frac{E}{P_s}}\right\}w_s. \end{aligned}\right.$$

Rimane escluso soltanto il caso, in cui non agiscono forze esterne (e quindi $u_s=v_s=w_s=P_s=0$), *esistendo allora infiniti sistemi di spostamenti, che fanno assumere a P il suo massimo valore E.*

È appena necessario aggiungere che tutto ciò sussiste anche se il movimento elastico, che si considera, è dovuto (oltrechè all'azione di date forze continue) ad impulsi iniziali. Basta tenerne conto nel valutare E, il che si sa fare, in base alla teoria del moto impulsivo.

2. – Prendiamo due semplici esempi, quelli, che ordinariamente si adducono per mettere a raffronto effetti statici ed effetti dinamici.

Supponiamo in primo luogo che il sistema parta senza velocità iniziale dallo stato naturale sotto l'azione di forze comunque assegnate. Si avrà $E = 0$, $P_d = 4P_s$, e gli spostamenti dello stato di massima sollecitazione doppi di quelli spettanti alla configurazione di equilibrio. È il caso del filo, cui repentinamente viene applicato il peso. In generale però è d'uopo osservare che lo stato di massima sollecitazione può anche non essere raggiunto colle poste condizioni iniziali.

Immaginiamo ora un sistema in equilibrio sotto l'azione di forze date e invertiamo bruscamente il senso di ognuna, destando così un movimento del sistema. Calcoliamo il valore di E, che corrisponde a queste condizioni, e il relativo P_d.

Si ha, tenendo conto che la configurazione iniziale è, per ipotesi, configurazione di equilibrio rispetto alle forze motrici invertite,

$$U_0 = -2P_0, \qquad P_s = P_0;$$

da cui

$$E = 3P_s, \qquad P_d = 9P_s\,.$$

Nello stato di massima sollecitazione gli spostamenti sono tripli di quegli statici.

Così per es. la deviazione massima dell'ago di un galvanometro a torsione, quando si inverte bruscamente il senso della corrente, è tripla della deviazione definitiva. (Qui lo stato di massima sollecitazione viene effettivamente raggiunto, ma, come sopra, ciò non si può affermare in generale).